1.- Desde el origen de coordenadas pueden trazarse dos rectas tangentes a la circunferencia que

tiene su centro en el punto (3, 0) y cuyo radio vale . ¿Cuáles son las ecuaciones de dichas rectas

tangentes?

**Resolución**

La ecuación de la circunferencia es

Derivando de forma implícita, y respecto de x, se tiene 2(x – 3) + 2yy´ = 0 ;

La tangente en un punto P(a, b) de la circunferencia es

Al ser , la tangente es de la forma

Como la tangente debe pasar por el origen de coordenadas, (0, 0), entonces

 ⇒ ⇒ . Como P(a, b) pertenece a la circunferencia,

 ⇒ . Queda la ecuación

Resulta el sistema .

Restando las ecuaciones, –6a + 9 = 0, . Luego,

Para , una tangente es

Para , otra tangente es

2.- Se tiene un paralelogramo uno de cuyos vértices es el punto (3, 2) y dos de cuyos lados se

encuentran contenidos, respectivamente, en las rectas r y s de ecuaciones r: 2x + 3y – 7 = 0,

s: x – 3y + 4 = 0. Halla las ecuaciones de las rectas sobre las que se encuentran los otros dos lados.

**Resolución**

Los vectores normales de r y s son y y al ser , entonces r ~~//~~ s

El punto (3, 2) ∉ r porque no cumple su ecuación: 2.3 + 3.2 – 7 = 5 ≠ 0

El punto (3, 2) ∉ s porque no cumple su ecuación: 3 – 3.2 + 4 = 1 ≠ 0



Se piden las rectas t y u:

 t pasa por D y al ser paralela a r tiene vector normal ⇒ t: 2(x – 3) + 3(y – 2) = 0 ; t: 2x + 3y = 12

u pasa por D y al ser paralela a s tiene vector normal ⇒ u: 1(x – 3) – 3(y – 2) = 0 ; t: x – 3y = –3

3.- Considera los puntos A(2, –1, 1) y B(–1, –1, 2).

(a) Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en tres segmentos iguales.

**Resolución**



Si C(x, y, z) entonces como

Luego, –3 = 3x – 6 , x = 1 ; 0 = 3y + 3 , y = –1 ; 1 = 3z – 3 , . Por tanto,

Si D(x´, y´, z´) entonces como

Luego, –3 = –3x´ – 3 , x´= 0 ; 0 = –3y´ – 3 , y´ = –1 ; 1 = –3z´ + 6 , . Por tanto,

(b) Encuentra un punto C sobre la recta r de ecuaciones de forma que el triángulo

ABC sea rectángulo en C.

**Resolución**



A(2, –1, 1) y B(–1, –1, 2). El punto de la recta r será de la forma C(1 + k, 1 – k, 1 + 2k)

Por ser rectángulo en C,

Operando, ; (incompatible)

Por tanto, no hay ningún punto C de r para el que ABC sea un triángulo rectángulo en C

4.- Un punto M se mueve en el espacio tridimensional de manera que en un instante de tiempo t se

encuentra en el punto (1 + t, 3 + t, 6 + 2t).

(a) ¿Es esta trayectoria una línea recta? Si es así, escribe sus ecuaciones de dos formas distintas.

**Resolución**

Obviamente, sí: es la recta (ec. paramétricas) ; (ecuación continua)

(b) Halla el instante de tiempo en el que el punto está en el plano dado por la

ecuación x – 2y + z – 7 = 0.

**Resolución**

Sustituyendo las ecuaciones de r en el plano π: x – 2y + z – 7 = 0, se tiene:

1 + t – 2(3 + t) + 6 + 2t – 7 = 0 ⇒ t – 6 = 0 ⇒ t = 6. Luego, en el instante t = 6 el punto está en el plano

(c) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la trayectoria de M y pasa por el

punto (1, 1, 0)

**Resolución**

 ; P(1, 1, 0)

Hallemos el plano π perpendicular a r que pasa por P(1, 1, 0):



Un vector normal de π es

Como π pasa por P(1, 1, 0) , entonces π: 1(x ‒ 1) + 1(y – 1) + 2(z ‒ 0) = 0 ⇒ π: x + y + 2z – 2 = 0

Hallemos M, punto de corte de r y π, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

Sustituyendo las ecuaciones de r en el plano: 1 + t + 3 + t + 2(6 + 2t) – 2 = 0,

 ;

La recta s que se pide pasa por P(1, 1, 0) y tiene vector director

Por tanto, la recta que se pide es

5.- Determina el punto simétrico del (0, 0, 0) respecto del plano de ecuación x + 2y + 3z = 1 y calcula el cuadrado de la distancia entre dichos puntos (el (0,0,0) y su simétrico).

