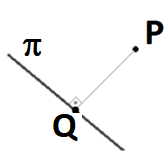
**1.-** **(prueba ordinaria)** Halla el punto del plano de ecuación x – z = 3 que está más cerca del

punto P(3, 1, 4) así como la distancia entre el punto P y el plano dado.

**Resolución**

Sea π el plano dado y sea Q(x, y, z) el punto buscado. Un vector normal de π es



Como Q ∈ π, x – z = 3 y como ⇒ .

Nos queda el sistema . Resolviendo, x = 5, y = 1, z = 2. Luego, Q(5, 1, 2)

**2.- (prueba ordinaria)** Sean los vectores y

(a) ¿Se puede expresar como combinación lineal de ? Si es así, escribe dicha combinación

lineal; si no es así, explica por qué.

**Resolución**

Como , los vectores son l.i.

Luego, no se puede expresar con combinación lineal de

(b) ¿Se puede expresar como combinación lineal de ? Si es así, escribe dicha combinación

lineal; si no es así, explica por qué.

(c) ¿Son linealmente independientes? Justifica la respuesta.

**Resolución**

Como , los vectores son l.d.

Luego, se puede expresar con combinación lineal de .

.

Sustituyendo, , a = 2.1 – 4 = –2. Luego, a = –2, b = 1

Por tanto,

**3.- (prueba ordinaria)**

(a) Calcula un punto R de la recta s dada por que equidiste de los

puntos P(1, 0, –1) y Q(2, 1, 1).

**Resolución**

Pongamos s en forma paramétrica. Para ello resolvemos el sistema

Llamando y = k, x = y + 5 = k + 5, z = x – 3y – 7 = k + 5 – 3k – 7 = –2 – 2k ⇒

Un punto genérico de s es R(5 + k, k, –2 – 2k) ;

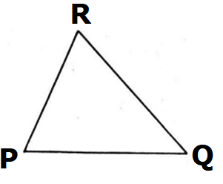
Desarrollando y simplificando, 8k + 16 + 1 + 4k = 9 + 6k – 2k + 1 + 9 + 12k ⇒

El punto que buscamos es

(b) Calcula el área del triángulo determinado por los puntos P, Q y R.

**Resolución**

Tenemos



Se pide el área del triángulo PQR que es,

;

4.- Sea π el plano que pasa por los puntos M(1, 0, 0), N(0, 1, 1) y P(1, 1, 1).

Sea A(1, 2, 3) y sea B el simétrico de A respecto del plano π

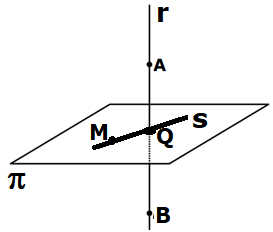
(a) Halla la recta que pasa por M y por el punto medio del segmento AB.

**Resolución**

Hallemos el plano π: Al ser vectores directores del plano π, un

vector normal de π es

Y como π pasa por M(1, 0, 0), entonces π: 0(x – 1) + 1(y – 0) – 1(z – 0) = 0 ⇒ π: y – z = 0



- Hallamos la recta r que pasa por A(1, 2, 3) y es ortogonal a π: un vector director de r es el vector normal del plano, . Luego,

- Hallamos el punto de corte, Q, entre el plano y la recta resolviendo el sistema de ecuaciones:

⇒ 2 + k – (3 – k) = 0 ⇒ 2k – 1 = 0 ⇒ . Luego, ⇒

- Calculamos el simétrico B(x, y, z) del punto A(1, 2, 3) respecto del plano π usando que Q es el punto

medio del segmento AB: . Luego, el simétrico es

La recta s que se pide pasa por M(1, 0, 0) y .

Un vector director de s es Luego,

(b) Halla la recta paralela a la anterior que pasa por el punto (2, 2, 2).

