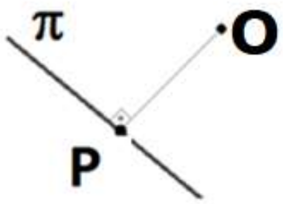

1.- Calcula la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es (1, 2, 3). Haz lo mismo para el punto $\left(\frac{-1}{2}, -1, \frac{-3}{2}\right)$. ¿Existe alguna relación entre los dos planos que has determinado?
Explica lo que ocurre si se hace lo mismo para cualquier punto de la forma (t, 2t, 3t) siendo t un número real cualquiera. Justifica todas las respuestas.

Resolución

(a) Sea π el plano cuyo punto más próximo al origen O(0, 0, 0) es P(1, 2, 3).

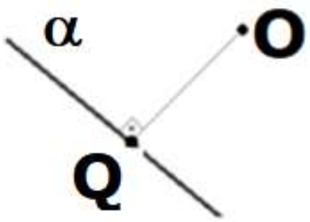
Un vector normal de π es $\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{OP} = (1, 2, 3)$



Y como π pasa por P(1, 2, 3), entonces π: 1(x – 1) + 2(y – 2) + 3(z – 3) = 0 ⇒ π: x + 2y + 3z – 14 = 0

(b) Sea α el plano cuyo punto más próximo al origen O(0, 0, 0) es $Q\left(\frac{-1}{2}, -1, \frac{-3}{2}\right)$

Un vector normal de β es $\overrightarrow{n_\beta} = \overrightarrow{OR} = \left(\frac{-1}{2}, -1, \frac{-3}{2}\right) \mathbin{//} (1, 2, 3) = \overrightarrow{n_\pi}$



Y como α pasa por $Q\left(\frac{-1}{2}, -1, \frac{-3}{2}\right) \Rightarrow\ \alpha: 1\left(x + \frac{1}{2}\right) + 2(y + 1) + 3\left(z + \frac{3}{2}\right) = 0$

$\alpha: x + 2y + 3z + \frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2} = 0\ \Rightarrow \alpha: x + 2y + 3z + 7 = 0$

(c) Si β es el plano cuyo punto más próximo al origen O(0, 0, 0) es R(t, 2t, 3t).

Un vector normal de β es $\overrightarrow{n_\beta} = \overrightarrow{OR} = (t, 2t, 3t) \mathbin{//} (1, 2, 3) = \overrightarrow{n_\pi}$

Y como β pasa por R(t, 2t, 3t) ⇒ $\beta: 1(x - t) + 2(y - 2t) + 3(z - 3t) = 0 \Rightarrow \alpha: x + 2y + 3z - 14t = 0$

Luego, todos los planos que se obtienen son paralelos entre sí porque todos tienen el mismo vector normal.

2.-
(a) ¿Qué relación debe existir entre α y β para que los vectores $\overrightarrow{u_1} = (\alpha, -3, 1)$, $\overrightarrow{u_2} = (3, \beta, 5)$ y $\overrightarrow{u_3} = (1, -4, 3)$ sean linealmente independientes?

Resolución

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son l.i. $\Leftrightarrow det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0 \Leftrightarrow det\begin{pmatrix} \alpha & -3 & 1 \\ 3 & \beta & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$

Desarrollando, $3\alpha\beta - 12 - 15 - \beta + 20\alpha + 27 = 3\alpha\beta + 20\alpha - \beta \neq 0$

(b) Determina, si es posible, un vector no nulo $\vec{v}$ que sea perpendicular a $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$ y, además, sea paralelo a $\overrightarrow{u_3}$.

Resolución

Si $\vec{v} \,//\, \overrightarrow{u_3} = (1, -4, 3)$, entonces $\vec{v} = (t, -4t, 3t)$, con $t \neq 0$. Además, $\vec{v} \,//\, \overrightarrow{u_1} \, x \, \overrightarrow{u_2}$

Si $\vec{v} \perp \overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$, entonces $\vec{v} . \overrightarrow{u_1} = 0$ y $\vec{v} . \overrightarrow{u_2} = 0$

Desarrollando, $\begin{cases} \alpha t + 12t + 3t = 0 \\ 3t - 4\beta t + 15t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha + 15)t = 0 \\ (18 - 4\beta)t = 0 \end{cases}$ y como $t \neq 0$, $\alpha = -15$, $\beta = \frac{9}{2}$

Nos queda $\overrightarrow{u_1} = (-15, -3, 1) \,//\, (15, 3, -1)$ y $\overrightarrow{u_2} = \left(3, \frac{9}{2}, 5\right) \,//\, (6, 9, 10)$

$\overrightarrow{u_1} \, x \, \overrightarrow{u_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 15 & 3 & -1 \\ 6 & 9 & 10 \end{vmatrix} = (39, -156, 117) \,//\, (1, -4, 3)$. Luego, podemos tomar $\vec{v} = (39, -156, 117)$

3.- Considera los planos en R^3 dados por las ecuaciones $\begin{cases} \pi_1: x + y + z = 8 \\ \pi_2: ax + 2y + bz = 4 \\ \pi_3: ax + by + az = 4 \end{cases}$

(a) Describe su posición relativa según los valores de a y b.