**Resolución**

P(0, 0, 0) ∉ π: x + 2y + 3z = 1 porque no cumple su ecuación (0 + 2.0 + 3.0 = 0 ≠ 1).



Un vector director de r es el vector normal del plano, ⇒

Hallamos el punto de corte, Q, entre el plano y la recta resolviendo el sistema de ecuaciones:

Sustituyendo en la ecuación del plano, t + 2.2t + 3.3t = 1 ; 14t = 1 ;

Luego, El punto de corte es

Calculamos el simétrico P´(a, b, c) de P(0, 0, 0) usando que Q es el punto medio del segmento PP´:

 . El punto simétrico que se pide es

6.- Discute, según los valores de a, la posición relativa de la recta r de ecuaciones

 respecto del plano ax + 2y + 3z = 3.

**Resolución**

Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

Matrices de coeficientes y ampliada del sistema: y

det A = 6 + 2a – 2a – 2 – a2 – a – 4 + 6 = – a2 – a + 6 = 0 ⇔

 - Si a ≠ –3, a ≠ 2, det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A\* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema de

Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única y la recta cortaría al plano

en un punto.

- Si a = –3,

La 1ª fila corresponde a la ecuación 0 = 5, que es incompatible. Luego el sistema es incompatible y, por

tanto, la recta es paralela al plano.

- Si a = 2, det A = 0 y . Como , rg A = 2.

Como , rg A\* = 2. Luego, rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones y en este caso la

recta estaría contenida en el plano

7.- Sea C la circunferencia de ecuación C: x2 + y2 – 4x – 6y – 12 = 0.

(a) Calcula el centro y el radio de C.

**Resolución**

Si el centro es O(a, b) y el radio es r la ecuación es de la forma (x – a)2 + (y – b)2 = r2 que, desarrollando

se obtiene la ecuación implícita de la forma x2 + y2 – 2ax – 2by + c = 0, con c = a2 + b2 – r2.

La ecuación dada es x2 + y2 – 4x – 6y – 12 = 0

Igualando coeficientes,

Es decir, el centro es O(2, 3) y el radio es 5.

(b) Calcula el punto B que es el diametralmente opuesto del punto A(–1, 7).

**Resolución**

Calculamos B(x, y) usando que el centro O(2, 3) es el punto medio del segmento AB:

 . Luego, B(5, –1)

(c) ¿Cuál es la posición relativa de las rectas tangentes a C en los puntos A y B?

**Resolución**

Las tangentes a una circunferencia en los puntos extremos de cualquier diámetro son paralelas, puesto que el diámetro es perpendicular a cualquier tangente a la circunferencia en sus puntos extremos.

8.-

(a) Encuentra el ángulo que forman las diagonales AC y BD del paralelogramo ABCD en el

que A(2, 1, 0), B(0, 0, 0) y C(0, –1, 2).

**Resolución**



Hallamos el vértice D(x, y, z): Por ser un paralelogramo, ⇒ . Igualando componentes, . Luego,

Las diagonales son y ;

Es decir, las diagonales son perpendiculares, forman un ángulo de 90º.

(b) ¿Es un cuadrado? Justifica la respuesta.

**Resolución**

 ;

 . Luego,

Como los lados contiguos no son perpendiculares, no es un cuadrado.

9.- El ángulo entre dos vectores es de 120º y se sabe que el módulo de es 5 y el de es 3.

(a) Determina el valor del número real α para el que los vectores y son ortogonales.

**Resolución**

Si son perpendiculares,

Luego, ⇒

Multiplicando por 2 queda 50α – 15 + 15α – 18 = 0 ; 65α – 33 = 0 ;

(b) ¿Cuánto vale el módulo de ?

**Resolución**

Sustituyendo,

10.-

(a) ¿Es posible determinar una circunferencia conocido su centro y una de sus rectas tangentes? Justifica

la respuesta.

