1.-

(a) Prueba que la gráfica de la función f: R → R, definida por corta al eje OX en un punto del intervalo [0, 2].

**Resolución**

f es continua en R por ser una función racional y el denominador no anularse para ningún valor.

En particular, f es continua en [0, 2] y ,

Por el teorema de Bolzano, existe al menos un c ∈ (0, 2) tal que f(c) = 0.

Luego, la gráfica de f corta al eje OX al menos en el punto (c, 0).

(b) Contesta razonadamente si la gráfica de la función g, definida para x ≠ 1 y x ≠ –1

por corta al eje OX en algún punto del intervalo [0, 2].

**Resolución**

En este caso, g no es continua en [0, 2] por no ser continua en x = 1 (no está definida en x = 1)

Veamos si la gráfica de g corta al eje OX:

Luego, la gráfica de g no corta al eje OX.

2.-

(a) Determina si a la función f definida por , se le puede aplicar el del valor medio de Lagrange en el intervalo [1, 73].

**Resolución**

El teorema del valor medio de Lagrange dice:

Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe al menos un punto c ∈ (a, b) tal que f(b) – f(a) = f´(c)(b – a).

Sabemos que f es continua en R, en particular en [1, 73]. Sólo hace falta ver si f es derivable en [1, 73].

Como 9 – x = 0 ⇔ x = 9, para x ≠ 9 es derivable y

;

Luego, f NO es derivable en x = 9 ∈ (1, 73).

Conclusión: f NO verifica las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo [1, 73].

(b) ¿Existe algún punto de la gráfica de f en el que la recta tangente sea paralela, a la cuerda

de A(1, 2) y B(73, –4)? Razona la respuesta.

**Resolución**

Si a f se le pudiese aplicar el teorema del valor medio de Lagrange, automáticamente la respuesta sería sí.

La pendiente de la recta tangente en x = a es f´(a) y la de la cuerda es

Por tanto, hay dos puntos de abscisas, a = 1, a = 17

3.- Sea f: R → R la función dada por f(x) = |3x – | x – 2||. Se pide:

(a) Estudia su continuidad.

**Resolución**

f es continua en R por ser composición de funciones polinómicas y la función valor absoluto, que son continuas en R.

Aunque no se pide, vamos a expresar f como función definida a trozos usando la definición del valor absoluto:

Al ser entonces

Observa que 4x – 2 = 0 ⇔ y como 2x + 2 = 0 ⇔ x = –1, para x ≥ 2, |2x + 2| = 2x + 2.

Luego,

(b) Determina sus máximos y sus mínimos relativos.

**Resolución**

Para , f es derivable y . Hagamos una tabla de signos de f´(x):

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 2 | (2, +∞) |
| f´(x) | – | ∄ | + | ∄ | + |
| f(x) | decreciente | mínimo | creciente | creciente | creciente |

Mínimo relativo: , . Punto . No hay máximo relativo.

(c) Determina el área limitada por la gráfica de f, el eje OX, la recta x = 0 y la recta x = 2

**Resolución**

La semirrecta y = 2 – 4x, definida para , tiene el extremo en y además pasa por (0, 2)

El segmento y = 4x – 2, definido para , tiene de extremos y (2, 6)

La semirrecta y = 2x + 2, definida para , tiene el extremo en (2, 6) y además pasa por (3, 8)

Además, la recta x = 2 es la vertical que pasa por (2, 0) y la recta x = 0 es el eje Y.



El área que se pide es

es el área de un triángulo rectángulo de catetos y 2. Luego,

es el área de un triángulo rectángulo de catetos y 6. Luego,

Luego, el área es

También se puede hallar el área usando integrales:

. Una primitiva de la función integrando es .

Por la regla de Barrow,

. Una primitiva es .

Por la regla de Barrow,

Luego, el área es

4.- Sea f la función definida para x > –1 por

(a) Calcula f(1).

**Resolución**

. Haciendo la división obtenemos la forma mixta de la fracción: .

Una primitiva es . Por la regla de Barrow,

(b) ¿Es f derivable? Justifica la respuesta.

**Resolución**

La función es continua para t > –1. En particular, es continua en [0, x].

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral la función es derivable y se verifica que

(c) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

**Resolución**

⇒ por ser x > –1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| f´(x) | – | 0 | + |
| f(x) | decreciente | mínimo | creciente |

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

f es decreciente en y creciente en

5.- Considera la función f definida para x ≠ 1 por

(a) Calcula los límites de f(x) cuando x tiende a +∞ y cuando x tiende a –∞ ¿Tiene la gráfica de la función f asíntotas horizontales? ¿Cuáles son?

**Resolución**

Al ser entonces

. Luego, f tiene asíntota horizontal en +∞, que es la

recta de ecuación AH: . .

Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en +∞

. Luego, f tiene asíntota horizontal en –∞, que

es la recta de ecuación AH: . .

Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en +∞

(b) Halla el área de la región limitada por la gráfica de la función f, el eje OX, la recta x = –1 y la

recta x = 0.

**Resolución**

Si x ≠ 1, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables

siendo,

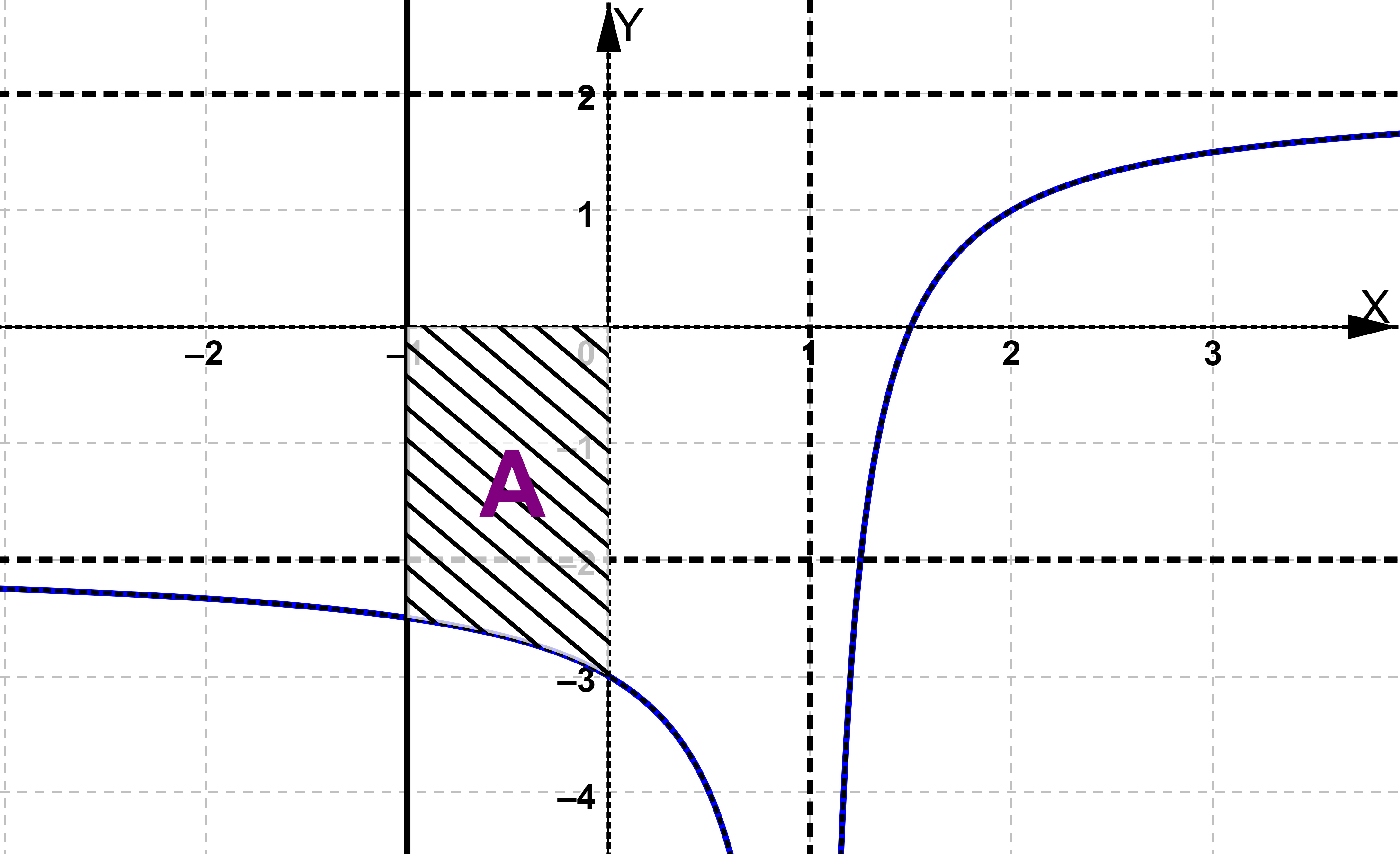
Como f no es continua en x = 1, entonces f no tiene extremos.

⇒ f tiene la asíntota vertical en x = 1, A.V. : x = 1

x = 0, , punto (0, –3) ; x = –1, , punto (–1 ; –2,5)

, punto (1,5 ; 0) ; x = 2, , punto (2, 1)

Además, la recta x = –1 es la vertical que pasa por (–1, 0) y la recta x = 0 es el eje Y.



El área que se pide es . Haciendo la división

obtenemos la forma mixta de la fracción: .

. Una primitiva es .

Por la regla de Barrow,

6.- Sea f: R → R la función continua que verifica , para x ≠ 0

(a) Determina f(0).

**Resolución**

Aunque no existe f(0), se puede definir Indeterminación.

Aplicamos la regla de L´Hôpital:

Por la regla de L´Hôpital, f(0) = 1 y nos quedaría

(b) Prueba que f es derivable en el punto 0.

**Resolución**

Indeterminación.

Aplicamos la regla de L´Hôpital: Indeterminación.

Aplicamos de nuevo la regla de L´Hôpital:

Por la regla de L´Hôpital, f es derivable en x = 0 siendo f´(0) = 0

(c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto.

**Resolución**

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto A(x0, f(x0))

es rtg: y = f´(x0)(x – x0) + f(x0). En este caso, x0 = ; ; .

La recta tangente es

7.- Si una función f: [a, b] → R, es integrable, se llama valor medio de f en el intervalo [a, b] al

número

(a) Encuentra el valor medio de la función f definida por f(x) = x cos x en el intervalo [0, π/2].

**Resolución**

El valor medio es . Para encontrar una primitiva usamos la integración por partes: ⇒ .

Una primitiva es . Por la regla de Barrow,

(b) Determina razonadamente, y sin calcular la integral, si el valor medio de la función g definida

por  es mayor o menor que el de f en el intervalo [0, π/2].

**Resolución**

La función g(x) es menor que la función f(x) en el intervalo [0, π/2], porque el denominador de g(x) es mayor que 1 (vale 1 sólo en x = 0). Luego el área encerrada por g(x) es menor que el área encerrada

por f(x). Por tanto, el valor medio es menor.

8.- Recuerda que se llama punto crítico de una función a todo aquel valor en el que se anula su derivada.

Razona si son o no correctas las siguientes afirmaciones hechas sobre una función derivable f: R → R.

Si alguna no lo es, pon un ejemplo.

(a) Si x0 es un punto crítico de f, entonces también lo es de la función g definida por g(x) = (f(x))2.

**Resolución**

Como x0 es un punto crítico de f entonces f´(x0) = 0. Luego, como g´(x) = 2f(x)f´(x), resulta que

g´(x0) = 2f(x0)f´(x0) = 2f(x0).0 = 0. Por tanto, x0 también es punto crítico de g(x).

(b) Si f toma valores no negativos y x0 es un punto crítico de f, entonces también lo es de la

función h definida por

**Resolución**

. Luego, . Por tanto, x0 también es punto crítico de h(x).

(c) Si f toma valores no negativos y x0 es un punto crítico de la función h definida en el apartado anterior,

entonces también lo es de f.

**Resolución**

Al ser x0 un punto crítico de h, ⇒ x0 también es punto crítico de f(x).

9.- Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f definida por f(x) = 2 – x2 y

sus tangentes en los puntos de abscisa x = –1 y x = 1.

**Resolución**

, f(0) = 2 – 02 = 2 ; f´(x) = –2x = 0 ⇔ x = 0.