Resolución

Matrices de coeficientes y ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ a & 2 & b & 4 \\ a & b & a & 4 \end{pmatrix}$

$\det A = 2a + ab + ab - 2a - a^2 - b^2 = 2ab - a^2 - b^2 = -(a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$

* Si $a \neq b$, $\det A \neq 0$ y $rg\, A = 3 = rg\, A^* =$ nº de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única y los planos se cortan en un único punto.

* Si $a = b$, las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$, $\det A = 0$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ a & 2 & a & 4 \\ a & a & a & 4 \end{pmatrix}$

En A el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 2$

- Si a $\neq$ 2, rg A = 2 ; $rg\ (A^*) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ a & 2 & a & 4 \\ a & a & a & 4 \end{pmatrix} \underset{c3\,=\,c1}{} rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ a & 2 & 4 \\ a & a & 4 \end{pmatrix}$

$det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ a & 2 & 4 \\ a & a & 4 \end{pmatrix} = 8 + 8a^2 + 4a - 16a - 4a - 4a = 8a^2 - 20a + 8 = 0 \Leftrightarrow a = 2,\ a = \frac{1}{2}$

- Si a $\neq$ 2, $a \neq \frac{1}{2}$, rg (A*) = 3 $\neq$ rg A = 2. El sistema es incompatible y los planos se cortan dos a dos

- Si $a = \frac{1}{2}$, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1/2 & 2 & 1/2 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2f2 \\ 2f3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \underset{f3\,=\,f1}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} f2 - f1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

rg (A*) = 2 = rg A. El sistema es compatible indeterminado y $\pi_1 = \pi_3$ y π_2 los corta.

La recta de corte es $r: \begin{cases} x + y + z = 8 \\ 3y = 0 \end{cases}$

- Si $a = 2$, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} f2:2 \\ f3 = f2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{f3\,=\,f1}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} f2 - f1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

rg (A*) = 2 $\neq$ rg A=1. El sistema es incompatible y $\pi_2 = \pi_3\ //\ \pi_1$

Conclusión:

- Si a $\neq$ b los planos se cortan en un único punto.

- Si a = b $\neq$ 2 $\neq \frac{1}{2}$ los planos se cortan dos a dos

- Si a = b = $\frac{1}{2}$, entonces $\pi_1 = \pi_3$ y π_2 los corta.

- Si a = b = 2, entonces $\pi_2 = \pi_3\ //\ \pi_1$.

(b) Halla su intersección en el caso a = 1, b = 2.

Resolución

En este caso como a $\neq$ b sabemos que los planos se cortan en un único punto.

La matriz del sistema es $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} f2 - f1 \\ f3 - f1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ que corresponde al sistema

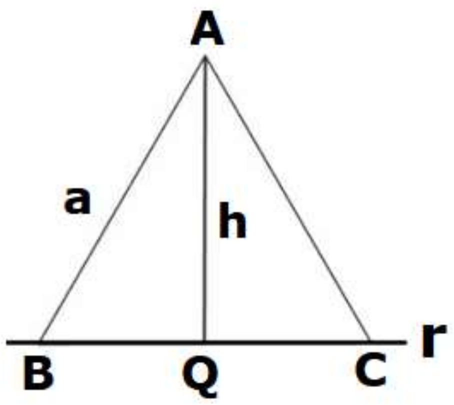
$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ y + z = -4 \\ \quad y = -4 \end{cases}$. Resolviendo, x = 12, y = –4, z = 0. Luego, los planos se cortan en P(12, –4, 0)

4.-

(a) Halla el área del triángulo equilátero que tiene un vértice en el punto A(1, 3, –1) y un lado sobre la recta r dada por r: x – 1 = –y + 2 = –z.

Resolución

r: $x - 1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{-1}$. A $\notin$ r porque no cumple su ecuación: $1 - 1 \neq \frac{3-2}{-1} \neq \frac{-1}{-1}$; $\overrightarrow{d_r} \,//\, (-1, 1, 1)$



Sabemos que la altura, h, del triángulo equilátero es $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ y el área es $Area = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, siendo a el lado del triángulo.

Por ser Q un punto de r, Q(1 + k, 2 – k, –k) y por ser la altura perpendicular a la base $\overrightarrow{AQ} \perp \overrightarrow{d_r}$

Luego, $\overrightarrow{AQ} \,.\, \overrightarrow{d_r} = 0 \Rightarrow (k, -1-k, 1-k).(-1, 1, 1) = 0$. Operando, –k – 1 – k + 1 – k = 0 $\Rightarrow k = 0$

Sustituyendo, Q(1, 2, 0) y $\overrightarrow{AQ} = (0, -1, 1)$.

