1.- Sea el sistema de ecuaciones

a) Expréselo en forma matricial.

**Resolución**

Llamando a la matriz de coeficientes, tenemos AX = b

b) Calcule la matriz inversa de la matriz de coeficientes.

**Resolución**

Como det A = –2 + 1 – 2 + 2 = –1 ≠ 0, existe A–1 y

c) Resuélvalo.

**Resolución**

La matriz del sistema es

que corresponde al sistema . Como z = –2, entonces y = z + 1 = –2 + 1 = –1

Sustituyendo en la 1ª ecuación, x – 1 – 2 = 0 , x = 3. La solución del sistema es x = 3, y = –1, z = –2

**2.- (prueba extraordinaria)**

a) Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para dar solución al siguiente problema:

"Un comerciante ha vendido 600 camisetas por un total de 638000 ptas. Su precio original era

de 1200 ptas por camiseta, pero ha vendido en las rebajas una parte de ellas con un descuento

del 30% del precio original y otra parte con un descuento del 40%. Sabiendo que el número total de camisetas rebajadas fue la mitad del número de las que vendió a 1200 pta, calcular cuantas camisetas se vendieron a cada precio."

**Resolución**

Sean x, y, z el nº de camisetas con precio original, con descuento del 30% y del 40%, respectivamente.

Usando el enunciado llegamos al sistema

b) Resuelva el sistema formado por las ecuaciones: x – 2y – 3z = 1; x – 4y – 5z = 1; –2x + 2y + 4z = –2

**Resolución**

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = –16 – 20 – 6 + 24 + 10 + 8 = 0 y como , rg A = 2.

Como , rg A\* = 2. Luego, rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a , que corresponde al sistema

En la 2ª ecuación, y = –z ; en la 1ª ecuación, x = 2y + 3z + 1 = –2z + 3z + 1 = z + 1

Llamando z = k, las infinitas soluciones son , con k ∈ R

**3.- (prueba ordinaria)** En una tienda, un cliente se ha gastado 15000 ptas en la compra de 12 artículos

entre discos, libros y carpetas. Cada disco le ha costado 2000 ptas, cada libro 1500 ptas y cada

carpeta 500 ptas. Se sabe que entre discos y carpetas hay el triple que de libros.

(a) Formule el sistema de ecuaciones asociado al enunciado anterior.

**Resolución**

Sean x, y, z el nº de discos, libros y carpetas, respectivamente.

Usando el enunciado llegamos al sistema

(b) Determine cuántos artículos ha comprado de cada tipo.

**Resolución**

La matriz del sistema es

que corresponde al sistema . Como y = 3, entonces 3 + 3z = 18, z = 5

Sustituyendo en la 1ª ecuación, x + 3 + 5 = 12 , x = 4. Compró 4 discos, 3 libros y 5 carpetas.

4.-

a) Una heladería prepara helados de tres tamaños, 125 gr, 250 gr y 500 gr, cuyos precios son 150 ptas,

270 ptas y 495 ptas, respectivamente. Un cliente compra 10 helados, con un peso total de 2,5 kg, y paga

por ellos 2670 ptas. Se desea conocer el número de helados que ha comprado de cada tipo.

1) Formule el sistema de ecuaciones asociado al enunciado del problema.

**Resolución**

Sean x, y, z el nº de helados de tamaño pequeño, mediano y grande, respectivamente.

Usando el enunciado llegamos al sistema

2) Halle el número de helados que se lleva de cada tipo.

**Resolución**

La matriz del sistema es

que corresponde al sistema . Como z = 2, entonces y + 3.2 = 10, y = 4

Sustituyendo en la 1ª ecuación, x + 4 + 2 = 10 , x = 4. Se llevó 4 pequeños, 4 medianos y 2 grandes.

b) Dada la matriz , halle A200. **Resolución**

Observamos que . Luego A200 = (A2)100 = I100 = I

5.- Sean las matrices

a) Compruebe que (AB)t = BtAt (t indica traspuesta).

**Resolución**

;

Luego, (AB)t = BtAt.

b) Halle una matriz X que verifique

**Resolución**

Sea . Nos queda la ecuación CX = D.