**Resolución**

Por ser paralela a la anterior tiene el mismo vector director. Luego, la recta t que se pide es,

5.- Sea A la matriz dada por . Halla a, b, c y d sabiendo que:

(i) El vector cuyas coordenadas son las que aparecen en la primera columna de A es ortogonal al

vector (1, –1, 1)

(ii) El producto vectorial del vector cuyas coordenadas son las de la tercera columna de A por

el vector (1, 0, 1) es el vector (–2, 3, 2)

(iii) El rango de la matriz A es 2.

**Resolución**

Como es ortogonal a entonces ⇒ 1 – 2 + c = 0, c = 1

Por (ii) .

Luego, b = –2, 7 + d = 3, d = –4, –b = 2, b = –2. Nos queda la matriz

Como rg A = 2, entonces det A = 0 ⇒ –4a – 6 + 14a + 7a – 2a + 24 = 0, 15a = –18,

Conclusión:

6.- Un objeto se mueve en el espacio siguiendo una línea recta cuya dirección viene dada por el

vector . En su movimiento dicho objeto pasa por el punto A(2, 1, 2)

(a) Calcula los puntos de corte de la trayectoria del objeto con los planos coordenados.

**Resolución**

La trayectoria que describe el objeto es la recta

Nos piden los puntos de corte de r con los planos coordenados:

Corte con el plano XOY: z = 0, , punto

Corte con el plano XOZ: y = 0, , punto

Corte con el plano YOZ: x = 0, , punto

(b) Calcula la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a dicha trayectoria.

**Resolución**

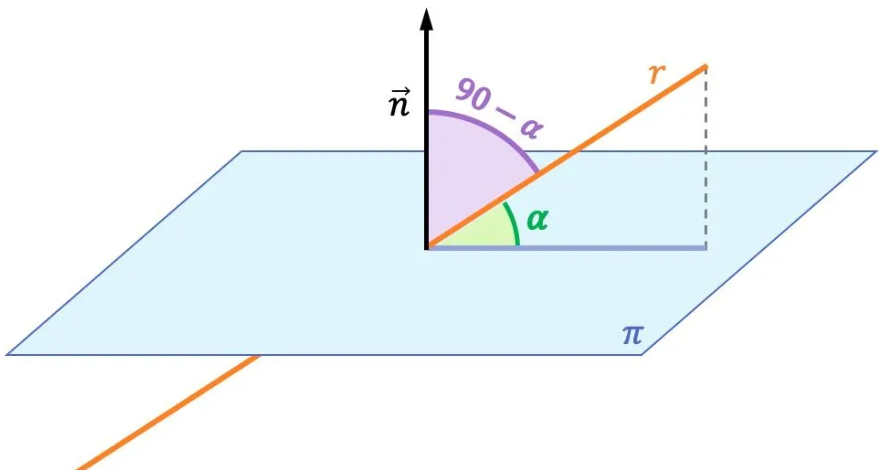
Un vector normal del plano α que se pide es el vector director de r:

Y como α pasa por O(0, 0, 0) , α: 1(x ‒ 0) + 2(y – 0) – 1(z – 0) = 0 → α: x + 2y – z = 0

(c) ¿Cuál es el ángulo que forma la trayectoria del objeto con el plano XOY?

**Resolución**

Sea plano XOY = π: z = 0, trayectoria , , ángulo pedido, α



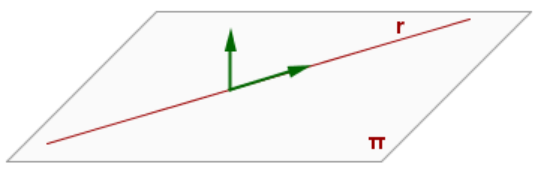
⇒ ºº

7.- Considera el plano π y la recta r dados por π: ax + 2y – 4z + b = 0 y

(a) Halla los valores de a y b para los que r está contenida en π.

**Resolución**

Un vector normal de π es ; A(3, 1, –3) ∈ r y un vector director de r es



r ⸦ π ⇔ y A ∈ π ⇔ 4a – 8 – 4 = 0, a = 3 y 3.3 + 2.1 – 4(–3) + b = 0 , b = –23

Conclusión: debe ser a = 3, b = –23

(b) ¿Existe algún valor de a y algún valor de b para los que la recta r es perpendicular al plano π.