Por otra parte, $h = \left|\overrightarrow{AQ}\right| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow a^2 = \frac{8}{3}$

Por tanto, el área es $Area = \frac{\frac{8}{3}\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cong 1{,}155\ u^2$

(b) Halla las coordenadas de los otros dos vértices del triángulo del apartado anterior

Resolución

Al ser $a = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ y por ser B y C puntos de r, serán de la forma (1 + x, 2 – x, –x)

$\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \left|\overrightarrow{BQ}\right| = \left|\overrightarrow{CQ}\right| = \sqrt{3x^2} = |x|\sqrt{3} \Rightarrow |x| = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{2}}{3}$.

Luego, $B\left(\frac{3+\sqrt{2}}{3}, \frac{6-\sqrt{2}}{3}, \frac{-\sqrt{2}}{3}\right)$ y $C\left(\frac{3-\sqrt{2}}{3}, \frac{6+\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

5.- Considera las rectas $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$, $s: \begin{cases} 2y + 1 = 0 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

(a) Determina, si es posible, un plano paralelo a la recta s que contenga a la recta r.

Resolución

En r haciendo z = 0 queda $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x + 2 = 0 \end{cases}$; x = –1, y = 2. Luego, el punto A(–1, 2, 0) ∈ r.

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: $\overrightarrow{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 2)$

Un vector director de s se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: $\overrightarrow{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-4, 0, -2) \mathbin{//} (2, 0, 1)$

El plano π que se pide es $\vec{n} = \overrightarrow{d_r} \ x \ \overrightarrow{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 3, -2)$

Y como π pasa por A(–1, 2, 0) ∈ r, entonces π: 1(x + 1) + 3(y – 2) – 2(z – 0) = 0 ⇒ π: x + 3y – 2z – 5 = 0

(b) Halla, si es posible, un plano perpendicular a la recta s que contenga, a la recta r.

Resolución

Si α es el plano mencionado, como contiene a r y es perpendicular a s, entonces r ⊥ s y $\overrightarrow{d_r} \perp \overrightarrow{d_s}$

Pero como $\overrightarrow{d_r} . \overrightarrow{d_s} = (1, 1, 2)(2, 0, 1) = 2 + 2 = 4 \neq 0$, entonces $\overrightarrow{d_r} \not\perp \overrightarrow{d_s}$. Luego, no existe tal plano.

6.- Considera los planos en R³ dados por las ecuaciones $\begin{cases} (a+1)x + y + z = a^2 + 3a \\ x + (a+1)y + z = a^3 + 3a^2 \\ x + y + (a+1)z = a^4 + 3a^3 \end{cases}$

(a) Describe su posición relativa según los valores del parámetro a.

Resolución

Matrices de coeficientes y ampliada: $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & a^2 + 3a \\ 1 & a+1 & 1 & a^3 + 3a^2 \\ 1 & 1 & a+1 & a^4 + 3a^3 \end{pmatrix}$

$\det A = (a+1)^3 + 1 + 1 - 3(a+1) = a^3 + 3a^2 = a^2(a+3) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad$ ó $\quad a = -3$

- Si a ≠ 0, a ≠ –3, det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única y los planos se cortan en un único punto.

- Si $a = 0$, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vemos que los tres planos son coincidentes.

- Si $a = -3$, la matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f1 + 2f3 \\ f2 - f3 \\ 2f3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} f2 = -f1 \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} f1:3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible indeterminado y los planos π_1, π_2 y π_3 se cortan en una recta.

(b) Halla, su intersección en el caso a = –3.

Resolución

Sabemos que en este caso los planos se cortan en una recta, llamémosla r. La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ que corresponde al sistema $\begin{cases} y - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

En la 2ª ecuación, y = z ; en la 1ª ecuación, x = 2z – y = 2z – z = z.

Llamando z = k, la recta es $r: \begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = k \end{cases}$, con k ∈ R

7.- Sea B el punto simétrico de A(2, 0, 1) respecto del punto (1, –1, 1) y C el punto de intersección del plano de ecuación 3x – 5y – z – 10 = 0 con el eje OY. Determina un triángulo equilátero de manera que dos de sus vértices sean B y C y calcula el área de dicho triángulo.

Resolución

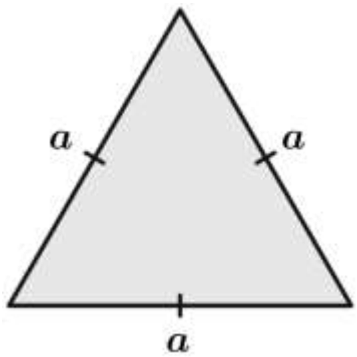
Sea B(a, b, c). Si P(1, –1, 1), como B es el simétrico de A respecto de P, entonces P es el punto medio del segmento AB.