La gráfica de f es una parábola cóncava de vértice (0, 2) y que corta al eje X en

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto A(x0, f(x0))

es rtg: y = f´(x0)(x – x0) + f(x0). En este caso, f(x) = 2 – x2 ; f´(x) = –2x

Para x0 = ; ; .

La recta tangente es

Para x0 = ; ; .

La recta tangente es

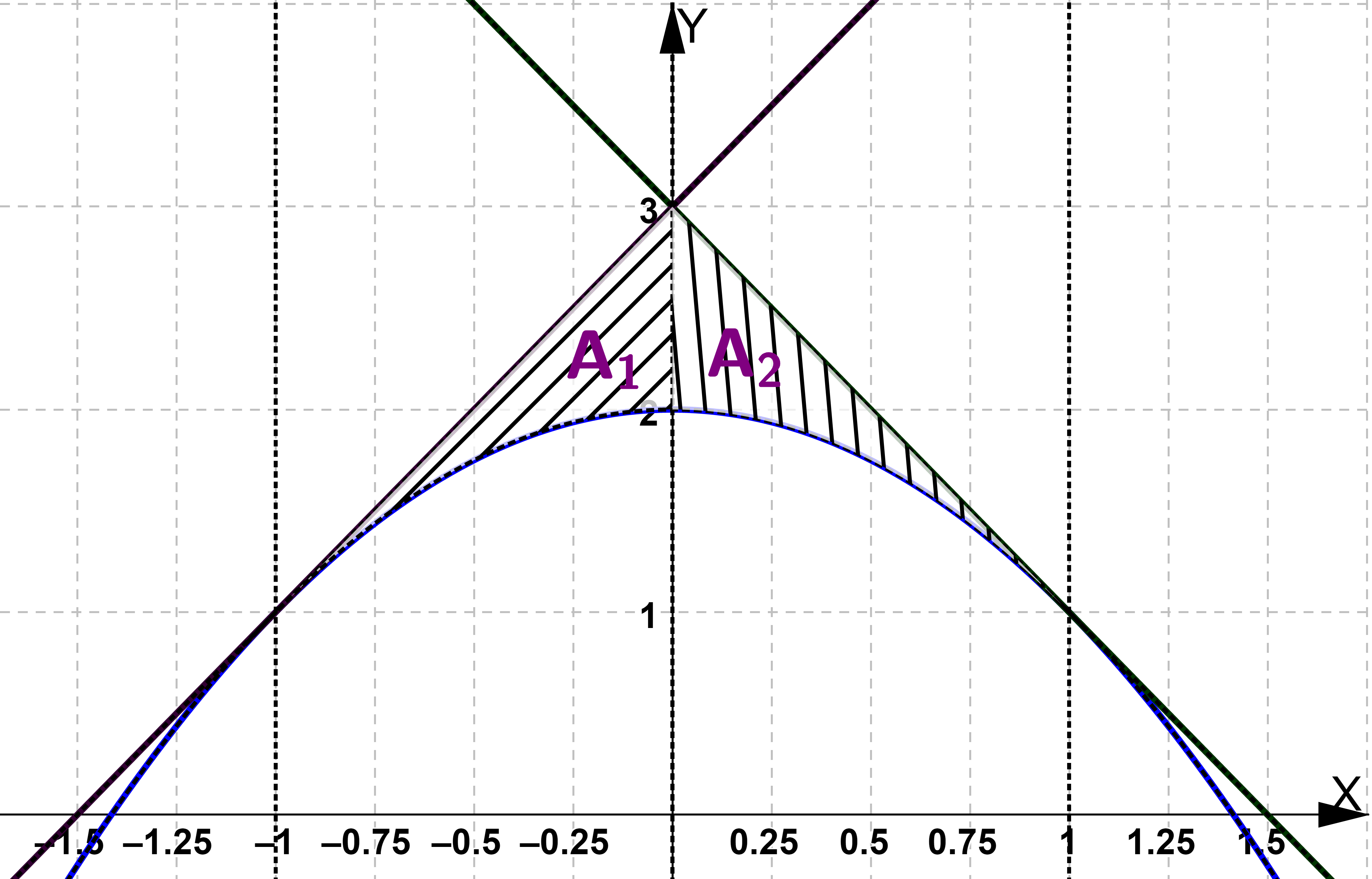
Hallamos los puntos de corte entre la parábola y las rectas tangentes y entre la rectas tangentes:

⇒ (1, –2)

⇒ (–1, 1)

⇒ (0, 3)

La región cuya área se pide es:



Por simetría A1 = A2. El área es

Una primitiva es

Por la regla de Barrow,

10.- De una función f: R → R, se sabe que es derivable. También se sabe que halla f(1) justificando la respuesta.

**Resolución**

Como f es derivable, en particular, es continua en x = 1.

Al ser , entonces por continuidad en x = 1,

11.- Dada la función f: R → R, definida por f(x) = |x2 + 2x – 3|, se pide:

(a) Razona en qué puntos f es derivable y en cuáles no lo es.

**Resolución**

f es continua en R por ser composición de funciones continuas (polinómica y valor absoluto)

x2 + 2x – 3 = 0 ⇔ y al ser y = x2 + 2x – 3 una parábola

convexa entonces

Si x ≠ –3, x ≠ 1 f es derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo

⇒ f NO es derivable en x = –3

⇒ f NO es derivable en x = 1.

Luego, f es derivable en R – {–3 ; 1} y no es derivable en x = –3 ni en x = 1

(b) Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de f.

(c) Haz una representación gráfica de dicha función.

**Resolución**

;

. Hagamos una tabla de signos de f´(x):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | (–∞, –3) | –3 | (–3, –1) | –1 | (–1, 1) | 1 | (1, +∞) |
| f´(x) | – | ∄ | + | 0 | – | ∄ | + |
| f(x) | decreciente | mínimo | creciente | máximo | decreciente | mínimo | creciente |

Máximo relativo: , . Punto

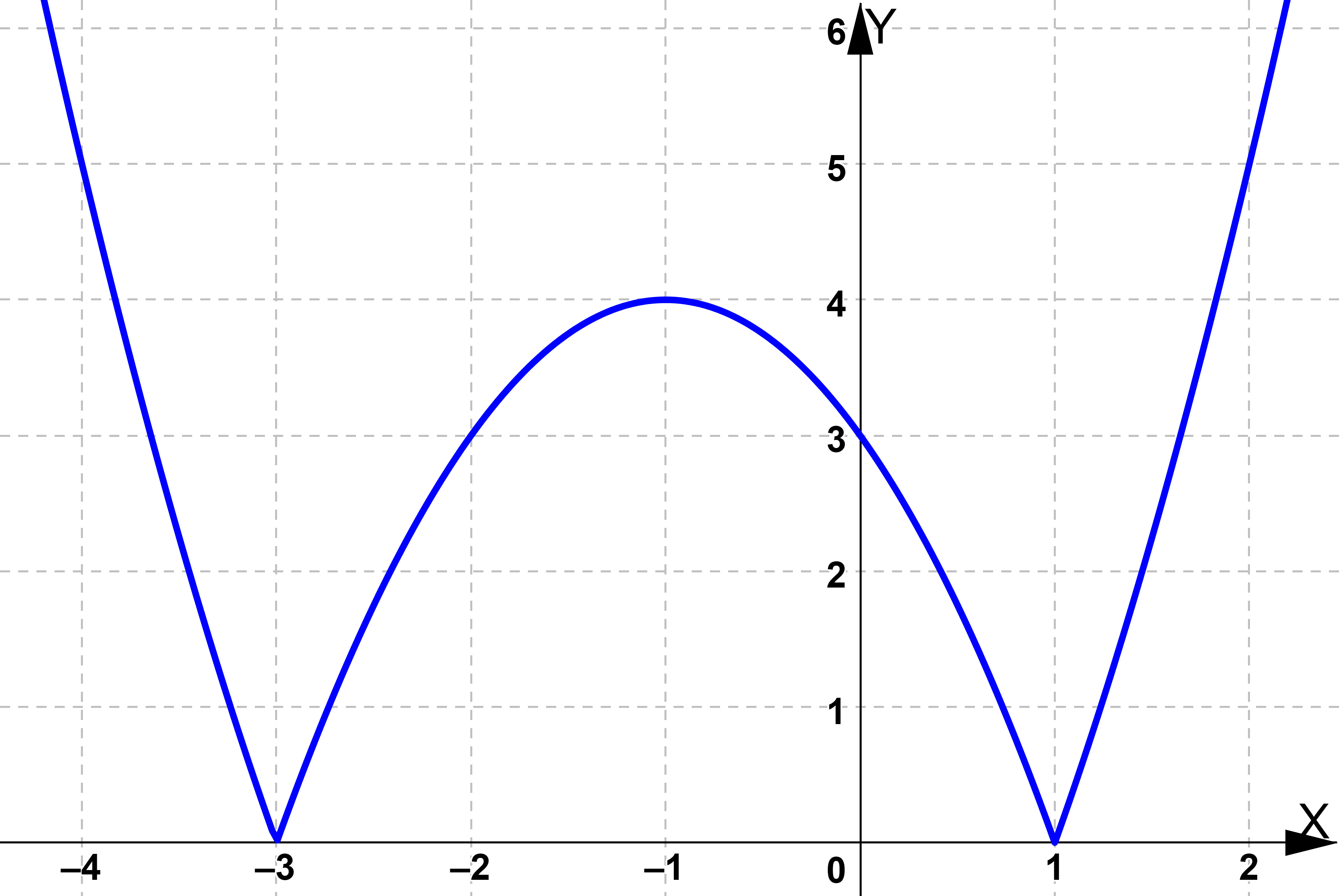
Y como , no hay máximo absoluto.

Mínimos relativos:

, . Punto

, . Punto

Y como f(x) ≥ 0, estos mínimos relativos también son absolutos.



12.-

(a) Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral.

**Resolución**

Si f es continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces la función , es derivable y su derivada es F´(x) = f(x)

(b) Prueba como aplicación de dicho teorema que la función definida por

es continua en el punto 0.

**Resolución**

;Indeterminación.

La función es derivable en R con (por el teorema fundamental del cálculo integral) y la función b(x) = x2 es derivable en R con b´(x) = 2x

Veamos si podemos aplicar la regla de L´Hôpital: Indeterminación.

De nuevo la regla de L´Hôpital:

Se puede aplicar y se obtiene que

Al ser concluimos que f es continua en x = 0

13.-

(a) Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange.

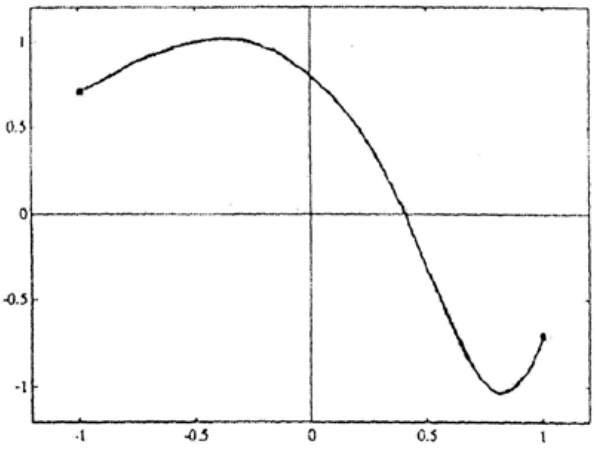
**Resolución**

Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe al menos un punto c ∈ (a, b) tal que