**Resolución**

r π ⟺ . Pero como , entonces . Luego, no hay ningún valor de a ni de b para los que r y π sean perpendiculares.

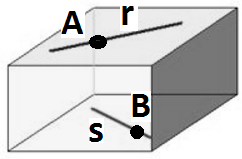
8.- Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P(1, 0, 2) y corta a las rectas r y s dadas por:

**Resolución**

A(0, –2, 0) ∈ r y un vector director de r es

. Hacemos y = 0, ; x = –1, z = 0. Luego, el punto B(–1, 0, 0) ∈ s

Un vector director de s se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: .

Como , entonces los vectores son l.i. Luego, r y s se cruzan. 

Construimos la recta t como intersección de dos planos α y β, que contienen respectivamente a la

recta r y el punto P, y a la recta s y al punto P(1, 0, 2):

- El plano α tiene como vectores directores y

Un vector normal de α es

Y como α pasa por P(1, 0, 2), entonces α: 0(x – 1) – 1(y – 0) + 1(z – 2) = 0 ⇒ α: y – z + 2 = 0

- El plano β tiene como vectores directores

Un vector normal de β es

Y como β pasa por P(1, 0, 2), entonces β: 2(x – 1) + 5(y – 0) – 2(z – 2) = 0 ⇒ β: 2x + 5y – 2z + 2 = 0

Por tanto, la recta t es . Comprobemos efectivamente que la recta t corta a r y a s:

Observa que un vector director de t sería: .

y como r y t están contenidas en el plano α ⇒ r y t se cortan

y como s y t están contenidas en el plano β ⇒ s y t se cortan

9.- Los puntos A(1, 2) y B(5, 6) son los extremos de un diámetro de una circunferencia.

(a) Calcula la ecuación de la circunferencia.

**Resolución**

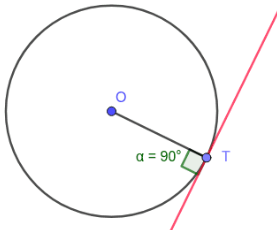
El centro O de la circunferencia es el punto medio del diámetro ⇒

El radio r es la mitad del diámetro ⇒

Luego, la ecuación de la circunferencia es

(b) Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto A.

**Resolución**



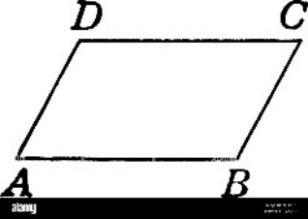
La recta tangente t tiene de vector normal

Y como t pasa por A(1, 2), entonces t: 1(x – 1) + 1(y – 2) = 0 ⇒ t: x + y – 3 = 0

10.- Un paralelogramo cuyo centro es tiene por vértices los puntos A(1, 2, 3) y B(3, 2, 5).

(a) Halla las coordenadas de los otros dos vértices.

**Resolución**



Sea C(x, y, z) el tercer vértice, como M es el punto medio de AC ⇒

. Luego,

Sea D(x, y, z) el cuarto vértice, como M es el punto medio de BD ⇒

. Luego,

(b) Halla la ecuación de la recta que pasa por M y es perpendicular al plano que contiene al

paralelogramo.

**Resolución**

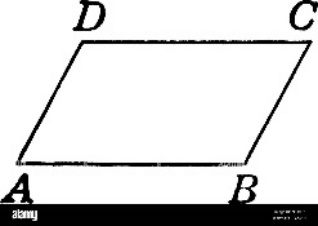
Los vértices del paralelogramo son A(1, 2, 3), B(3, 2, 5), C(2, 4, 5) y D(0, 4, 3). Un vector normal del plano que contiene al paralelogramo es

Luego, un vector director de la recta r que se pide es y como r pasa por

unas ecuaciones paramétricas de r son

(c) Calcula el área del paralelogramo.