Como det C = –3 ≠ 0, existe C–1 ;

Multiplicando por C–1, por la izquierda, C–1CX= C–1D, X = C–1D

6.- Sea el sistema de ecuaciones lineales

a) Resuélvalo y clasifíquelo para m = 1.

**Resolución**

Para m = 1, las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = 0 porque f1 = f3 y como , rg A = 2.

Como , rg A\* = 2. Luego, rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a, que corresponde al sistema

En la 2ª ecuación, ; en la 1ª ecuación,

Llamando z = k, las infinitas soluciones son , con k ∈ R

b) Resuélvalo y clasifíquelo para m = 2. **Resolución**

Para m = 2, las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = 3 + 4 +1 – 6 – 1 – 2 = –1 ≠ 0. Luego, rg A = rg A\* = 3 = nº de incógnitas. Por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

La matriz del sistema es

que corresponde al sistema . Como y = 1, entonces 3.1 + z = 4, z = 1

Sustituyendo en la 1ª ecuación, x + 2.1 + 1 = 4 , x = 1. La solución del sistema es x = y = z = 1

7.- En un supermercado, un cliente compra 5 unidades de un producto A, 4 unidades de un

producto B y 3 unidades de un producto C, pagando un total de 4500 ptas.

Otro cliente compra 2 unidades de A y 2 unidades de C, pagando en total 2000 ptas.

Una tercera persona compra en la tienda del barrio, que marca los precios un 10% más caros que el supermercado, 3 unidades del producto A y una de B, pagando un total de 1210 ptas. Se pide:

a) Formular el sistema de ecuaciones asociado al enunciado.

**Resolución**

Sean x, y, z los precios por unidad de los productos A, B y C, respectivamente.

Usando el enunciado llegamos al sistema

b) Calcular el precio por unidad de cada uno de los productos A, B y C en el supermercado.

**Resolución**

La matriz del sistema es

que corresponde al sistema . Como x = 710, entonces 710 + z = 1000, z = 290

Sustituyendo en la 3ª ecuación, y + 3.290 = 1900, y = 1030.

Luego, los precios por unidad son: 710 ptas el producto A ; 1030 ptas el B y 290 ptas el C

c) Calcular el precio de cada uno de estos productos en la tienda del barrio.

**Resolución**

Como en la tienda del barrio son un 10% más caros, los precios por unidad serían:

710.1,1 = 781 ptas el producto A ; 1030.1,1 = 1133 ptas el B y 290.1,1 = 319 ptas el C

8.- Un almacenista ha mezclado aceite de girasol de coste 130 ptas litro con aceite de oliva de

coste 250 ptas litro. La mezcla se vende a 225 ptas litro. Calcular los litros que ha mezclado de cada clase, sabiendo que ha utilizado 10000 litros más de aceite de girasol y que el 20% del precio de venta de 1 litro de mezcla es su ganancia.

**Resolución**

Si x son los litros de aceite oliva, los de aceite de girasol son x + 10000. Las ganancias son los ingresos menos los gastos.

Ingresos: 225.(x + 10000 + x) = 450x + 2250000 Gastos: 130(10000 + x) + 250x = 380x + 1300000

Ganancias por litro: 0,2.225 = 45 ptas litro Ganancias totales: 45(2x + 10000) = 90x + 450000

Queda la ecuación 450x + 2250000 – (380x + 1300000) = 90x + 450000

Operando, 70x + 950000 = 90x + 450000 ; 500000 = 20x ; x = 25000.

Por tanto, mezcló 35000 litros de aceite de girasol y 25000 litros de aceite de oliva

9.- Sea

a) Hallar B de manera que AB = I2

**Resolución**

Como A2 x 3 y I2 x 2, para que tenga sentido la igualdad debe ser B3 x 2. Sea

. Igualando términos,

. De la 3ª ecuación, b = –2c y queda

De la 3ª ecuación, e = 1 – 2f y queda . Dando valores a “a” y “d” se

obtienen infinitas soluciones. Tomemos por ejemplo a = 0, d = 0. Entonces, c = –1, f = 1, e = –1, b = 2.