Luego, $\begin{cases} \frac{a+2}{2} = 1,\ a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1 \\ \frac{b+0}{2} = -1 \ \Rightarrow b = -2 \\ \frac{c+1}{2} = 1,\ c + 1 = 2 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$ ⇒ B(–1, –2, 1)

Como el eje OY es $OY: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, el punto de corte del plano con el eje OY es la solución del sistema $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ 3x - 5y - z - 10 = 0 \end{cases}$, que es x = 0, y = –2, z = 0. Luego, C(0, –2, 0)

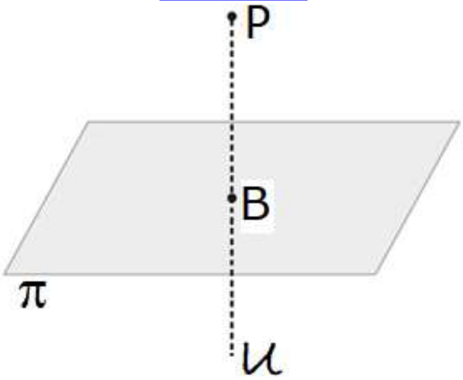
Sabemos que el área del triángulo equilátero de lado $a = \overrightarrow{BC}$ es $Area = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$a = |\overrightarrow{BC}| = (1, 0, -1) = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. El área es $Area = \frac{(\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}866\ u^2$



8.- Sea π el plano definido por la ecuación π: x + y + 2z – 3 = 0. Determina, de forma razonada,
(a) la proyección del punto P(1, 0, –3) sobre el plano π

Resolución



Hallamos la recta u ⊥ π. Un vector director de u es el vector normal de π, $\overrightarrow{d_u} = \vec{n} = (1, 1, 2)$ y como u pasa por P(1, 0, –3), entonces $u: \begin{cases} x = 1 + k \\ y = k \\ z = -3 + 2k \end{cases}$. El punto que se pide, B, es el punto de corte de la recta u con el plano: sustituyendo en la ecuación de π, 1 + k + k – 6 + 4k – 3 = 0 ⇒ $k = \frac{4}{3}$; el punto de corte es $B\left(1 + \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -3 + 2\frac{4}{3}\right)$. O sea $B\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

(b) la posición del plano π y la recta $r: \frac{x-7}{-1} = y - 2 = 3(1 - z)$. O sea $r: \frac{x-7}{-1} = y - 2 = \frac{z-1}{\frac{-1}{3}}$

Resolución

A(7, 2, –1) ∈ r y un vector director de r es $\vec{d} = \left(-1, 1, \frac{-1}{3}\right) \,//\, (3, -3, 1)$

π: x + y + 2z – 3 = 0. Un vector normal de π es $\vec{n} = (1, 1, 2)$

$\vec{d} \,\not\!//\, \vec{n}$ y $\vec{d} \cdot \vec{n} = 3 - 3 + 2 = 2 \neq 0$. Luego r y π son secantes no perpendiculares.

9.- Determina los valores de a para los que los vectores $\overrightarrow{u_1} = (-2, a, -1)$, $\overrightarrow{u_2} = (5, 0, 6)$ y $\overrightarrow{u_3} = (3, -2, 4)$ sean linealmente independientes y, si es posible, expresa $\vec{w} = (2, 2, 2)$ como combinación lineal de $\overrightarrow{u_1} = (-2, 6, -1)$, $\overrightarrow{u_2} = (5, 0, 6)$ y $\overrightarrow{u_3} = (3, -2, 4)$

Resolución

$\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ son l.i. ⇔ $det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) \neq 0 \Leftrightarrow det\begin{pmatrix} -2 & a & -1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \neq 0$

Desarrollando, 18a + 10 – 24 – 20a = –2a – 14 = 0, de donde a = –7

Conclusión: los vectores son l.i. para a ≠ –7

$\vec{w} = a\,\overrightarrow{u_1} + b\,\overrightarrow{u_2} + c\,\overrightarrow{u_3} \Rightarrow (2, 2, 2) = a(-2, a, -1) + b(5, 0, 6) + c(3, -2, 4)$. Operando e igualando componentes, $\begin{cases} -2a + 5b + 3c = 2 \\ 2a - 2c = 2 \\ -a + 6b + 4c = 2 \end{cases}$. Resolviendo, a = 0, b = 1, c = –1. Luego, $\vec{w} = \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_3}$

10.- Dadas las rectas r y s definidas por $r: \begin{cases} x+z-13=0 \\ \alpha x+y+z-12=0 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x-\alpha+1=0 \\ y+z-\alpha(\alpha-1)=0 \end{cases}$
¿Existe algún valor de α para el que las rectas r y s son coplanarias y perpendiculares? Razona la respuesta.