**Resolución**

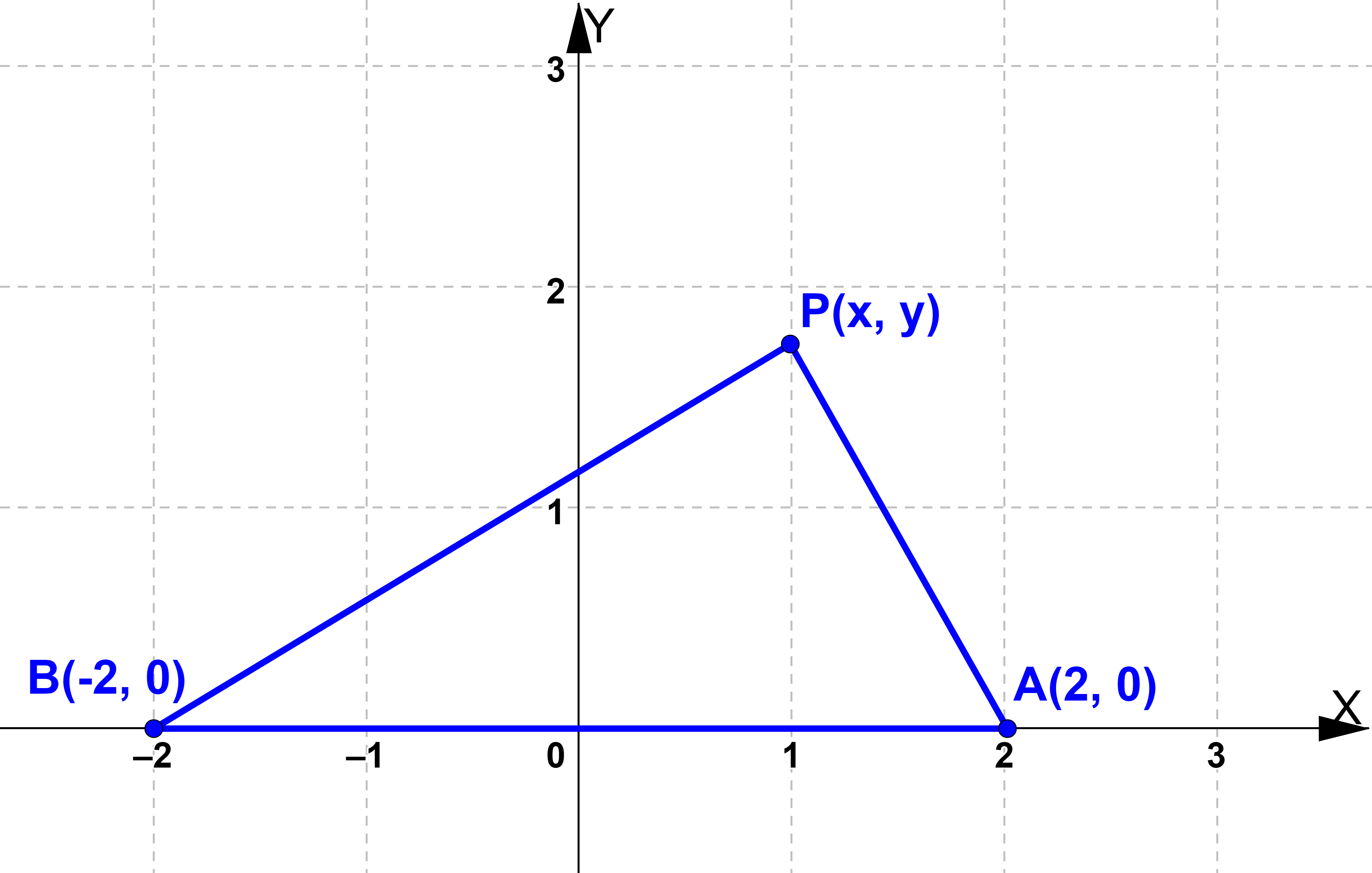


Se pide el área del paralelogramo ABCD que es,

;

11.- Determina y representa el lugar geométrico formado por los puntos P(x, y) del plano que verifican la siguiente propiedad: el triángulo PAB cuyos vértices son P, A(2, 0) y B(–2, 0) es un triángulo rectángulo con ángulo recto en P.