**Resolución**

Sí porque si conocemos el centro C y una de las rectas tangentes, t, a la circunferencia podemos calcular

el radio de la circunferencia r como la distancia del centro a la recta t, puesto que el radio es

perpendicular a todas las rectas tangentes a la circunferencia.

(b) Calcula el radio de una circunferencia cuyo centro es el punto C(1, –1) sabiendo que la recta de ecuación 2x + y = 4 es tangente en uno de sus puntos.

**Resolución**

Sea la tangente t: 2x + y – 4 = 0. Usando la fórmula de la distancia de un punto a una recta, el radio de la

circunferencia es

11.- Dados los planos de ecuaciones π1: x + 2z = 3, π2: 3x + y + z = –1, π3: 2y – z = –2,

y π4: x – y + λz = –5, determina el valor de λ para el que los cuatro planos tienen un solo punto común y

calcula dicho punto.

**Resolución**

El sistema formado por las ecuaciones de los planos es

Matrices de coeficientes y ampliada del sistema: y

Para que los cuatro planos se corten en un solo punto el sistema debe ser compatible determinado y,

usando el teorema de Rouché-Fröbenius, debe ser rg(A) = rg(A\*) = 3.

Como , rg A = 3.

Por tanto, para que también sea rg(A\*) = 3 debe ser det(A\*) = 0

Desarrollando, det(A\*) = 18(–9 – λ + 7) = 18(– λ – 2) = 0 ⇔ λ = –2

Conclusión: para λ = –2 los cuatro planos se cortan en un único punto.

Sea λ = –2. Para hallar el punto de corte entre los planos resolvemos el sistema:

La matriz del sistema es

Matriz que corresponde al sistema escalonado . Resolviendo, x = –1, y = 0, z = 2.

El punto de corte de los planos es P(–1, 0, 2)

12.-

(a) Determina las ecuaciones de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al

plano determinado por el punto (1, 1, 1) y la recta de ecuaciones

**Resolución**

Hallemos vector normal del plano π determinado por el punto P(1, 1, 1) y por la recta r:



En r haciendo z = 1 queda ; x = –1. Luego, el punto A(–1, 0, 1) ∈ r.

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen:

Como el plano π tiene vectores directores , un vector normal de π

es

La recta s que se pide pasa por O(0, 0, 0) y es perpendicular a π. Luego,

Por tanto,

(b) El mismo problema, pero para la recta de ecuaciones

**Resolución**

Para hallar el plano α que contiene al punto P(1, 1, 1) y a la recta s esta vez vamos a usar el haz de planos

de base s, que es: αk: (x + 2y + 3z – 6) + k(3x + 2y + z – 1) = 0

Operando, αk: (1 + 3k)x + (2 + 2k)y + (3 + k)z – 6 – k = 0. Imponiendo que el plano del haz pase por P:

(1 + 3k)1 + (2 + 2k)1 + (3 + k)1 – 6 – k = 0 ; 5k = 0 ; k = 0. Luego, el plano es α: x + 2y + 3z – 6 = 0

La recta t que se pide pasa por O(0, 0, 0) y es perpendicular a α. Luego,

Por tanto,

13.-

(a) En el segmento cuyos extremos son los puntos A(1, 2) y B(2, 3) hay un punto P tal que la relación que

existe entre los vectores y es la siguiente: . Halla P.

**Resolución**

Como ⇒ . Sea P(x, y) el punto que buscamos:

 ; ; ⇒ .

Igualando componentes, . Por tanto, P(4, 5)

(b) Halla la ecuación de la circunferencia con centro en P y que pasa por el origen de coordenadas.

**Resolución**

Al ser el centro de la circunferencia el punto P, si el radio es r, la ecuación sería

Como pasa por O(0, 0), entonces

Luego, la ecuación es

**OTROS DEL 1996 (COU I)**

1.-

(a) ¿Para qué valor, o valores, de α son linealmente dependientes los vectores (2, –3, 1), (–4, 6, –2)

y (α, 1, 2)? Justifica la respuesta.

**Resolución**

Los vectores son l.d. ⇔ .