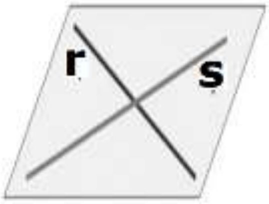
Resolución

En r, haciendo x = 0, $\begin{cases} z-13=0 \\ y+z-12=0 \end{cases}$. Resolviendo, z = 13, y = −1 ; A(0, −1, 13) ∈ r

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: $\overrightarrow{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, \alpha-1, 1)$.

En s, haciendo z = 0, $\begin{cases} x-\alpha+1=0 \\ y-\alpha(\alpha-1)=0 \end{cases}$. Resolviendo, x = α – 1, y = α(α – 1) ; B(α – 1, α(α – 1), 0) ∈ s

Un vector director de s se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: $\overrightarrow{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1)$.



r y s son coplanarias y perpendiculares ⇔ $\overrightarrow{d_r}, \overrightarrow{d_s}$ y $\overrightarrow{AB}$ son l.d. y $\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{d_s} = 0$

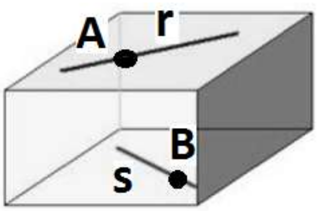
O sea, $det(\overrightarrow{d_r}, \overrightarrow{d_s}, \overrightarrow{AB}) = 0$ y $\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{d_s} = 0$

$0 = \overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{d_s} = 1 - \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = 2.$

Sustituyendo, $\overrightarrow{d_r} = (-1, 1, 1)$, $\overrightarrow{d_s} = (0, -1, 1)$, A(0, −1, 13), B(1, 2, 0) y $\overrightarrow{AB} = (1, 3, -13)$

$$det(\overrightarrow{d_r}, \overrightarrow{d_s}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -13 \end{vmatrix} = -13 + 1 + 1 + 3 = -8 \neq 0.$$

Luego, los vectores $\overrightarrow{d_r}, \overrightarrow{d_s}$ y $\overrightarrow{AB}$ son l.i. y las rectas no son coplanarias, sino que se cruzan.



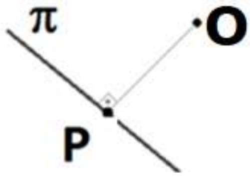
Por tanto, no existe ningún valor de α para el que las rectas r y s son coplanarias y perpendiculares

---

11.- Calcula el punto del plano de ecuación "$3x + 6y + 6z + 36 = 0$" que está más cerca del origen de coordenadas.

Resolución

Sea P(a, b, c) el punto del plano π: $3x + 6y + 6z + 36 = 0$ más próximo al origen O(0, 0, 0).



Como π: $x + 2y + 2z + 12 = 0$, un vector normal de π es $\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{OP} = (a, b, c) \,//\, (1, 2, 2)$

$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{2} \Rightarrow$ b = 2a , c = 2a y P(a, 2a, 2a).

Como π pasa por P, entonces $a + 2(2a) + 2(2a) + 12 = 0$, $9a + 12 = 0$, $a = \frac{-4}{3}$ y $P\left(\frac{-4}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{-8}{3}\right)$

12.- Se consideran los puntos A(2, 0, 2) y B(0, 0, –1) . ¿Cuántos triángulos equiláteros se pueden construir de manera que dos de sus vértices sean A y B? Justifica la respuesta y calcula algún ejemplo concreto.

Resolución

Sea C(x, y, z) el tercer vértice. El lado del triángulo sería $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |(-2, 0, -3)| = \sqrt{13}$

$\overrightarrow{AC} = (x-2, y, z-2)$, $\overrightarrow{BC} = (x, y, z+1)$. Como $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{13} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = 13$

Desarrollando, $x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 - 4z + 4 = x^2 + y^2 + z^2 + 2z + 1 = 13$

Nos queda el sistema $\begin{cases} 4x + 6z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2z + 1 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7-6z}{4} \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2z + 1 = 13 \end{cases}$

Sustituyendo en la 2ª ecuación, $\left(\frac{7-6z}{4}\right)^2 + y^2 + z^2 + 2z = 12$; multiplico por 16:

$36z^2 - 84z + 49 + 16y^2 + 16z^2 + 32z = 192 \Rightarrow 52z^2 - 52z + 16y^2 = 143$, que corresponde a una elipse.

Luego, el vértice C del triángulo es cualquier punto de la elipse y, por tanto, hay infinitos triángulos.

13.- Considera los planos de ecuaciones

π_1: $\lambda x - y + 2z = 1$, π_2: $x + 3y - z = -(\lambda + 1)$, π_3: $3x + \lambda y + z = -\lambda$

(a) Determina para qué valores de λ son π_1 y π_2 perpendiculares y, en ese caso, halla un vector perpendicular a ambos planos.

Resolución

Los vectores normales de π_1 y π_2 son $\overrightarrow{n_1} = (\lambda, -1, 2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1, 3, -1)$

$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} . \overrightarrow{n_2} = 0$. Operando, $\lambda - 3 - 2 = 0$, $\lambda = 5$.