**Resolución**



Por ser rectángulo en P, se tiene

Operando x2 – 4 + y2 = 0, x2 + y2 = 4 = 22, que representa una circunferencia de centro (0, 0) y radio 2

12.-

(a) ¿Cuál es el punto P de la recta r dada por que está más cerca del

punto A(2, 3, –1).

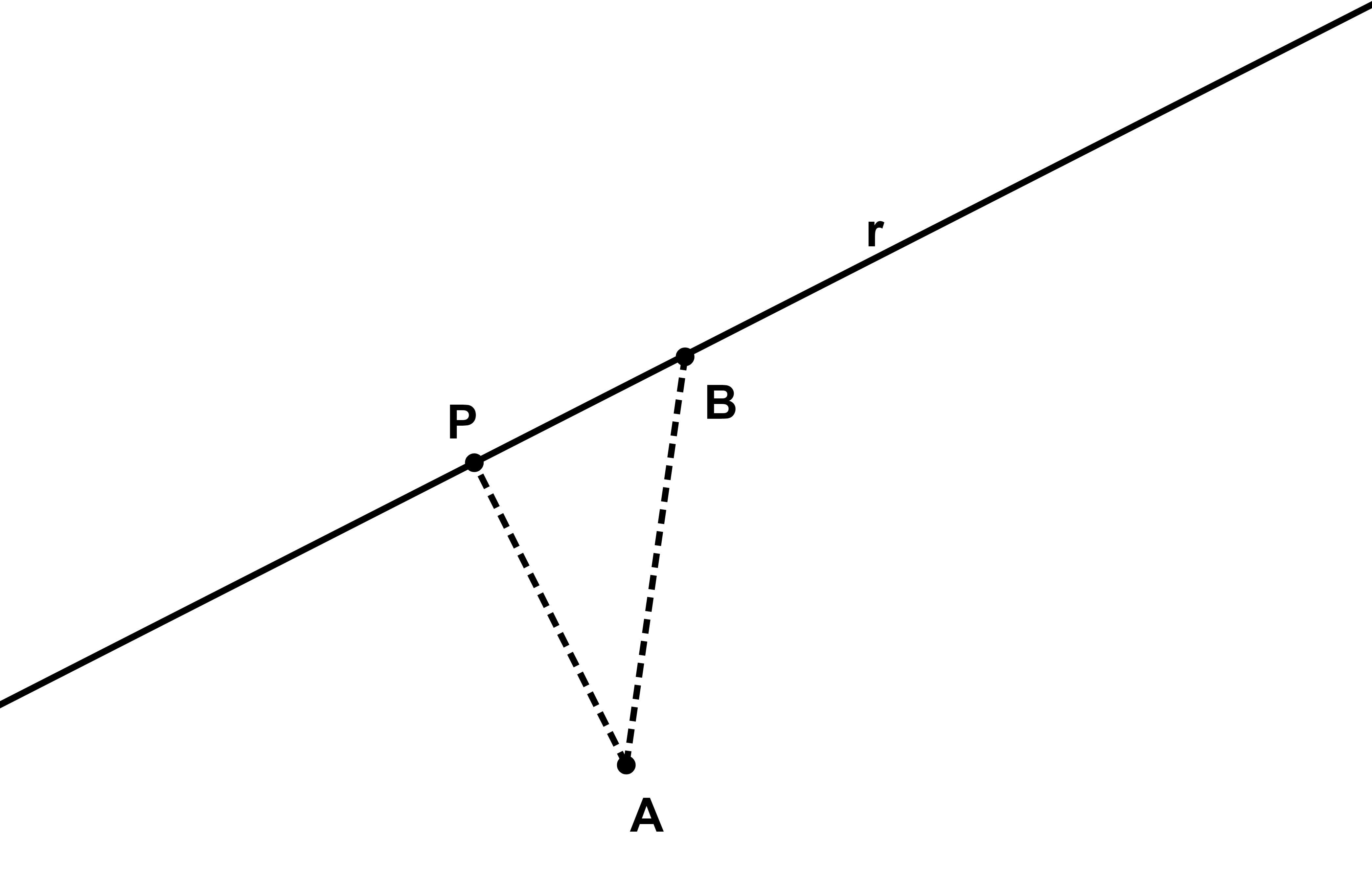
(b) Halla el área del triángulo cuyos vértices son A, P y B(1, 0, 0)