Luego, los vectores son l.d. para cualquier valor de α

(b) Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P(1, 2, 0) y corta perpendicularmente a la

recta r dada por

**Resolución**

 ; haciendo y = k, x = 3 + 2k ⇒ . Hallemos el punto Q(3 + 2k, k, 3) de r más

próximo a P: . Luego, . Operando,

4 + 4k + k – 2 = 0 ; 5k + 2 = 0 ; y

La recta s que se pide pasa por P y tiene vector director ;

2.- Halla de forma razonada un punto P del plano determinado por los puntos A(2, 0, 0), B(0, 4, 0)

y C(0, 0, 6) que esté a igual distancia de los tres (P se llama circuncentro del triángulo cuyos vértices

son A, B y C)

**Resolución**

Como el plano, π, determinado por los puntos A(2, 0, 0), B(0, 4, 0) y C(0, 0, 6) tiene vectores directores , un vector normal de π es

Como π pasa por A(2, 0, 0) , entonces π: 6(x ‒ 2) + 3(y – 0) + 2(z ‒ 0) = 0 ⇒ π: 6x + 3y + 2z – 12 = 0

Sea P(x, y, z) el circuncentro que se pide, entonces



Luego,

Teniendo en cuenta que además P ∈ π,

Desarrollando y simplificando, ⇒ .

Resolviendo el sistema obtenemos . Luego, el circuncentro es

3.-

(a) Halla el punto Q que es simétrico del punto P(3, 3, 3) respecto de la recta

**Resolución**

Vemos que el punto (0, 0, 0) ∈ r. Un vector director de r es producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: ⇒

El punto simétrico de P respecto de r sería el punto Q del dibujo.



- Hallamos el plano π que pasa por P y es ortogonal a la recta.

Un vector normal del plano π es el vector director de r:

Y como π pasa por P(3, 3, 3), entonces π: –1(x – 3) + 1(y – 3) + 2(z – 3) = 0 ⇒ π: –x + y + 2z – 6 = 0

- Hallamos M, punto de corte de r y π, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

Sustituyendo en la ecuación del plano, k + k + 4k – 6 = 0 ; k = 1 ⇒ M(–1, 1, 2)

- Por último, hallamos el simétrico Q(a, b, c) de P(3, 3, 3) usando que M es el punto medio del

segmento PQ: . El punto simétrico que se pide es

(b) Determina el área del triángulo cuyos vértices son P, Q y el origen de coordenadas.

**Resolución**

Tenemos y el origen de coordenadas



Se pide el área del triángulo OPQ que es,

 ;

4.- Dados el plano π cuya ecuación es x – 3y + z + 14 = 0 y la recta determina la

ecuación de una recta s que esté contenida en π y corte perpendicularmente a la recta r.

**Resolución**

Un vector director de r es y un vector normal de π es

Como y , entonces r y π son secantes no perpendiculares:



 . La recta s que se pide pasa por el punto de corte, A, de r y π. Hallémoslo:

Sustituimos r en el plano: 1 – k – 3(2 + 2k) + (–2k) + 14 = 0 ; ; ;

Como s ⊂ π y s ⊥ r ⇒ ⇒ un vector director de s es

 . Por tanto,

5.- ¿Para qué valores del parámetro a el sistema lineal representa un plano y

para cuál una recta? En cada caso, da las ecuaciones del plano y la recta correspondientes

**Resolución**

Como la 1ª y 3ª ecuaciones son iguales, equivale a

Matrices de coeficientes y ampliada del sistema: y

 .

- Si , rg A = 2 = rg A\* < nº de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado y las ecuaciones representarían a la recta

- Si , . Vemos que el sistema se reduce a la

ecuación x + y + z = 2. Luego, en este caso el sistema representa al plano π: x + y + z = 2

6.-

(a) Halla el punto Q que es el simétrico del punto P(1, 2, 3) con respecto a la

recta

**Resolución**

El punto simétrico de P(1, 2, 3) respecto de la recta r sería el punto Q del dibujo.



- Hallamos el plano π que pasa por P y es ortogonal a la recta r, que en paramétricas es

A(1, 1, 2) ∈ r. Un vector normal del plano π es el vector director de r:

Y como π pasa por P, entonces π: 2(x – 1) – 1(y – 2) + 1(z – 3) = 0 ⇒ π: 2x – y + z – 3 = 0

- Hallamos M, punto de corte de r y π, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

Sustituyendo en la ecuación del plano, 2(1 + 2k) – 1 + k + 2 + k – 3 = 0, 6k = 0, k = 0 ⇒ M(1, 1, 2)

- Por último, hallamos el simétrico Q(a, b, c) de P(1, 2, 3) usando que M es el punto medio del

segmento PQ: . El punto simétrico que se pide es Q(1, 0, 1)

(b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta y que pasa por el punto Q.