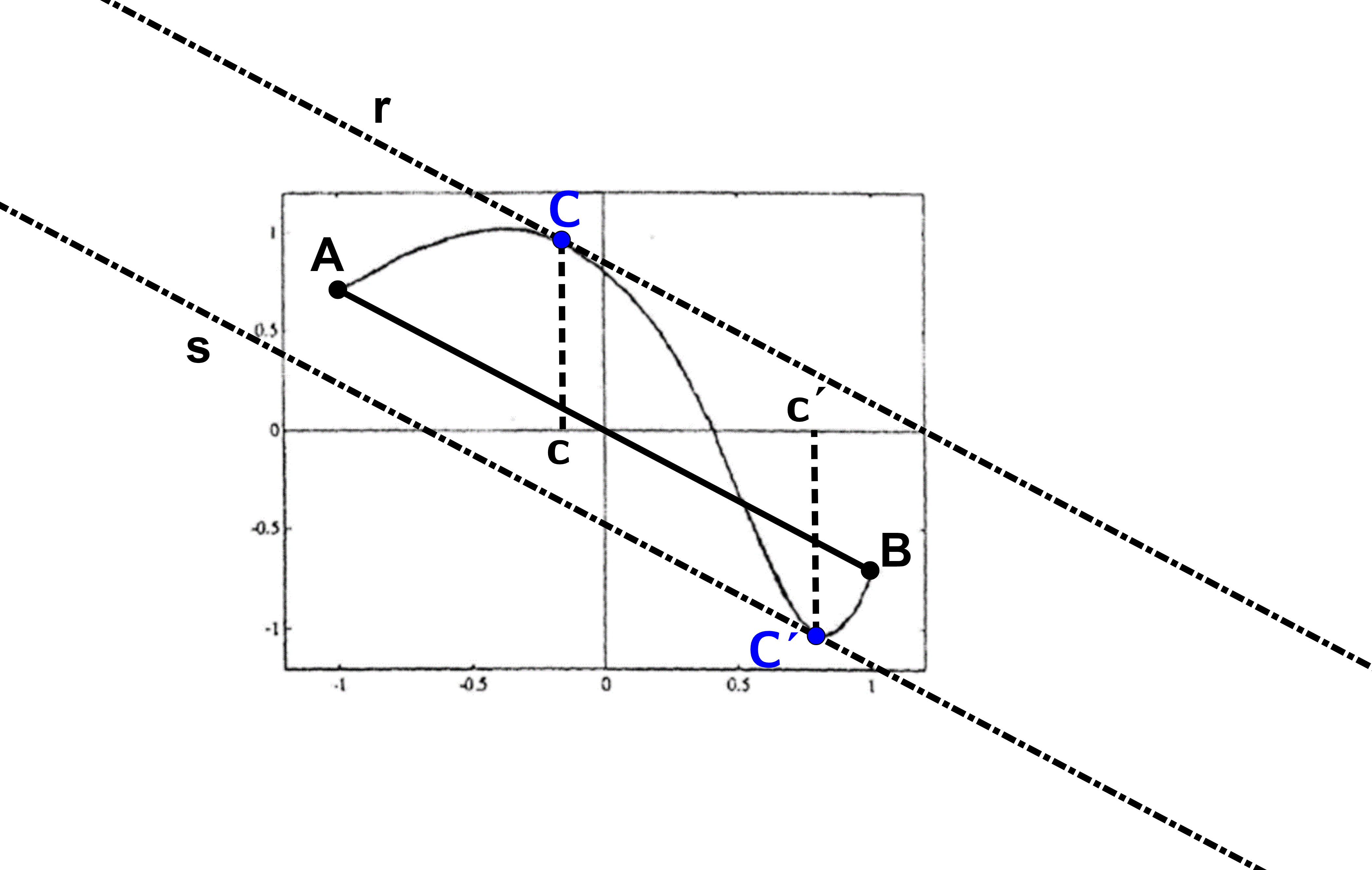
Geométricamente significa que hay un punto c ∈ (a, b) tal que la pendiente de la recta tangente en x = c es paralela al segmento AB, siendo A(a, f(a)), B(b, f(b))

(b) Copia la siguiente figura e indica, de manera aproximada, la localización de alguno de los puntos cuya

existencia garantiza dicho teorema en el intervalo [–1, 1].



**Resolución**



En el dibujo, aproximadamente, A(–1 ; 0,7) , B(1 ; –0,7), r y s la tangentes a la gráfica en x = c, x = c´.

En este caso hay 2 puntos en la tesis del teorema, que son c ≅ –0,2 y c´≅ 0,8

(c) Si definimos f en [–1, 1] por halla el valor de a para el que f cumple las hipótesis del teorema citado en el apartado (a)

**Resolución**

Tenemos que hallar el valor del parámetro “a” para que f sea continua en [–1, 1] y derivable en (–1, 1)

Para x ≠ 0, f es continua y derivable independientemente del valor de a por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo

Como , entonces f también es continua en x = 0

para cualquier valor del parámetro a.

Por ser derivable en x = 0,

Conclusión: para que f cumpla las hipótesis del teorema debe ser a = 1

14.- Se considera la función f: R → R definida por f(x) = |x2 – 3x + 2|.

(a) Estudia su continuidad y su derivabilidad.

**Resolución**

f es continua en R por ser composición de funciones continuas (polinómica y valor absoluto)

x2 – 3x + 2 = 0 ⇔ y al ser y = x2 – 3x + 2 una parábola

convexa entonces

Si x ≠ 1, x ≠ 2 f es derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo

⇒ f NO es derivable en x = 1

⇒ f NO es derivable en x = 2

Conclusión: f es continua en R y derivable en R – {1 ; 2}

(b) Calcula .

**Resolución**

Por la propiedad de aditividad de la integral definida respecto al intervalo de integración nos queda:

Para I1, una primitiva de la función a integrar es .

Por la regla de Barrow,

Para I2, una primitiva de la función a integrar es .

Por la regla de Barrow,

Luego,

15.- Dada la función f: R → R definida por f(x) = x2 + 1, halla la ecuación de la recta que pasa por el

punto (1, 0) y es perpendicular a la recta tangente a la gráfica de f en el punto (3, 10).

**Resolución**

La ecuación de la recta tangente en un punto A(x0, f(x0)) es rtg: y = f´(x0)(x – x0) + f(x0).

En este caso, x0 = 3 ; f´(x) = 2x ; ; .

La recta perpendicular, r, que se pide tiene pendiente .

Y como pasa por (1, 0) su ecuación es

16.- De una función f: R → R se sabe que f(0) = 1, que f es derivable y que f´(x) = f(x) para todo x ∈ R.

Prueba que la función h definida por h(x) = e–x f(x) es constante en R, hallando el valor de dicha

constante, y deduce como consecuencia que f es la función exponencial.

**Resolución**

h es derivable por ser producto de funciones derivables siendo

h´(x) = –e–xf(x) + e–xf´(x) = e–x[–f(x) + f´(x)] = e–x[–f(x) + f(x)] = 0. Por tanto, h es constante en R.

h(x) = e–xf(x) = k ⇒ f(x) = kex. Y como f(0) = 1, entonces 1 = ke0 = k y f(x) = 1.ex = ex.

17.-

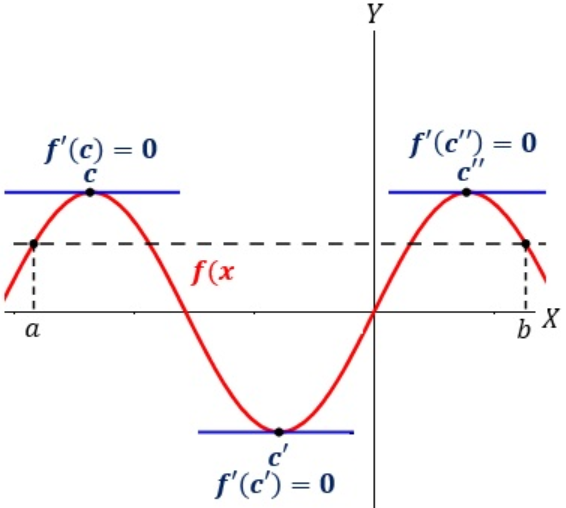
(a) Enuncia el teorema de Rolle e interprétalo geométricamente.

**Resolución**

Si f es continua en [a, b], derivable en (a, b) y además f(a) = f(b) entonces existe por lo menos

un c ∈ (a, b), tal que f´(c) = 0.

Geométricamente, significa que existe al menos un punto c ∈ (a, b) en el que la recta tangente en (c, f(c)) es paralela al eje OX, es decir su pendiente f´(c) es cero.



(b) Estudia si la función f: R → R definida por verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [–2, 0].

(c) ¿Verifica la función f definida en el apartado (b) la conclusión del teorema de Rolle en el intervalo dado? Justifica la respuesta.

**Resolución**

Hay que probar que f es continua en [–2, 0], derivable en (–2, 0) y además f(–2) = f(0)

Como 1 + x = 0 ⇔ x = –1, usando la definición del valor absoluto,

Si x ≠ –1, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Para x ≠ –1,

⇒ continua en x = –1. Luego, f es continua en [–2, 0].

f NO es derivable en x = –1.

Luego, f NO es derivable en (–2, 0). Por tanto, f NO cumple las hipótesis del teorema de Rolle en [–2, 0]

y no existe ningún c ∈ (–2, 0), tal que f´(c) = 0. Observa que

18.- Estudia, según los valores de a y b, la continuidad y la derivabilidad de la función f definida

por

**Resolución**

Para x ≠ 0, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo

Para que sea continua en x = 0 debe ser

Para que sea derivable en x = 0 debe ser

Conclusión: Para a = 1 y b ∈ R f es continua y si a = b = 1 f es derivable.

19.-

(a) Halla las ecuaciones de todas las rectas que pasan por el punto (0, 0) y son tangentes a la

curva y = 2x2 + 6x + 8.

**Resolución**

Consideremos f(x) = 2x2 + 6x + 8, f´(x) = 4x + 6. Las tangentes a la curva en un punto P(a, f(a)) son de la forma rtg: y = f´(a)(x – a) + f(a).

Como deben pasar por el (0, 0) entonces 0 = f´(a)(0 – a) + f(a) ⇒ f(a) = af´(a).

Sustituyendo, 2a2 + 6a + 8 = a(4a + 6) = 4a2 + 6a ⇒ 2a2 – 8 = 0 ⇒ a2 = 4 ⇒ a = 2 ó a = –2

Si a = 2, f(a) = f(2) = 2.22 + 6.2 + 8 = 28, f´(a) = f´(2) = 4.2 + 6 = 14

rtg: y = 14(x – 2) + 28 ⇒ rtg: y = 14x

Si a = –2, f(a) = f(–2) = 2.(–2)2 + 6.(–2) + 8 = 4, f´(a) = f´(–2) = 4.(–2) + 6 = –2

rtg: y = –2(x + 2) + 4 ⇒ rtg: y = –2x

(b) Sea f: R → R la función definida por f(x) = 3x + 6. ¿Tiene f alguna función primitiva que tome el

valor 1 cuando x = 2? Justifica la respuesta.

**Resolución**

Las primitivas de f viene dadas por

Si F(2) = 1, entonces .

Por tanto, la primitiva que se busca es

20.- Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función f: R → R definida por

y la recta tangente a la misma en el punto P(2, 1).

**Resolución**

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto A(x0, f(x0))

es rtg: y = f´(x0)(x – x0) + f(x0). En este caso, x0 = y para x ≠ 1,

; ; ;

Observamos que (f es creciente)

y f(0) = –1. La gráfica de f corta a los ejes en (1, 0) y (0, –1).