Para λ = 5, un vector perpendicular a ambos planos es $\vec{n} = \overrightarrow{n_1} \, x \, \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-5, 7, 16)$

(b) Determina para qué valores de λ los tres planos contienen una recta, común y determina las ecuaciones paramétricas de la misma.

Resolución

El sistema formado por las ecuaciones de los planos es $\begin{cases} \pi_1: \lambda x - y + 2z = 1 \\ \pi_2: x + 3y - z = -(\lambda + 1) \\ \pi_3: 3x + \lambda y + z = -\lambda \end{cases}$

Matrices de coeficientes y ampliada del sistema: $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -\lambda - 1 \\ 3 & \lambda & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

Como el menor $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, rg A = 2.

Para que los tres planos contengan una recta el sistema debe ser det A = 0, porque si no, usando el teorema de Rouché-Fröbenius, sería rg(A) = rg(A*) = 3 y el sistema sería compatible determinado, con solución única y los planos se cortarían en un solo punto.

$\det A = 3\lambda + 3 + 2\lambda - 18 + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 + 5\lambda - 14 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-5 \pm 9}{2}$, $\lambda = 2$, $\lambda = -7$

Conclusión: si , $\lambda = 2$ ó $\lambda = -7$ los tres planos contienen a la misma recta

Si λ = -7, $A^* = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -8 \\ 3 & -7 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} f1 - 2f3 \\ f2 + f3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -13 & 13 & 0 & -13 \\ 1 & 3 & -1 & -8 \\ 3 & -7 & 1 & 7 \end{pmatrix} f1: (-13) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -8 \\ 3 & -7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

$f3 - 3f1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -9 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} f3 + f2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. La última ecuación es 0 = −5, que es incompatible.

Luego, en este caso el sistema es incompatible y los planos no se cortan en una recta.

Si λ = 2, $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f1 - 2f3 \\ f2 + f3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} f1 = -f2 \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ que corresponde a la recta r de ecuaciones $r: \begin{cases} 4x + 5y = -5 \\ 3x + 2y + z = -2 \end{cases}$

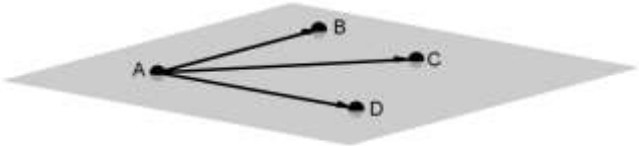
Haciendo x = 0, $\begin{cases} 5y = -5 \\ 2y + z = -2 \end{cases}$. Resolviendo, y = −1, z = 0 ; A(0, −1, 0) ∈ r

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: $\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (5, -4, -3) \,//\, (-5, 4, 3)$.

Conclusión: debe ser λ = 2 y los planos contienen a la recta, que en paramétricas es $r: \begin{cases} x = -5k \\ y = -1 + 4k \\ z = 3k \end{cases}$

14.- Dados los puntos A(1, 2, 0), B(1, 5, a), C(3, 3, 1) y D(2, 4, –3).
(a) Halla los valores de a para los que los cuatro están sobre un mismo plano.

Resolución



A, B, C y D son coplanarios ⇔ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son l.d. O sea, $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$

$$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 + 4a - a + 18 = 3a + 21 = 0 \Leftrightarrow a = -7$$

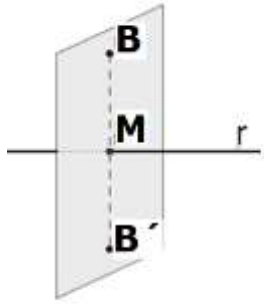
Conclusión: debe ser a = –7

(b) Con el valor de a calculado en el apartado anterior, halla el simétrico del punto B con respecto a la recta que determinan A y C.

Resolución

a = –7, B(1, 5, –7). La recta r que pasa por AC tiene vector director $\overrightarrow{d_r} = \overrightarrow{AC} = (2, 1, 1)$ y como pasa por A(1, 2, 0), $r: \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 + k \\ z = k \end{cases}$

El punto simétrico de B respecto de r sería el punto B´ del dibujo.



- Hallamos el plano π que pasa por B y es ortogonal a la recta.