**Resolución**

Observamos que Q(1, 0, 1) ∉ s porque no cumple sus ecuaciones:



En s, haciendo x = 0, , . Luego,

Un vector director de s se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: ; . Un vector normal del plano α que se pide es

Y como α pasa por Q(1, 0, 1), entonces α: 1(x – 2) + 1(y – 0) – 1(z – 1) = 0 ⇒ α: x + y – z – 1 = 0

7.- Los puntos A(2, 3, 0), B(3, –1, 0) y C(–3, 3, 0) son vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD.

Determina la longitud de la diagonal BD y las ecuaciones de la recta que la contiene

**Resolución**



Hallamos el vértice D(x, y, z): Por ser un paralelogramo, ⇒ . Igualando componentes, . Luego, ;

Longitud de la diagonal:

La recta r que se pide pasa por B y tiene vector director . Luego,

8.- Dadas las rectas y

(a) Halla el valor del parámetro α para el que las direcciones de r y s sean perpendiculares y determina,

para dicho valor, si r y s se cortan o se cruzan.

**Resolución**

La recta r pasa por A(1, 2, –1) y un vector director de r es

Un vector director de s se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: ; r ⊥ s ⇔ ⇔ . Desarrollando,

 . Luego, para r y s son perpendiculares para .

Para , ; . En las ecuaciones de s

hacemos z = 0, ; ⇒ ∈ s ;

Como , entonces los vectores son l.i. Luego, r y s se cruzan. 

(b) Halla el valor de α para el que r y s sean coplanarias y, en ese caso, determina la ecuación del plano

que las contiene.

**Resolución**

r y s son coplanarias ⇔ ; A(1, 2, –1) ∈ r ;

 ; . En las ecuaciones de s

hacemos z = 0, ; ⇒

Simplificando y resolviendo, .

Obtenemos que

Además, como , entonces r y s son secantes:



El plano π que se pide tiene como vectores directores y

Un vector normal de π es . Y como π pasa por el punto

A(1, 2, –1) de r, entonces π: 11(x – 1) + 1(y – 2) + 9(z + 1) = 0 ⇒ π: 11x + y + 9z – 4 = 0

9.-

a) Determina a, b, c, d, e en la siguiente matriz sabiendo que su primera columna es un vector perpendicular a y a y también que se verifican  ,

**Resolución**

Como , entonces . Luego, b + 1 = 0, b = –1 y la 1ª columna es

Como , entonces . Luego, d + 3 = 0, d = –3 y la 1ª columna es

Veamos si se cumple la última igualdad:

Se cumple. Conclusión: a = 0, b = –1, c = –2, d = –3 y e = 0

b) Resuelve el sistema

**Resolución**

Como a = 0, b = –1, c = –2, d = –3 y e = 0, entonces el sistema es

Matriz del sistema

Como el menor, de A y de A\*, el menor , rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a , que corresponde al sistema .

La 2ª ecuación queda, 2 + 2y + 2z = 6 ; y + z = 2 ; y = 2 – z.

Llamando z = k, las infinitas soluciones son , con k ∈ R, (recta del espacio)

10.- Determina, de forma razonada un triángulo equilátero contenido en el plano π dado por la

ecuación π: 2x + y + z = 4, sabiendo que dos de sus vértices son los puntos A(1, 1, 1) y B(0, 2, 2)

**Resolución**

Si C es el tercer vértice, entonces

Teniendo en cuenta que C ∈ π, entonces C(a, b, 4 – 2a – b)

Luego,

Desarrollando y simplificando,

 ⇒

 ⇒ ;

Si , entonces

Si , entonces

Como vemos hay dos triángulos equiláteros

11.-

(a) ¿Es posible determinar una circunferencia conociendo las coordenadas de dos puntos

diametralmente opuestos? En caso afirmativo, describe un procedimiento.

**Resolución**

Sí. Si A y B son diametralmente opuestos, el centro C de la circunferencia sería el punto medio de A y B y

el radio sería la distancia de C a A.

(b) Calcula la ecuación de una circunferencia sabiendo que los puntos A(1, 2) y B(3, 4) son

diametralmente opuestos.