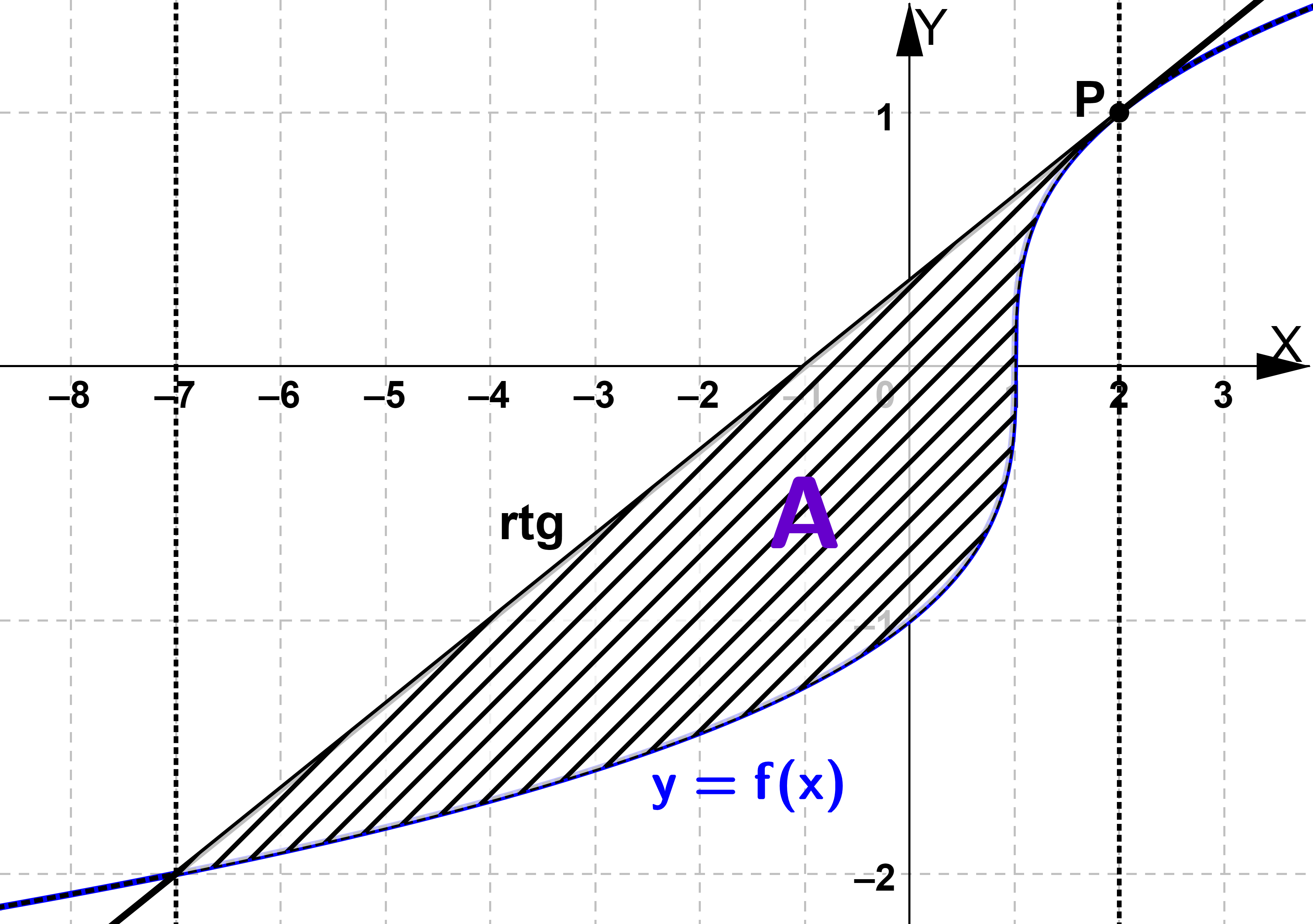
Para la recta tangente corta a los ejes en (–1, 0) y

Corte de la recta tangente y la gráfica de f: ;

x3 + 3x2 + 3x + 1 = 27x – 27 ⇒ x3 + 3x2 – 24x + 28 = 0. Usando Ruffini,

queda (x – 2)(x2 + 5x – 14) = 0 ; x = 2 , x2 + 5x – 14 = 0 ;

x = 2, ; punto P(2, 1) x = –7, ; punto (–7, –2)



El área que se pide es . Una primitiva es

. Por la regla de Barrow,

.

21.-

(a) Halla la recta, r que corta perpendicularmente a la curva de ecuación y = ln(1 + x2) (siendo ln x el logaritmo neperiano de x) y a la recta y = 1 + x.

**Resolución**

f(x) = ln(1 + x2) ; . Como la recta r que se pide es perpendicular a la vez a la curva y a la

recta y = 1 + x y la pendiente de la recta normal a la gráfica de una función f en un punto A(a, f(a)) es

, entonces , f´(a) = 1 ⇒

La ecuación de la recta normal que se pide en un punto A(a, f(a)) es .

a = 1, ; f(a) = f(1) = ln(1 + 12) = ln 2 ; ;

(b) Halla el área del recinto limitado por la recta r, la curva y = ln(1 + x2) y los ejes coordenados en el

primer cuadrante.

**Resolución**

f(x) = ln(1 + x2) = 0 ⇔ 1 + x2 = 1 ⇔ x = 0 y f(0) = ln(1 + 02) = 0. La curva corta a los ejes en (0, 0).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | (–∞, 0) | 0 | (0, +∞) |
| f´(x) | – | 0 | + |
| f(x) | decreciente | mínimo | creciente |

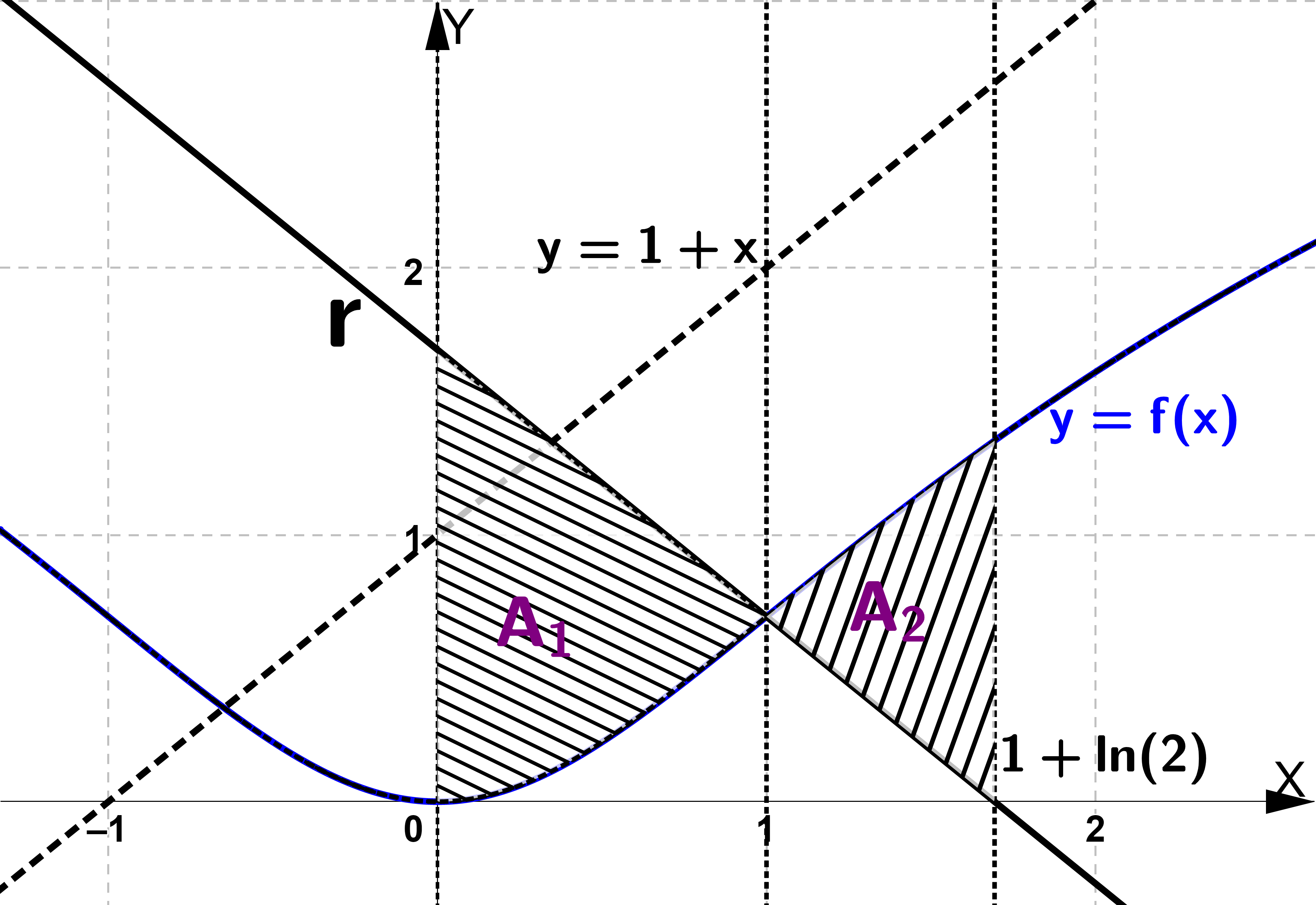
⇔ x = 0.

Mínimo relativo: x = 0, y = 0. Punto (0, 0). No hay máximo ;

Sabemos del (a) que la recta r y la curva se cortan en (1, ln 2).

0 = –x + 1 + ln 2 ⇔ x = 1 + ln 2 ≅ 1,7 y para x = 0, y = 0 + 1 + ln 2 = 1 + ln 2 ≅ 1,7.

La recta r corta a los ejes en (1,7 ; 0) y (0 ; 1,7)



El área que se pide es

Vamos a hallar una primitiva de ln(1 + x2) usando la integración por partes:

Una primitiva de es

.

Luego, una primitiva de es “–p(x)”.

Por la regla de Barrow,

Por tanto, el área es

22.- Sea f la función dada por para |x| ≠ 1.

(a) Determina sus asíntotas.

**Resolución**

x2 – 1 = 0 ⇔ x = –1 , x = 1

⇒ f tiene una asíntota vertical en x = –1 cuya ecuación

es A.V. : x = –1. Además, y

⇒ f tiene una asíntota vertical en x = 1 cuya ecuación

es A.V. : x = 1. Además, y

Por otra parte, ⇒ f NO tiene asíntota horizontal en ±∞.

Veamos si tiene asíntota oblicua, AO: y = mx + n ;

Luego, la asíntota oblicua en ±∞ es la recta de ecuación AO:

Estudiemos la posición de la gráfica respecto de la asíntota: .

. Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en +∞

. Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en –∞

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(c) Realiza un esbozo de su gráfica.

**Resolución**

⇒ x4 – 3x2 = x2(x2 – 3) = 0

x = 0 ó . Hagamos una tabla de signos de f´(x):

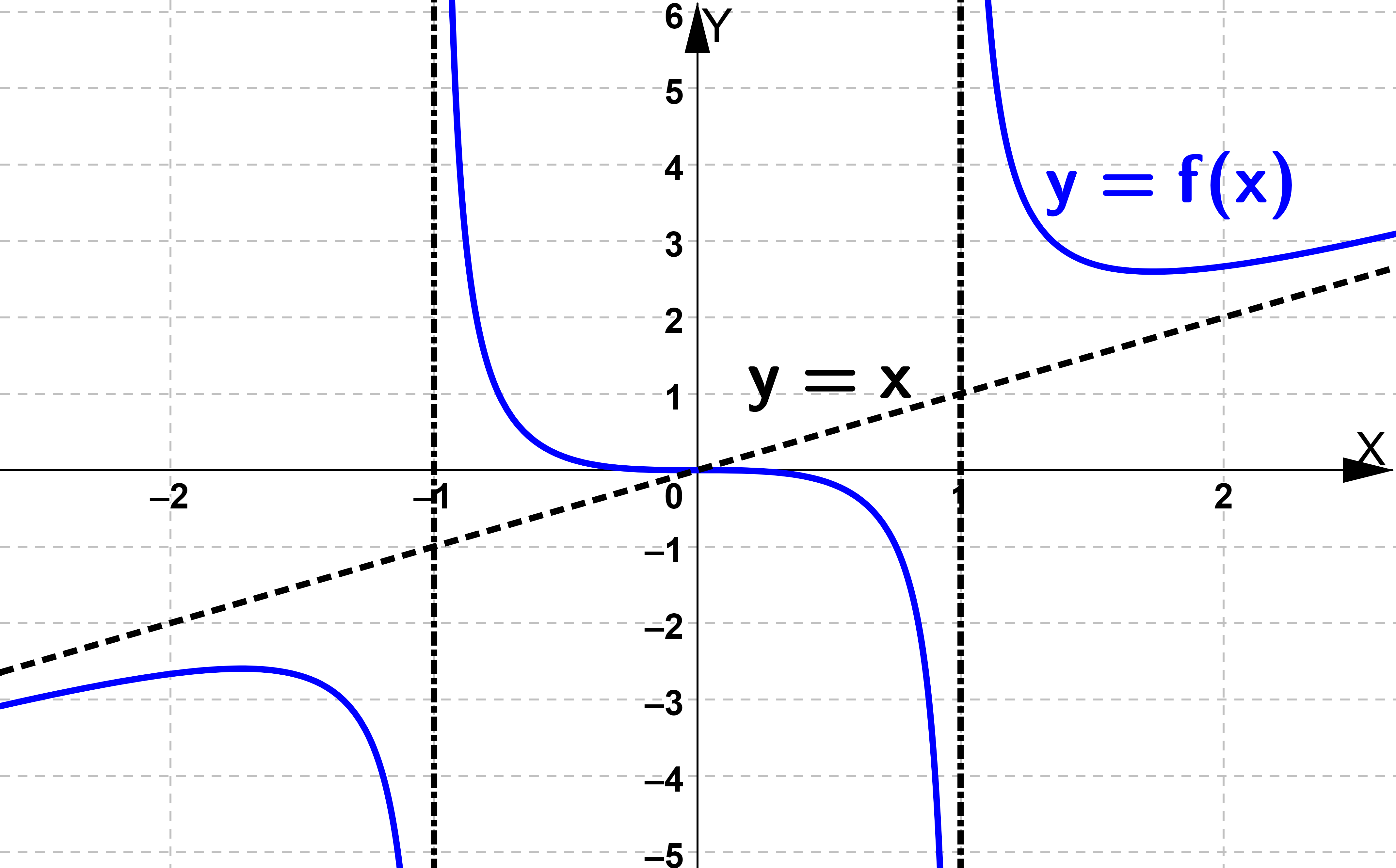
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | –1 | (–1, 0) | 0 | (0, 1) | 1 |  |  |  |
| f´(x) | + |  | – |  | – |  | – |  | – |  | + |
| f(x) | crec. | máximo | decrec. |  | decrec. |  | decrec. |  | decrec. | mínimo | crec. |

f es creciente en y decreciente en

Máximo relativo: , . Punto .