Un vector normal $\vec{n}$ del plano π es el vector director de r: $\vec{n} = \overrightarrow{d_r} = (2, 1, 1)$

Y como π pasa por B(1, 5, –7), entonces π: 2(x – 1) + 1(y – 5) + 1(z + 7) = 0 ⇒ π: 2x + y + z = 0

- Hallamos M, punto de corte de r y π, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

Sustituyendo en el plano, 2(1 + 2k) + 2 + k + k = 0 ; $k = \frac{-2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\frac{-2}{3} \\ y = 2 + \frac{-2}{3} \\ z = \frac{-2}{3} \end{cases}$. Luego, $M\left(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

- Por último, hallamos el simétrico B´(a, b, c) de B(1, 5, –7) usando que M es el punto medio del segmento BB´: $\begin{cases} \frac{a+1}{2} = \frac{-1}{3}, \ 3a + 3 = -2 \Rightarrow a = \frac{-5}{3} \\ \frac{b+5}{2} = \frac{4}{3}, \ 3b + 15 = 8 \Rightarrow b = \frac{-7}{3} \\ \frac{c-7}{2} = \frac{-2}{3}, \ 3c - 21 = -4 \Rightarrow c = \frac{17}{3} \end{cases}$. El simétrico que se pide es $B´\left(\frac{-5}{3}, \frac{-7}{3}, \frac{17}{3}\right)$

15.- Halla la ecuación del plano que pasa por el punto (3, −1, 2) y contiene a la recta, común a los planos cuyas ecuaciones son, respectivamente, $x + y + z = 1$ y $x + y - z + 3 = 0$.

Resolución

Como $(3, -1, 2) \notin \pi_1: x + y - z + 3 = 0$ porque no cumple su ecuación ($3 - 1 - 2 + 3 = 3 \neq 0$), la familia de planos que contiene a la recta $r: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$ es $h_k: x + y + z - 1 + k(x + y - z + 3) = 0$.

Operando, $h_k: (1 + k)x + (1 + k)y + (1 - k)z + 3k - 1 = 0$

Buscamos el plano de la familia que pase por el punto (3, −1, 2). Sustituimos en h_k:

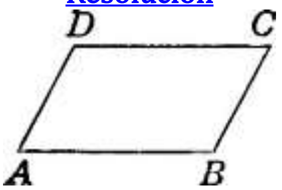
$(1 + k)3 + (1 + k)(-1) + (1 - k)2 + 3k - 1 = 0 \Rightarrow 3k + 3 = 0 \Rightarrow k = -1$.

Luego, el plano que buscamos es $h: 2z - 4 = 0 \Rightarrow h: z = 2$

16.- Tres vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD tienen por coordenadas A(1, 1, 0), B(−2, 3, 1) y C(4, −1, 2)

(a) Determina las coordenadas del cuarto vértice D.

Resolución



D(x, y, z): Por ser un paralelogramo, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow (3, -2, -1) = (x - 4, y + 1, z - 2)$.

Igualando componentes, $\begin{cases} 3 = x - 4 \Rightarrow x = 7 \\ -2 = y + 1 \Rightarrow y = -3 \\ -1 = z - 2 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$. Luego, $D(7, -3, 1)$

(b) Determina la distancia del punto D al plano que pasa por el punto (1, 2, −1) y es perpendicular a la recta r dada por $r: \begin{cases} x = y \\ x + y = z \end{cases}$

Resolución

$(1, 2, -1) \notin r: \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$, no cumple sus ecuaciones $\begin{cases} 1 - 2 = -1 \neq 0 \\ 1 + 2 - (-1) = 3 \neq 0 \end{cases}$

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: $\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 2)$

Un vector normal $\vec{n}$ del plano π mencionado es el vector director de r: $\vec{n} = \vec{d} = (1, 1, 2)$

Y como π pasa por (1, 2, −1), entonces $\pi: 1(x - 1) + 1(y - 2) + 2(z + 1) = 0 \Rightarrow \pi: x + y + 2z - 1 = 0$

Como $D(7, -3, 1)$, usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano, la distancia es

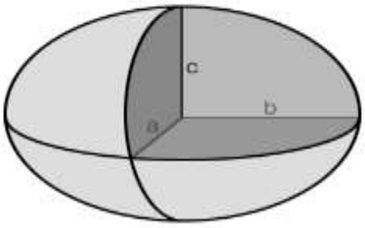
$$dist(D, \pi) = \frac{|7 - 3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} \cong 2{,}04\ u$$

OTROS DEL 1995

1.- Identificar, indicando algunas de sus características, las formas geométricas de las siguientes expresiones algebraicas: (a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Resolución

Elipsoide centrado en el origen de coordenadas, O(0, 0, 0) y con semiejes a, b y c



Si a = b > c, es un elipsoide achatado ; si a = b < c , se tiene un elipsoide alargado y si a = b = c , es una esfera.