Una de las infinitas soluciones es

b) ¿Contradice el resultado anterior el hecho de que una matriz que posee inversa debe ser cuadrada? Justifique la respuesta.

**Resolución**

No, porque en la definición de inversa de una matriz A la matriz A debe ser cuadrada. En el a) la matriz B no es la inversa de A, no tiene sentido

10.- Dadas las matrices y

a) ¿Existen las matrices inversas de A y B? Justificar la respuesta.

**Resolución** Como det A = –2 ≠ 0, existe A–1 y como det B = 0, no existe B–1.

b) Si es posible, calcular dichas matrices inversas.

**Resolución**

c) Resolver la ecuación matricial AXAt = B (Siendo At la matriz traspuesta de la matriz A)

**Resolución**

At es invertible y (At)–1 = (A–1)t , multiplicando por A–1, por la izquierda, y por (At)–1, por

la derecha, nos queda A–1AXAt(At)–1 = A–1B(At)–1 = A–1B(A–1)t ⇒ X = A–1B(A–1)t.

11.- Las velocidades medias de tres bicicletas (en km/h) vienen dadas por la matriz .

El número de horas que cada bicicleta pasea viene dado por

a) Calcular los productos VH y HV.

**Resolución**

b) Justificar si las matrices resultantes poseen inversa.

**Resolución**

Como

VH no tiene inversa y como det (HV) = 238 HV sí que tiene inversa.

c) Interpretar los valores de los términos de las matrices resultantes.

**Resolución**

En VH sólo tienen significado los elementos de la diagonal principal y representan los km recorridos por cada bicicleta.

En HV, 238 significa que entre las tres bicicletas han recorrido 238 km

12.- Obtener la matriz X que verifica AX – B = 3X siendo y

**Resolución**

Trasponiendo, AX – 3X = B ⇒ AX – 3IX = B. Sacando factor común X, por la derecha, (A – 3I)X = B

Llamando , queda la ecuación CX = B

Como det C = 4 – 3 – 6 = –5 ≠ 0, existe C–1. Multiplicando por C–1, por la izquierda, C–1CX = C–1B

13.- Dadas las matrices y

a) Calcule los valores a y b para que AB = BA.

**Resolución**

Resolviendo, a = 1, b = 4

b) Para a = 1 , b = 0 resuelva la ecuación matricial XB – A = I.

**Resolución**

De XB – A = I, se tiene XB = A + I. Para a = 1, b = 0, det B = 1 ≠ 0, B es invertible.

Multiplicando por B–1, por la derecha, nos queda XBB–1 = (A + I) B–1 ⇒ X = (A + I) B–1

**OTROS DEL 1999 (COU II)**

1.- Dadas las matrices y

a) Determine los valores de “x” para los que existe la inversa de la matriz C = AB – BA.

**Resolución**

det C = (2x – 2)2 = 0 ⇔ x = 1. Luego, para x ≠ 1, existe la inversa de C

b) Para x = 2, calcule la matriz inversa de B.

**Resolución**

Para x = 2, ; det B = 5 ≠ 0 ;

2.- Dadas las rectas r, s, t del plano definidas por las ecuaciones r: 6x + 4y = 12, s: 3x + 2y = 12

y t: x – y = 2, halle la posición relativa de cada par de rectas.

**Resolución**

Como r // s ; como r y t son secantes ; como s y t son secantes

3.- Siendo y , calcule la matriz X tal que AX = B

**Resolución**

det A = 38 ≠ 0, A es invertible. Multiplicando por A–1, por la izquierda, nos queda A–1AX = A–1 B

=

4.- Clasifique y resuelva el sistema

**Resolución**

De la 3ª ecuación y = 2x. Sustituyendo, ; luego, y = 2.1 = 2.

El sistema es compatible determinado y tiene como solución única x = 1, y = 2.

5.- Sean las rectas del plano r, s, t definidas por las ecuaciones r: 2x – y – 1 = 0, s: 3x – 3y + 3 = 0,

t: 6x + 2y – 18 = 0. Determine la posición relativa de cada par de rectas.