Mínimo relativo: , . Punto .

y , la gráfica de f sólo corta a los ejes en (0, 0)



23.- Sea f: [0, 3] → R la función definida por

(a) Determina la función F definida, por , x ∈ [0, 3], y comprueba que F es continua en el intervalo [0, 3].

(b) Estudia la derivabilidad de F en x = 1.

**Resolución**

Si x ≠ 1, x ≠ 2, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo

⇒ f es continua en x = 1.

⇒ f es continua en x = 2.

Luego, f es continua en [0, 3]. Por el teorema fundamental del Cálculo Integral, como f es continua

en [0, 3] entonces es derivable en [0, 3], en particular F es continua en [0, 3] y F es derivable en x = 1.

Además, F´(x) = f(x), es decir, F es una primitiva de f.

Como ⇒ ⇒ a = 0

Por ser F es continua en x = 1, x = 2:

⇒

⇒

La función primitiva es entonces ;

24.-

(a) Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange.

**Resolución**

Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe al menos un punto c ∈ (a, b) tal que

Geométricamente significa que hay un punto c ∈ (a, b) tal que la pendiente de la recta tangente en x = c es paralela al segmento AB, siendo A(a, f(a)), B(b, f(b))

(b) Aplica dicho teorema para probar que existe un punto P de la gráfica de la función f: R → R, definida por f(x) = 4x2 – 1, tal que la tangente a dicha gráfica en P es paralela a la recta que pasa por los

puntos A(1, 3) y B(1,5 ; 8).

(c) Prueba que en el ejemplo del apartado anterior el punto P es único y determínalo.

**Resolución**

La función f(x) = 4x2 – 1 es continua y derivable en R por ser una función polinómica.

En particular, f es continua en [1 ; 1,5] y derivable en (1 ; 1,5). Por el teorema del valor medio de Lagrange, existe al menos un punto c ∈ (1 ; 1,5) tal que

Observa que f(1,5) = 4.1,52 – 1 = 8 , f(1) = 4.12 – 1 = 3 y como f´(x) = 8x, entonces f´(c) = 8c.

Por tanto, pendiente de la tangente a f en P(c, f(c)) = = pendiente de la recta AB

Luego, (solución única) ; f(c) = f(1,25) = 4.1,252 – 1 = 5,25.

Resumiendo, existe un único punto, P(1,25 ; 5,25), de la gráfica de f, tal que la tangente a dicha gráfica

en P es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B.

25.-

(a) Enuncia el teorema de Bolzano.

(b) Prueba que la función f: R → R definida por f(x) = sen x – cos2x + 1 toma el valor 1 en algún punto del intervalo [0, π/2].

**Resolución**

Teorema de Bolzano: Si g es continua en [a, b] y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un c ∈ (a, b), tal que g(c) = 0.

La función g(x) = f(x) – 1 = sen x – cos2x es continua en R, por suma/resta de funciones continuas.

En particular, g es continua en [0, π/2].

Además, g(0) = sen 0 – cos20 = –1 < 0 , g(π/2) = sen(π/2) – cos2(π/2) = 1 > 0.

Por el teorema de Bolzano, existe por lo menos un c ∈ (0, π/2), tal que g(c) = f(c) – 1 = 0 ⇒ f(c) = 1.

Es decir, f toma el valor 1 en al menos un punto del intervalo [0, π/2]

26.- Considera la función f definida por para x ≠ 0

(a) Determina las asíntotas de f y esboza su gráfica.

**Resolución**

ex – 1 = 0 ⇔ ex = 1 ⇔ x = 0 ; ⇒ f tiene una asíntota vertical en x = 0 de ecuación A.V. : x = 0 (eje Y)

Además, y

. Indeterminación. Usamos la regla de L´Hôpital:

⇒ .

No hay asíntotas horizontales en +∞

Veamos si tiene asíntota oblicua en +∞, AO: y = mx + n

. Indeterminación. Usamos la regla de L´Hôpital:

. Indeterminación. Usamos de nuevo la regla de L´Hôpital:

porque 4ex es un infinito de orden

superior al de 2 + x. Luego, y tampoco hay asíntota oblicua en +∞

. Luego, hay asíntota horizontal en –∞, AH: y = 0 (eje X)

Estudiemos la posición de la gráfica respecto de la asíntota:

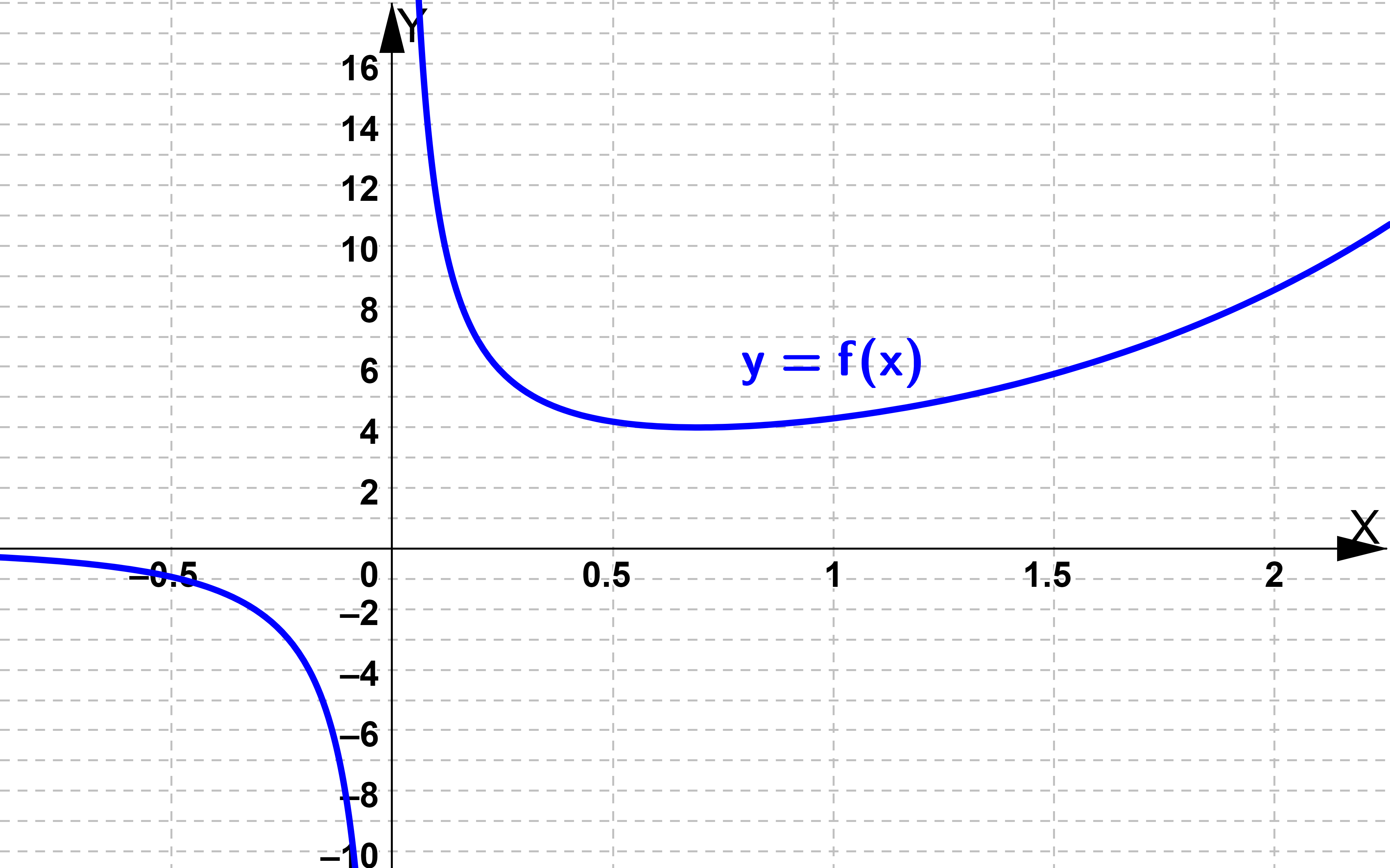
. Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en –∞

,

Si x < ln 2, f´(x) < 0 (f decreciente) y si x > ln 2, f´(x) > 0 (f creciente) ; mínimo relativo en x = ln 2.

Además, como , si x < 0, f(x) < 0 y si x > 0, f(x) > 0.

Un esbozo de la gráfica sería:



(b) Usa el cambio de variable t = ex para hallar

**Resolución**

Sea . Haciendo el cambio ; despejando, .

Una primitiva es . Por la regla de Barrow

27.- Considera la función f: R → R definida por

(a) Estudia su derivabilidad en x = 0.

(b) Estudia su derivabilidad en x = π/2.

(c) Calcula su función derivada.

**Resolución**

Si x ≠ 0, x ≠ π/2 f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo

Luego, f es continua en x = 0

Luego, f NO es derivable en x = 0

Luego, f NO es continua en x = π/2.

Por tanto, tampoco es derivable

Conclusión: f es continua en R – {π/2} y derivable en R – {0 ; π/2} con

28.- De dos funciones F: R → R y G: R → R se sabe que son derivables y que para cada x ∈ R se

tiene F´(x) = G´(x). También se sabe que F(0) = 3 y G(0) = 6. Halla [F(33) – G(33)]2 y razona la

respuesta.

**Resolución**

Sabemos que F y G se diferencian en una constante. Luego, F(x) = G(x) + k.

Como F(0) = 3 y G(0) = 6, tenemos F(0) = G(0) + k, de donde 3 = 6 + k ⇒ k = –3.

Por tanto, F(x) = G(x) – 3 ⇒ F(x) – G(x) = – 3 ⇒ [F(33) – G(33)]2 = (–3)2 = 9

29.-

(a) Prueba que la ecuación x3 – 3x2 + 9x – 8 = 0 posee sólo una solución real.

(b) Especifica un intervalo de longitud 0,5 que contenga dicha solución.

**Resolución**

Para probar que la ecuación tiene solución vamos a usar teorema de Bolzano, que dice: si f es continua en [a, b] y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un c ∈ (a, b), tal que f(c) = 0.

Tomamos f(x) = x3 – 3x2 + 9x – 8 que cumple

f(1) = 13 – 3.12 + 9.1 – 8 = –1 < 0 y f(1,5) = 1,53 – 3.1,52 + 9.1,5 – 8 = 2,125 > 0

f es continua en R por ser el resultado de operar con funciones continuas, en particular lo es en [1 ; 1,5].

Por el teorema de Bolzano existe al menos un c ∈ (1 ; 1,5) tal que f(c) = 0, es decir, c3 – 3c2 + 9c – 8 = 0.

Luego, c es una solución de la ecuación.