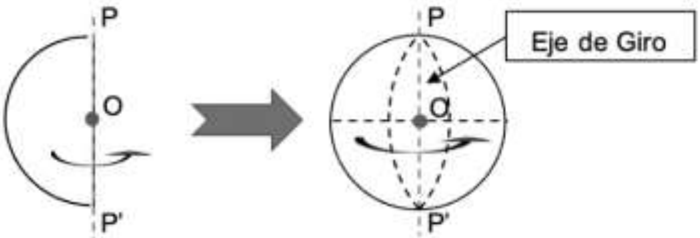
(b) $x^2+y^2+z^2+5x-8y+z=3$

Resolución

Podemos escribir la ecuación así $x^2+5x+\frac{25}{4}+y^2-8y+16+z^2\ +\ z+\frac{1}{4}=3+\frac{25}{4}+16+\frac{1}{4}$

Operando quedaría, $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y-4)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2\ =\frac{51}{2}$, que es una esfera de centro $O\left(\frac{-5}{2},4,\frac{-1}{2}\right)$ y radio $R=\sqrt{\frac{51}{2}}$

Se genera al girar el semicírculo de radio OP alrededor de su diámetro PP´



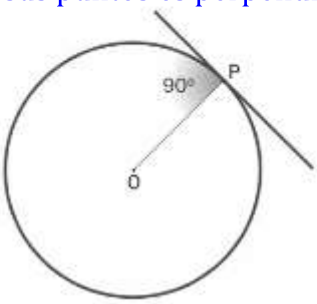
La sección transversal de una esfera tiene forma circular. Esto significa que una representación bidimensional de una esfera es un círculo cuando solo se dispone de dos ejes.

(c) $\begin{cases}x=\cos t\\ y=sen\ t\end{cases}$, siendo t un parámetro que indica el tiempo

Resolución

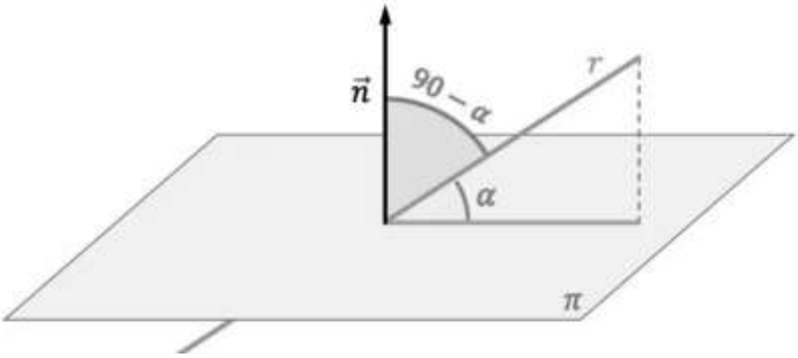
Como $x^2+y^2=\cos^2 t+sen^2 t=1$, se trata de la circunferencia del plano centrada en el origen y de radio 1

La tangente a la circunferencia en uno de sus puntos es perpendicular al radio:



2.- Dada una recta del vector director $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ y el plano de la ecuación π: $Mx + Ny + Pz + Q = 0$, deducir la forma del ángulo que forman la recta y el plano.

Resolución



Un vector normal del plano es $\overrightarrow{n} = (M, N, P)$ y el ángulo que forman la recta y el plano es α.

Usando la definición de producto escalar, $\overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{n} = |\overrightarrow{v}|\,.\,|\overrightarrow{n}|.\cos(90^o - \alpha) = |\overrightarrow{v}|\,.\,|\overrightarrow{n}|.\text{sen}\ \alpha$

Despejando, $sen\ \alpha = \dfrac{\overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{v}|\,.\,|\overrightarrow{n}|} \Rightarrow \alpha = \text{arsen}\left|\dfrac{aM + bN + cP}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{M^2+N^2+P^2}}\right|$

Se toma el valor absoluto porque el ángulo debe ser menor o igual que 90º.

3.- Indique si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa y razone la respuesta.

a) El sistema formado por las ecuaciones generales de dos planos distintos cualesquiera es siempre un sistema de ecuaciones implícitas de una recta.

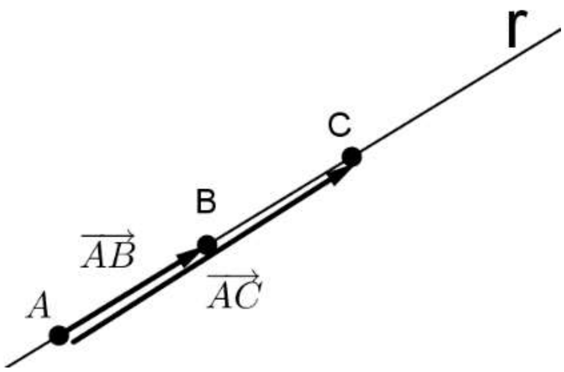
Resolución

Falso, porque si los planos son paralelos el sistema es incompatible y si los planos son coincidentes el sistema se reduce a la ecuación de un plano.

b) La condición necesaria y suficiente para que 3 puntos estén alineados es que el determinante formado por las coordenadas de esos tres puntos sea nulo.

Resolución

Verdadero. Tres puntos están alineados si están contenidos en la misma recta.



$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ y $C(x_3, y_3, z_3)$

A, B y C están alineados ⇔ $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ y $\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ son l.d.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ f2 - f1 \\ f3 - f1 \end{matrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ y } \overrightarrow{AC} \text{ son l.d.} \Leftrightarrow \text{A, B y C están alineados}$$