**Resolución**

Como r y s son secantes ; Como r y t son secantes ; como s y t son secantes

6.- Sea S el sistema de ecuaciones

a) Resuelva dicho sistema.

**Resolución**

La matriz del sistema es

que corresponde al sistema . En la 2ª ecuación, ; =

En la 1ª ecuación, x = z – y = . La solución del sistema es

b) Clasifique el sistema resultante si se suprime en S la primera ecuación.

**Resolución**

; matrices de coeficientes y ampliada: ,

Como el menor de A y A\* , rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

c) ¿Qué ecuación debe suprimirse en el sistema S para que el nuevo sistema tenga entre sus soluciones la solución (0, 0, 0)?

**Resolución**

Lógicamente suprimiendo la 2ª ecuación queda el sistema que tiene entre sus soluciones la solución (0, 0, 0)

7.- Dadas las matrices , y

a) Obtenga, si existe, una matriz X tal que AX + 2B = C.

**Resolución**

De AX + 2B = C, se tiene AX = C – 2B ; det A = 1 ≠ 0, A es invertible.

Multiplicando por A–1, por la izquierda, nos queda A–1AX = A–1(C – 2B) ⇒ X = A–1(C – 2B)

b) Obtenga, si existe, una matriz Y tal que YA – B = C.

**Resolución**

De YA – B = C, se tiene YA = B + C. Si , como y ,

entonces . Lo cual es imposible.

c) En ambos casos, razone la existencia o no de las matrices inversas de X y de Y.

**Resolución**

X no tiene inversa porque al no ser cuadrada no tiene sentido e Y no existe

8.- Dado el sistema de ecuaciones añada una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

**Resolución**

Basta añadir una ecuación que sea c.l. de las dadas, por ejemplo, la ecuación suma de las dadas:

3x + 4y = 10

9.- La suma de dos cantidades es 500. Aumentando la primera en un 10% y disminuyendo la segunda en un 20%, la suma es 525. Plantee el sistema que obtiene tales cantidades.

**Resolución**

Sean x, y las cantidades. Usando el enunciado,

10.- Halle una solución no nula del sistema de ecuaciones

**Resolución**

La matriz del sistema es , que corresponde al sistema .

En la 2ª ecuación ; en la 1ª ecuación,

Llamando z = k, las infinitas soluciones son , con k ∈ R.

Tomando por ejemplo k = 5, obtenemos una solución no nula x = 1, y = 8, z = 5

11.- Sean las rectas del plano r, s, t definidas por las ecuaciones

r: 2y + 2 = x , s: 2x + y – 4 = 0 , t: y = –2x + 2

a) Estudie si el sistema formado por las ecuaciones tiene solución.

**Resolución**

El sistema es . Restando las ecuaciones de s y t obtenemos 0 = 2 (imposible)

Luego, el sistema es incompatible, no tiene solución

b) Indique la posición relativa de cada par de rectas y calcule los puntos de corte entre ellas.

**Resolución**

- Como r y s son secantes. Para hallar el punto de corte resolvemos el sistema

De la 2ª ecuación y = 4 – 2x. Sustituyendo, x – 2(4 – 2x) = 2 ; ,

Las rectas r y s se cortan en el punto

- Como r y t son secantes. Para hallar el punto de corte resolvemos el sistema

De la 2ª ecuación y = 2 – 2x. Sustituyendo, x – 2(2 – 2x) = 2 ; ,

Las rectas r y t se cortan en el punto

- Como r // s

12.- Resuelva el sistema de ecuaciones determinado por la igualdad

**Resolución**

Operando queda el sistema

Restando las ecuaciones, y = –3. Luego, 2x – 3 = 2, . La solución del sistema es

13.- Dada la matriz

a) Calcule (A – I)B, siendo I la matriz identidad de orden 3 y

**Resolución**

b) Calcule, si es posible, BAt.

**Resolución**

Como y no se puede realizar BAt porque el nº de columnas de B (1 columna) no coincide con el nº de filas de At (3 columnas)

c) ¿Es posible obtener la inversa de A?

**Resolución** Como det A = 2 – 2 = 0, no existe A–1