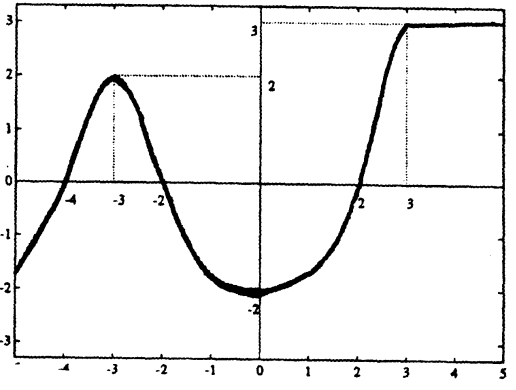
Para probar que la solución es única vamos a usar el teorema de Rolle, que dice: si f es continua en [a, b], derivable en (a, b) y además f(a) = f(b) entonces existe por lo menos un k ∈ (a, b), tal que f´(k) = 0.

Si hubiese dos raíces, a y b, entonces f(a) = f(b) = 0 y, por el teorema de Rolle, existiría un k ∈ (a, b) tal que f´(k) = 0.

Como f´(x) = 3x2 – 6x + 9 = 3(x2 – 2x + 3) = 0 ⇔ (imposible) y la gráfica de f´es una parábola convexa, debe ser f´(x) > 0 entonces f´(k) > 0 (f es creciente)

Conclusión: Hay solo una solución en el intervalo (1 ; 1,5), que tiene una amplitud de 0,5 unidades.

30.- De una función f: [–5, 5] → R se sabe que la gráfica de su función derivada f´ es la siguiente:



(a) Determina de forma razonada los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(b) Di cuáles son los puntos críticos de f y determina de forma razonada si en cada uno de ellos la

función f alcanza un máximo o un mínimo relativo.

**Resolución**

f´(x) = 0 ⇔ x = –4, x = –2, x = 2 pues la gráfica de f´ corta al eje X en (–4, 0), (–2, 0) y (2, 0)

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | (–5, –4) | –4 | (–4, –2) | –2 | (–2, 2) | 2 | (2, 5) |
| f´(x) | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | decreciente | mínimo | creciente | máximo | decreciente | mínimo | creciente |

Luego, f es decreciente en (–5, –4) ∪ (–2, 2) y creciente en (–4, –2) ∪ (2, 5)

Puntos críticos: Máximo relativo: x = –2 Mínimos relativos: x = –4, x = 2

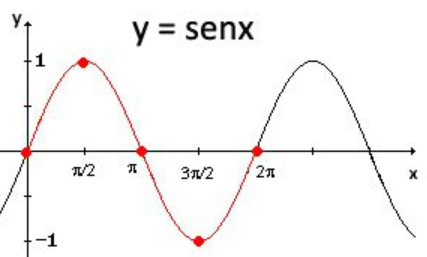
31.-

(a) Si f es una función continua en un intervalo [a, b] y no es idénticamente nula en dicho intervalo,

¿puede ser ? Pon un ejemplo que aclare la cuestión.

**Resolución**

Sí. Por ejemplo, la función f(x) = sen x = 0 en el intervalo [0, 2π]:



. Una primitiva de f es F(x) = –cos x. Por la regla de Barrow,

(b) Dibuja la región limitada por la parábola de ecuación y2 = 2x + 4 y la recta que pasa por los

puntos (–2, 0) y (6, 4) y calcula el área de dicha región.

**Resolución**

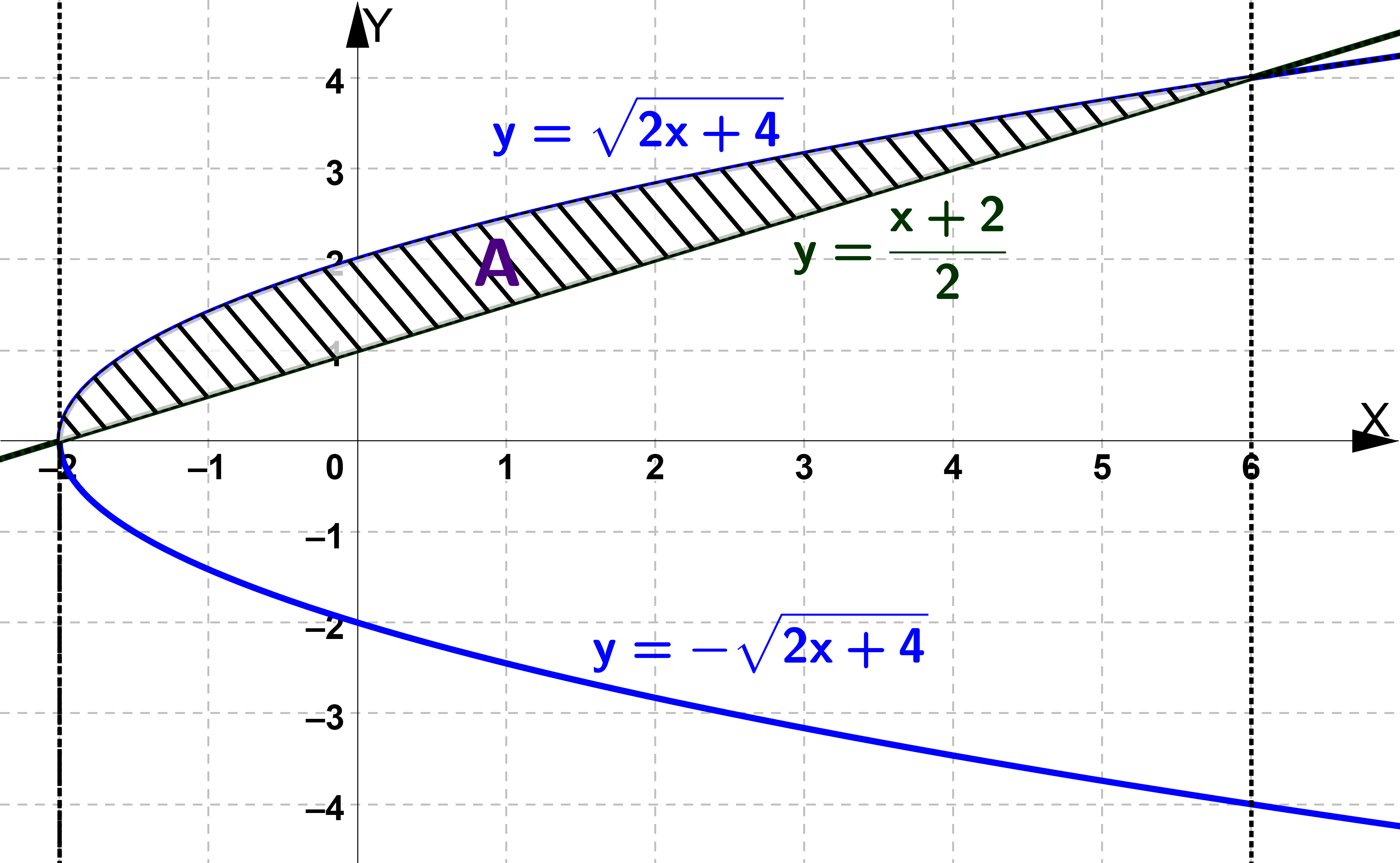
La parábola tiene las ramas hacía la derecha, el vértice (–2, 0) y el eje de simetría es el eje X.

y2 = 2x + 4 ⇒ . Sea la rama positiva. La ecuación de la que pasa por los

puntos (–2, 0) y (6, 4) es

Cortes de la recta y la parábola: ;

x2 – 4x – 12 = 0 ; ; x = 6, ; (6, 4) ; ,



El área que se pide es .

Una primitiva es . Por Barrow,

32.- Determina las coordenadas (abscisa y ordenada) de los puntos de inflexión de la curva cuya

ecuación es

**Resolución**

Como f(t) = tet es derivable en R, por el teorema fundamental del cálculo integral y por ser suma de funciones derivables, la función g, es derivable en R siendo g´(x) = xex

g´´(x) = 1ex + xex = (1 + x)ex = 0 ⇔ x = –1. Si x < –1, g´´(x) < 0 y si x > –1, g´´(x) > 0.

Punto de inflexión: x = –1,

Sea . Por partes ⇒ .

Una primitiva de es . Por la regla de Barrow,

Por tanto,

Conclusión: el punto de inflexión de la curva es

33.-

(a) Dada la función f: R → R definida por f(x) = x3 – 2x2 + 1, ¿se puede afirmar que existe algún

punto c del intervalo (1, 4) tal que f(c) = 3? Razona la respuesta.

(b) Enuncia algún teorema que hayas usado en el apartado anterior.

**Resolución**

Teorema de Bolzano: Si g es continua en [a, b] y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un c ∈ (a, b), tal que g(c) = 0.

La función g(x) = f(x) – 3 = x3 – 2x2 + 1 – 3 = x3 – 2x2 – 2 es continua en R, por suma/resta de funciones

continuas. En particular, g es continua en [1, 4].

Además, g(1) = 13 – 2.12 – 2 = –3 < 0 , g(4) = 43 – 2.42 – 2 = 30 > 0.

Por el teorema de Bolzano, existe por lo menos un c ∈ (1, 4), tal que g(c) = f(c) – 3 = 0 ⇒ f(c) = 3.

(c) Dibuja la región plana limitada por las curvas de ecuaciones y = 2 – x2 e y = |x| y halla su área.

**Resolución**

2 – x2 = 0 ⇔ ; (2 – x2)´= –2x = 0 ⇔ x = 0 ; para x = 0, y = 2 – 02 = 0. Luego, la curva

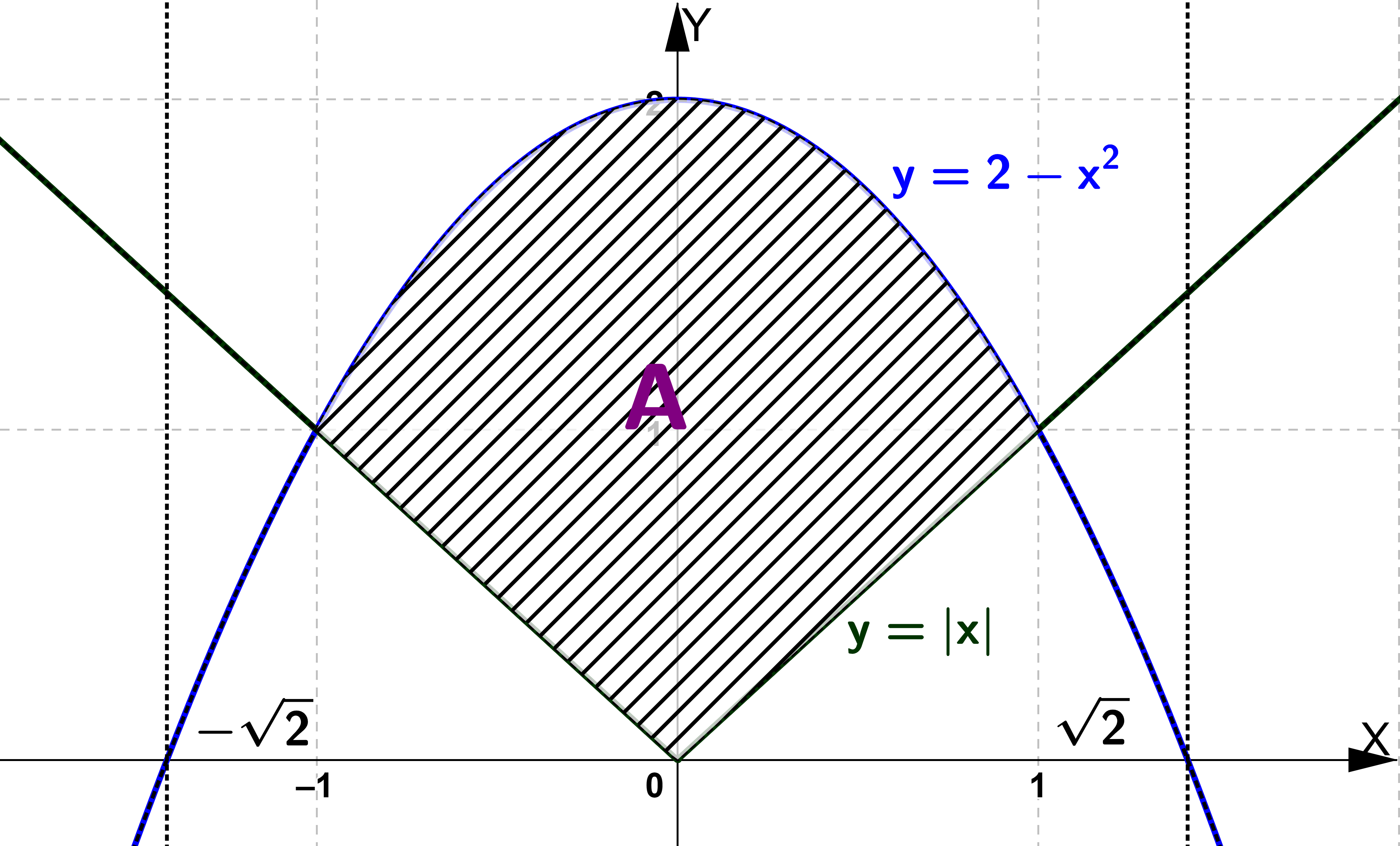
y = 2 – x2 es una parábola cóncava de vértice (máximo) (0, 2) y que corta al eje X en

Puntos de corte entre las curvas .