**Resolución**

r: . Hacemos z = 0, ; restando, 3y = 0, y = 0, x = 1. Luego, B(1, 0, 0) ∈ r

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la

definen: . Un punto genérico de r es P(1, 2k, –k)



El punto P que buscamos cumple que

Operando, 4k – 6 – 1 + k = 0, 5k = 7, ⇒

Por ser rectángulo en P, ;

13.-

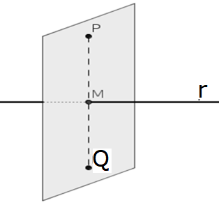
(a) Halla el punto Q simétrico del punto P(2, 0, 1) respecto de la recta r que pasa por el

punto A(0, 3, 2) y es paralela a la recta s de ecuaciones

**Resolución**

; haciendo y = k, x = –2k ⇒ y como r pasa por A y r // s ⇒

El punto simétrico de P respecto de r sería el punto Q del dibujo.



- Hallamos el plano α que pasa por P y es ortogonal a la recta.

Un vector normal del plano α es el vector director de r:

Y como α pasa por P, entonces α: –2(x – 2) + 1(y – 0) + 0(z – 1) = 0 → α: –2x + y + 4 = 0

- Hallamos M, punto de corte de r y α, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

Sustituyendo en la ecuación del plano, –2(–2k) + 3 + k + 4 = 0 ⇒ 5k + 7 = 0 ;

Luego, . El punto de corte es

- Por último, hallamos el simétrico Q(a, b, c) de P(2, 0, 1) usando que M es el punto medio del

segmento PQ: . El punto simétrico que se pide es

14.- Considera la circunferencia de ecuación x2 + y2 = 13

(a) Represéntala indicando su centro y su radio.

(b) Halla el área de la figura limitada por las tres rectas siguientes:

(i) la recta tangente a la circunferencia en el punto A(3, 2).

(ii) la recta normal a la circunferencia en el punto A.

(iii) el eje de abscisas.