**Resolución**

El centro es . Es decir, C(2, 3) ; el radio es

La ecuación de la circunferencia es (x – 2)2 + (y – 3)2 = 2

12.- Para cada λ ∈ R se considera el plano πλ de ecuación

πλ: (1 + 2λ)x + (1 – λ)y + (1 + 3λ)z + (2λ – 1) = 0

(a) Prueba que todos los planos πλ pasan por una misma recta r.

**Resolución**

Operando, x + 2λx + y – λy + z + 3λz + 2λ – 1 ; x + y + z – 1 + λ(2x – y + 3z + 2)

Por tanto, πλ representa el haz de planos de base la recta

(b) Estudia la posición relativa de las rectas r y s, siendo s la recta dada por

**Resolución**

En r hacemos x = 0 y queda , . Luego, ∈ r

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen:

B(1, –1, 2) ∈ s ; un vector director de s es

Como , entonces r // s

(c) Describe un procedimiento para hallar la distancia entre ambas rectas.

**Resolución**

Como B(1, –1, 2) ∈ s, dist (r, s) = dist(B, r)



Una forma de hallar esa distancia es calcular el plano π ortogonal a r que pasa por B, luego el punto de corte, M, entre r y π y por último dist (r, s) = dist(B, r) =

13.- Halla el lugar geométrico de los puntos desde los que se ven los puntos A(5, 3, 4) y B(7, 1, 2)

bajo un ángulo recto. ¿Qué ﬁgura es dicho lugar?

**Resolución**

Si P(x, y, z) es del L.G., entonces ⇒

Desarrollando, x2 – 12x + 35 + y2 – 4y + 3 + z2 – 6z + 8 = 0 ⇒ x2 – 12x + y2 – 4y + z2 – 6z + 46 = 0

Usando las identidades notables quedaría

(x – 6)2 – 36 + (y – 2)2 – 4 + (z – 3)2 – 9 + 46 = 0 ⇒ (x – 6)2 + (y – 2)2 + (z – 3)2 = 3

que representa a la esfera de centro C(6, 2, 3) y radio

14.- Dada la recta , describe el procedimiento para obtener:

(a) una recta que corte a r (b) un plano que contenga a r (c) un plano perpendicular a r

y pon un ejemplo de lo que se pide en cada uno de los casos.

**Resolución**

(a) Una recta, s, que corte a r es aquella que pasa por un punto cualquiera A de r y tiene vector director no paralelo al de r.

Por ejemplo, si tomamos A(–1, 3, 0) de r y ⇒

(b) Tomamos un punto cualquiera P **∉** r , A ∈ r y . El plano π que contiene a r es el pasa por P y tiene vectores directores y

Por ejemplo, si tomamos P(0, 0, 0) **∉** r, A(–1, 3, 0) ∈ r , , un vector perpendicular a π es

Y como π pasa por P(0, 0, 0), π: 6(x ‒ 0) + 2(y – 0) – 11(z – 0) = 0 ⇒ π: 6x + 2y – 11z = 0

(c) Un plano, α, perpendicular a r es aquel que pasa por un punto cualquiera A de r y tiene vector normal cualquier vector paralelo al de r.

Por ejemplo, si tomamos A(–1, 3, 0) ∈ r y como vector normal a α

Y como α pasa por A(–1, 3, 0), α: 4(x + 1) – 1(y – 3) + 2(z – 0) = 0 ⇒ α: 4x – y + 2z + 7 = 0

15.- Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (4, 5, 0), es paralela al plano π cuya ecuación es x + 2y – 3z = 1 y corta a la recta r dada por

**Resolución**

El plano paralelo a π que pasa por P(4, 5, 0) es α: x + 2y – 3z = a

Sustituyendo las coordenadas de P en el plano, 4 + 2.5 – 3.0 = a ⇒ a = 14 y α: x + 2y – 3z = 14

Punto de corte de α y : 1 + k + 2(2 – k) – 3(2 – k) = 14, 2k = 15,

 . El punto de corte es . La recta s que se pide pasa por P(4, 5, 0) y tiene vector director . Luego,

16.- Los vectores determinan un paralelepípedo.

(a) Define el producto mixto de tres vectores y aplícalo razonadamente para el cálculo del volumen del paralelepípedo que determinan.

**Resolución**

Si  y  son vectores en el espacio cartesiano su **producto mixto**, representado como , se define como el producto escalar del primer vector  por el vector :

Es decir,



Como , entonces

(b) Halla el volumen del paralelepípedo formado por .