Para x > 0, 2 – x2 = x ⇒ x2 + x – 2 = 0 ; x = 1, y = 1. Punto (1, 1)

Para x < 0, 2 – x2 = –x ⇒ x2 – x – 2 = 0 ; , x = –1, y = 1. Punto (–1, 1)

Un esbozo de la región sería:



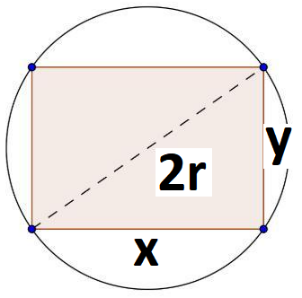
Por simetría, el área que se pide es .

Una primitiva es . Por la regla de Barrow,

34.- Prueba que entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio r > 0 existe al menos

uno de perímetro máximo y determina las dimensiones de un tal rectángulo.

**Resolución**



Sean x, y las dimensiones del rectángulo y r el radio de la circunferencia.

Usando el teorema de Pitágoras, x2 + y2 = 4r2 ;

Función a maximizar: perímetro = p(x) = .

⇔ ⇔

⇒ máximo. Luego, y =

Las dimensiones del rectángulo son x . Es decur, es un cuadrado de lado

35.- Determina a, b y c para que la función f definida por tenga las siguientes

propiedades: la recta de ecuación y = x – 2 es una asíntota de la gráfica de f y en x = –3 la función

presenta un extremo relativo.

**Resolución**

Asíntota oblicua, y = x – 2 ; AO: y = mx + n ⇒ m = 1, n = –2 ;

Queda ;

Como tiene un extremo relativo en x = –3, entonces f´(–3) = 0,

Luego, 81 – 108 + 27c = 0, c = 1. Conclusión: a = c = 1, b = 2 y

36.-

(a) Halla una primitiva de la función f: R → R definida por la relación f(x) = |x – 2| + x sen x.

(b) Halla una función derivable F: R → R tal que F´(x) = |x – 2| + x sen x y F(0) = 0.

**Resolución**

Usando la definición de valor absoluto,

Las primitivas de f son de la forma

Hallemos usando la integración por partes: ;

.

La función primitiva es entonces

Como F(0) = 0, debe ser a = 0 y

Como F es continua en x = 2, entonces,

Por tanto,

37.-

(a) Sea f la función definida por f(x) = ex. Dibuja la región limitada por la gráfica de la función f, la gráfica

de su función inversa, la recta de ecuación x = 1 y la recta de ecuación x = 2.

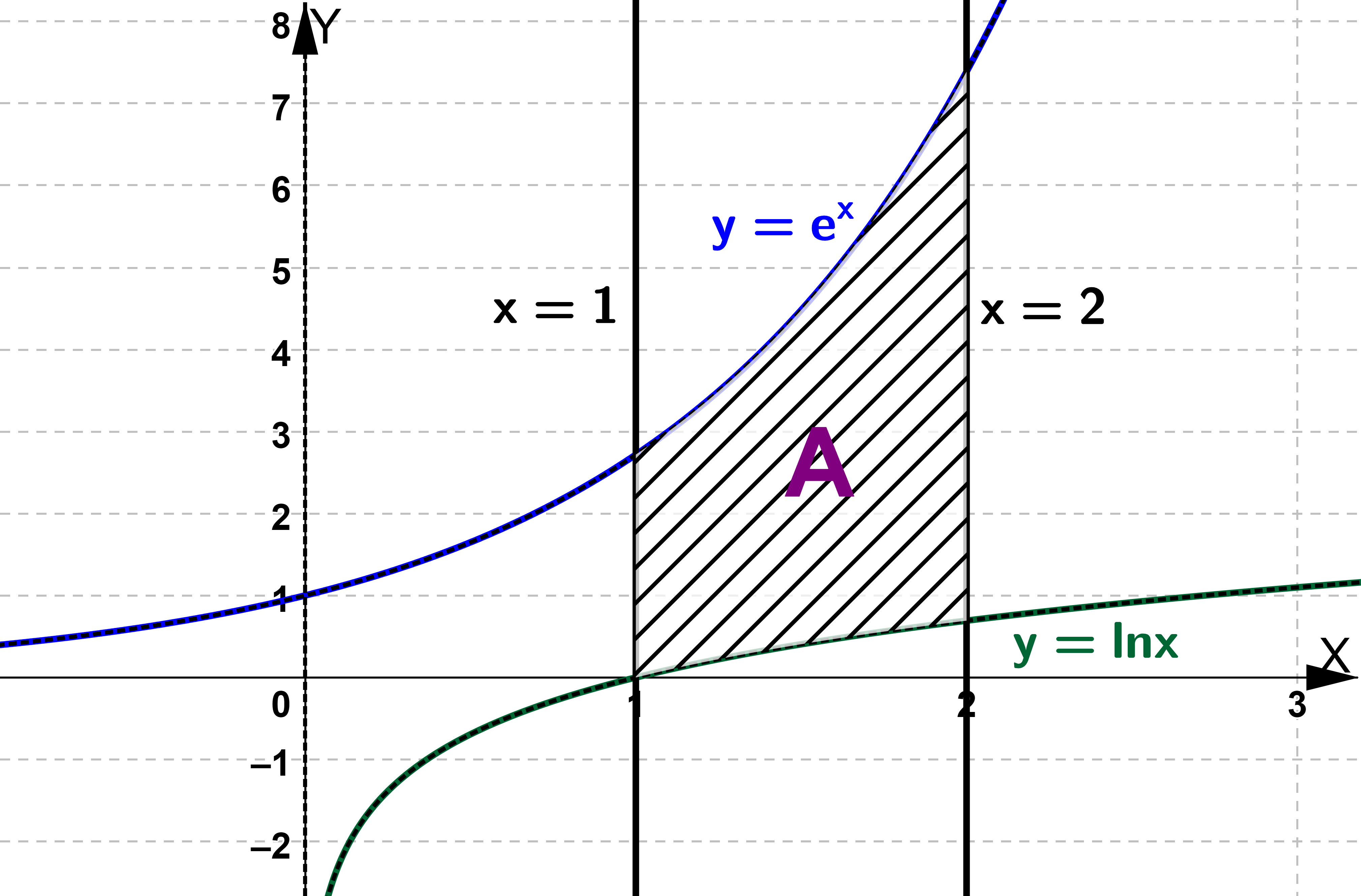
(b) Calcula el área de dicha región.

**Resolución**

Como y = ex ⇔ ln y = ln(ex) = x, la inversa de f(x) = ex es g(x) = ln x. Las rectas x = 1, x = 2 son, respectivamente, las verticales que pasan por (1, 0) y (2, 0).

Para x = 1: f(1) = e1 = e ≅ 2,7, punto (1, e) ; g(1) = ln 1 = 0, punto (1, 0)

Para x = 2: f(2) = e2 ≅ 7,4, punto (2, e2) ; g(2) = ln 2 ≅ 0,7, punto (2, ln 2)



. Vamos a hallar una primitiva de ln x usando la integración por partes:

⇒

Una primitiva del integrando de la primera integral es . Por la regla de Barrow,

38.- De una función f: R → R se sabe que f(0) = 0, que es derivable y que la gráfica de su función derivada

es la recta que pasa por el punto P(1, 1) y es paralela a la recta de ecuación y = 2x + 2.

Halla f, es decir, para cada x di cual es el valor de f(x).

**Resolución**

Según el enunciado, usando la ecuación de la recta en forma punto-pendiente

f´(x) = 2(x – 1) + 1 = 2x – 1. Luego,

Como f(0) = 0, entonces . Por tanto,

39.- Sea f la función definida para x > 0 por f(x) = x ln2x

(a) Calcula el límite lateral de f cuando x → 0 por la derecha, o sea,

**Resolución**

Indeterminación. Aplicamos la regla de L´Hôpital:

Indeterminación. Otra vez L´Hôpital:

. Por la regla de L´Hôpital, .

(b) Halla, si es que existen, los extremos relativos y absolutos de f.

**Resolución**

. Mínimo en x = 1, . Punto (1, 0)

. Máximo en , . Punto

Observa que y

Mínimo relativo: (1, 0). Mínimos absolutos: (1, 0) y (0, 0)

Máximo relativo: . No hay máximo absoluto

40.- Dadas las funciones f1, f2, f3: [–2, 3] → R definidas, respectivamente, por las relaciones

f1(x) = (x – 1)(x + 1), f2(x) = |x – 1|(x + 1), f3(x) = |x – 1||x + 1|, estudia su continuidad, su

derivabilidad y determina sus respectivos extremos relativos y absolutos.

**Resolución**

f1(x) = (x – 1)(x + 1) es continua y derivable en [–2, 3] por ser producto de funciones continuas y derivables. Al ser continua en el intervalo cerrado [–2, 3], por el teorema de Weierstrass, tiene máximo y mínimo absolutos.

f1(x) = x2 – 1 , ; ; .

Mínimo relativo: x = 0, y = f1(0) = 02 – 1 = –1. Punto (0, –1). No hay máximo relativo.

Observa que f1(–2) = (–2)2 – 1 = 3 ; f1(3) = 32 – 1 = 8.

Máximo absoluto: (3, 8). Mínimo absoluto: (0, –1)

f2(x) = |x – 1|(x + 1) es continua en [–2, 3] porque la función valor absoluto es continua y el producto de funciones continuas es continua. Al ser continua en el intervalo cerrado [–2, 3], por el teorema de Weierstrass, tiene máximo y mínimo absolutos.

Usando la definición del valor absoluto,

Para x ≠ 1, es derivable siendo

Luego, f2 NO es derivable en x = 1

Por tanto, f2 es continua en [–2, 3] y derivable en [–2, 3] – {1}

. Hagamos una tabla de signos de :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | (–2, 0) | 0 | (0, 1) | 1 | (1, 3) |
|  | + | 0 | – | ∄ | + |
| f2(x) | creciente | máximo | decreciente | mínimo | creciente |

Máximo relativo: x = 0, y = f2(0) = 1 – 02 = 1. Punto (0, 1).

Mínimo relativo: x = 1, y = f2(1) = 12 – 1 = 0. Punto (1, 0).

Observa que f2(–2) = 1 – (–2)2 = –3 ; f2(3) = 32 – 1 = 8.

Máximo absoluto: (3, 8). Mínimo absoluto: (–2, –3)

f3(x) = |x – 1||x + 1| = |x2 – 1| es continua en [–2, 3] porque la función valor absoluto es continua y el producto de funciones continuas es continua. Al ser continua en el intervalo cerrado [–2, 3], por el teorema de Weierstrass, tiene máximo y mínimo absolutos.

Usando la definición del valor absoluto,

Para x ≠ –1, x ≠ 1

Luego, f3 NO es derivable en x = –1

Luego, f3 NO es derivable en x = 1

Por tanto, f3 es continua en [–2, 3] y derivable en [–2, 3] – {–1 ; 1}.

. Hagamos una tabla de signos de :

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | (–2, –1) | –1 | (–1, 0) | 0 | (0, 1) | 1 | (1, 3) |
|  | – | ∄ | + | 0 | – | ∄ | + |
| f3(x) | decreciente | mínimo | creciente | máximo | decreciente | mínimo | creciente |

Máximo relativo: x = 0, y = f3(0) = 1 – 02 = 1. Punto (0, 1).

Mínimos relativos: x = –1, y = f3(–1) = (–1)2 – 1 = 0, (–1, 0) ; x = 1, y = f2(1) = 12 – 1 = 0, (1, 0).

Observa que f3(–2) = (–2)2 – 1 = 3 ; f3(3) = 32 – 1 = 8.

Máximo absoluto: (3, 8). Mínimos absolutos: (–1, 0) y (1, 0)

41.-

(a) Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange.

**Resolución**

Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe al menos un punto c ∈ (a, b) tal que f(b) – f(a) = f´(c)(b – a).

(b) Define el concepto de función monótona creciente en un intervalo.

**Resolución**

Una función f es monótona creciente (estrictamente creciente) en un intervalo si para dos puntos cualesquiera x1 , x2 del intervalo que verifiquen x1 < x2 se cumple que f(x1) < f(x2)

(c) Aplica el teorema del valor medio de Lagrange para probar que la función f: R → R, definida

por f(x) = ex + x3 + x, es monótona creciente en todo su dominio.

**Resolución**

Como f´(x) = ex + 3x2 + 1 > 0, **∀** x ∈ R, entonces f es monótona creciente y no es necesario usar el teorema del valor medio de Lagrange.

42.- Dada la función f: R → R definida por f(x) = 33x + 32, se pide:

(a) Halla la función derivada de f.

**Resolución**

Aunque sabemos que f´(x) = 33 vamos a calcular f´(x) usando la definición de función derivada:

(b) Halla la derivada de f en el punto x = 31.

**Resolución**

Aunque sabemos que f´(31) = 33 vamos a hallar también f´(31) usando la definición de derivada:

(c) Halla

**Resolución**

.

Una primitiva es .

Por la regla de Barrow,

43.- Desde una casa situada en el punto P(7, 0) se quiere hacer un camino recto para conectarla con

una carretera cuyo trazado viene dado por la curva de ecuación

¿Con qué punto de la carretera conecta el camino más corto posible?

**Resolución**

Sea un punto cualquiera de la curva.

Minimicemos el cuadrado de la distancia P a Q.

f´(x) = 6x – 12 = 0 ⇔ x = 2, que corresponde al mínimo por ser la gráfica de f una parábola convexa.

Luego, para x = 2, la distancia es mínima. En este caso, el punto de la carretera es

⇒

Aunque no se pide, la distancia es

44.- Haciendo el cambio de variable 1 – x = t6, halla

**Resolución**

Sea . Haciendo el cambio de variable

Si x = –63, ; si ,

Sustituyendo,

Hallando la forma mixta de la fracción obtenemos,

Una primitiva de la función integrando es . Por la regla de Barrow,

45.-

(a) Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange.

**Resolución**

Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe al menos un punto c ∈ (a, b) tal que f(b) – f(a) = f´(c)(b – a).

Geométricamente significa que hay un punto c ∈ (a, b) tal que la pendiente de la recta tangente en x = c es paralela al segmento AB, siendo A(a, f(a)), B(b, f(b))

(b) Sea f: [–1, 2] → R la función definida por f(x) = 2x3 – 6x2 + x + 10. Determina todos los puntos de la

gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta que pasa por los

puntos A(–1, f(–1)) y B(2, f(2)). ¿Cuál de ellos es el predicho por el teorema del valor medio de

Lagrange al aplicarlo a la función f en el intervalo [–1, 2 ]?

**Resolución**

Como f es una función polinómica es derivable en R con f´(x) = 6x2 – 12x +1. En particular, f es continua en [–1, 2] y derivable (–1, 2). Luego, cumple las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange.

Por tanto, existe al menos un punto c ∈ (–1, 2) tal que f(2) – f(–1) = f´(c)[2 – (–1)].

Es decir, hay al menos un punto en el que la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta que pasa por los puntos A(–1, f(–1)) y B(2, f(2))

f(2) = 2.23 – 6.22 + 2 + 10 = 4 , f(–1) = 2(–1)3 – 6(–1)2 – 1 + 10 = 1. Sustituyendo,

4 – 1 = (6c2 – 12c +1)3 ⇒ 6c2 – 12c = 6c(c – 2) = 0, c = 0 ó c = 2 ∉ (–1, 2)

Para c = 0, tenemos el punto P(0, f(0)) = P(0, 10) y para c = 2, tenemos el punto Q(2, f(2)) = Q(2, 4)

Como c = 2 ∉ (–1, 2), el predicho por el teorema del valor medio de Lagrange es c = 0, P(0, 10)

46.-

(a) Dibuja el arco de la curva de ecuación que está contenido en el primer cuadrante.

(b) Calcula el volumen del sólido engendrado al girar dicho arco alrededor del eje OX.

**Resolución**

Como 2 – x ≥ 0 ⇔ x ≤ 2, la curva sólo está definida para x ≤ 2

Sólo tenemos que dibujar la curva contenida en el primer cuadrante, luego, 0 ≤ x ≤ 2.

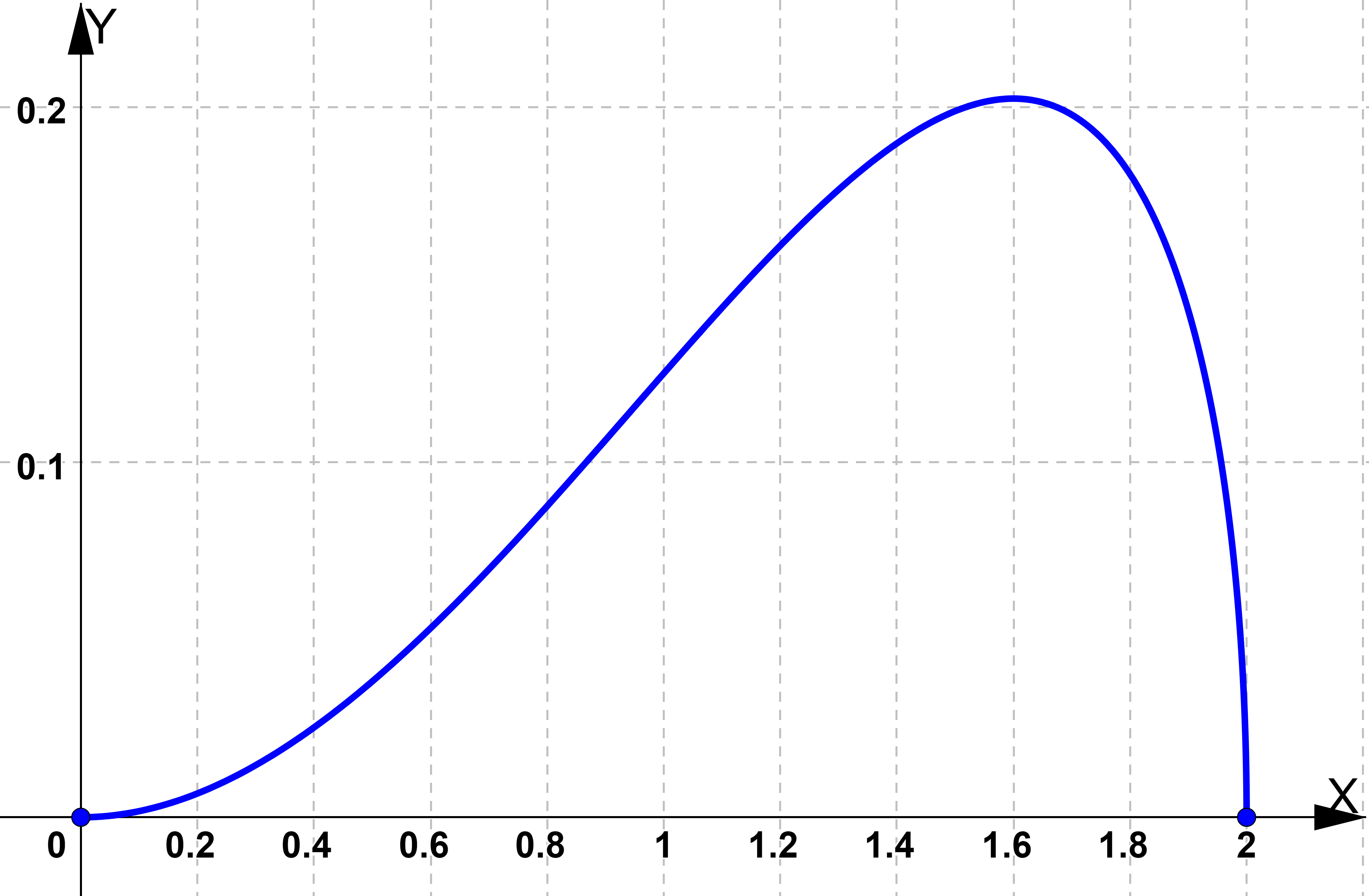
Tenemos que dibujar entonces la gráfica de la función , siendo 0 ≤ x ≤ 2

,

. Si , f´(x) > 0 y si , f´(x) < 0.

Máximo relativo y absoluto: ,

El arco sería



El volumen engendrado al girar dicho arco alrededor del eje OX es

.

Una primitiva es . Por la regla de Barrow,

47.-

(a) Explica en que consiste el método de integración por cambio de variable.

**Resolución**

El método de integración por cambio de variable consiste en transformar en otra más sencilla de calcular haciendo un cambio de variable. Hay dos formas de hacerlo:

1ª forma: Se cambia la variable "x" por una función de otra variable "t", x = g(t), de forma que el integrando se transforme en otro más sencillo. Hacemos x = g(t) entonces dx = g´(t) dt. Sustituyendo en la integral, queda

2ª forma: Se hace t = u(x) de donde dt = u´(x)dx. Se despeja a continuación x y dx para sustituirlos en la integral. Para terminar el proceso se calcula la integral en la nueva variable y después se deshace el cambio.

Es evidente que, si la integral resultante del cambio es más complicada que la de partida, el cambio realizado no es el adecuado y debemos buscar otro.

(b) Haciendo el cambio de variable t = ex, aplica dicho método para calcular

**Resolución**

Haciendo el cambio

t2 + t – 2 = 0 ⇔ . Luego,

Multiplicando los dos miembros por (t – 1)(t + 2), tenemos 1 = A(t + 2) + B(t – 1)

Para t = 1 se tiene 1 = 3A, y para t = –2 se tiene 1 = –3B, de donde .

.

48.- Sea f: R → R la función polinómica definida por f(x) = x3 – x2 + 2x – 1

(a) Prueba que f tiene una única raíz en el intervalo [0, 1].

(b) Dicha raíz, ¿está más cerca de 0,3 o de 0,7? Justifica la respuesta.

(c) Enuncia algún teorema que hayas usado en los apartados anteriores.

**Resolución**

Para probar que f tiene una única raíz en el intervalo [0, 1] vamos a usar teorema de Bolzano, que dice:

Si f es continua en [a, b], y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un c ∈ (a, b), tal que f(c) = 0.

Tomamos f(x) = x3 – x2 + 2x – 1 que cumple

f(0) = 03 – 02 + 2.0 – 1 = –1 < 0 y f(1) = 13 – 12 + 2.1 – 1 = 1 > 0

f es continua en R por ser una función polinómica, en particular lo es en [0, 1].

Por el teorema de Bolzano existe al menos un c ∈ (0, 1) tal que f(c) = 0.

Luego, c es una raíz de la función f.

Para probar que la raíz es única vamos a usar el teorema de Rolle, que dice: si f es continua en [a, b], derivable en (a, b) y además f(a) = f(b) entonces existe por lo menos un k ∈ (a, b), tal que f´(k) = 0.

Si hubiese dos raíces, a y b, entonces f(a) = f(b) = 0 y, por el teorema de Rolle, existiría un k ∈ (a, b) tal que f´(k) = 0.

Como f´(x) = 3x2 – 2x + 2 = 0 ⇔ (imposible) y la gráfica de f´es una

parábola convexa, debe ser f´(x) > 0 entonces f´(k) > 0 (f es creciente)

Conclusión: Hay solo una raíz de f en el intervalo (0, 1)

Para el (b), como f(0,5) = 0,53 – 0,52 + 2.0,5 – 1 = –0,125 < 0 y

f(0,6) = 0,63 – 0,62 + 2.0,6 – 1 = 0,56 > 0 por el teorema de Bolzano, la raíz de f está entre 0,5 y 0,6.

Luego, está más cerca de 0,7 que de 0,3.