**Resolución**

(c) Calcula el seno del ángulo que forma el vector con la cara determinada por .

**Resolución**

Se pide sen α. Como y

 ,

17.- Tres planos cuyas ecuaciones son se cortan en una recta r.

(a) ¿Cuánto vale a?

**Resolución**

Matrices de coeficientes y ampliada del sistema: y

Para que los planos se corten en una recta debe ser el sistema compatible indeterminado y, por el

teorema de Rouché-Fröbenius, debe ser rg A = 2 = rg A\*. Al ser un sistema homogéneo, rg A = rg A\*.

Como , rg A ≥ 2. Para que sea 2 debe ser det A = 0

det A = 5a + 4 – 12a + 5a = 4 – 2a = 0 ⇔ a = 2. Luego, para a = 2 los planos se cortan en una recta

(b) Halla el punto P de la recta r para el cual se veriﬁca que la recta s que pasa por P y por el

punto (1, 9, 8) es perpendicular a r.

**Resolución**

a = 2, matriz del sistema:

Esto significa que los planos se cortan en la recta

P es el punto de corte del plano π perpendicular a r por el punto Q(1, 9, 8) con la recta r



Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la

definen: . Un vector normal de π es

Y como π pasa por Q(1, 9, 8), entonces π: –5(x – 1) + 7(y – 9) + 4(z – 8) = 0 ⇒ π: –5x + 7y + 4z – 90 = 0

Para hallar P resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de r y la de π:

La matriz del sistema es

que corresponde al sistema . Resolviendo, x = –5, y = 7, z = 4. El punto es P(–5, 7, 4)

18.- Estudia según los valores de λ la posición de los planos

**Resolución**

Matrices de coeficientes y ampliada: y

Al ser un sistema homogéneo, rg A = rg A\*.

- Si λ ≠ 0 ; λ ≠ –3, det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A\* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única (los planos se cortan en

un solo punto).

- Si λ = 0, . Como el sistema se reduce a una ecuación,

los planos son coincidentes.

- Si λ = –3, .

Como en el sistema la 2ª y 3ª ecuaciones son equivalentes, el 2º y tercer plano son coincidentes y el

primer plano los corta en una recta r que tiene de ecuaciones .

19.- Determina todos los puntos que equidistan de los planos, π1 y π2 dados por

π1: 3x – 4y – 1 = 0 y π2: 4x – 4y – 2z = 0 ¿Qué ﬁgura representan?

**Resolución**

Sea P(x, y, z) un punto que equidiste de π1 y π2. Usamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano:

dist (P, π1) = dist (P, π2) ⇒ ⇒

Luego, . Usando la definición de valor absoluto,

–9x + 12y + 3 = 10x + 10y + 5z ⇒ 19x – 2y + 5z – 3 = 0

 ó

–9x + 12y + 3 = –10x – 10y – 5z ⇒ x + 22y + 5z + 3 = 0

Geométricamente representa a dos planos del espacio

20.- Considera al plano π y la recta r dados por π: ax + 2y – 4z + b = 0,

(a) Halla todos los valores de a y b para los que r está incluida en π.

**Resolución**

A(3, 1, –3) ∈ r y un vector director de r es ; un vector normal de π es

r ⸦ π ⇔ y A ∈ π ⇔ 4a – 8 – 4 = 0, a = 3 y 3.3 + 2.1 – 4.(–3) + b = 0, b = –23

Conclusión: debe ser a = 3, b = –23

(b) ¿Existe algún valor de a y alguno de b para los que r es perpendicular a π? Razona la respuesta.

**Resolución**

r ⊥ π ⇔ ⇔ (imposible). Luego, r ~~⊥~~ π para ningún valor de a ni de b.

21.- Halla la ecuación del plano α que contiene a la recta y es perpendicular al plano π: x + 2y – 4z = 1.

**Resolución**



En r, haciendo y = 5, . Resolviendo, x = 2, z = 3 ; A(2, 5, 3) ∈ r

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: . Un vector normal de π es

El plano α que nos piden tiene como vectores directores y

Un vector normal de α es

Y como α pasa por A(2, 5, 3) ∈ r ⇒ α: 38(x – 2) – 9(y – 5) + 5(z – 3) = 0 ⇒ α: 38x – 9y + 5z – 46 = 0