**Resolución**

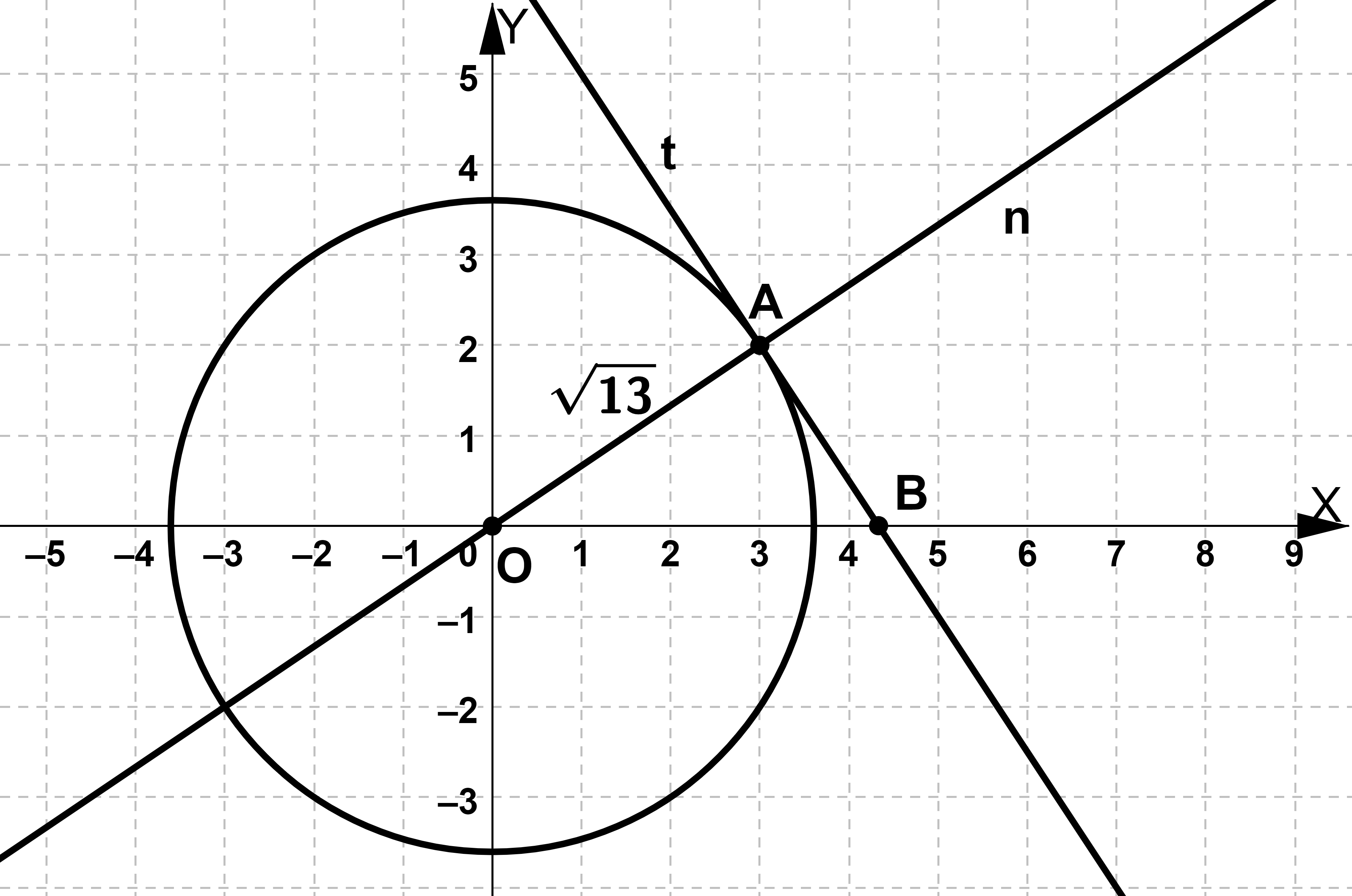
Centro = O(0, 0), radio = ; la recta tangente pasa por A y tiene de vector normal

La ecuación de la recta tangente es t: 3(x – 3) + 2(y – 2) = 0, t: 3x + 2y = 13

El punto de corte, B, de t con el eje X: 3x + 2.0 =13, ,

La recta normal pasa por O y tiene de vector normal

La ecuación de la recta normal es n: –2(x – 0) + 3(y – 0) = 0, n: –2x + 3y = 0



El área que se pide es la del triángulo OAB que, por ser rectángulo en A,

;

15.- Sea π el plano de ecuación π: 3x – 2y – 6z = 1 y sea r la recta dada en forma paramétrica

por r: (x, y, z) = (1, 0, 1) + λ(2, –1, 1) (λ ∈ R )

(a) ¿Cómo se define la relación de paralelismo entre una recta y un plano?

(b) En el caso concreto de la recta r y el plano π, ¿cómo averiguarías si son paralelos?

Comprueba si lo son.

**Resolución**

Como el punto (1, 0, 1) de r no pertenece a π (no cumple su ecuación: 3.1 – 2.0 – 6.1 = –3 ≠ 1) resulta que r ⊄ π.

Si es un vector director de r y un vector normal de π, entonces r // π ⇔ ⇔ .

En este caso, , ⇒ r ~~//~~ π

(c) ¿Cómo se define la relación de perpendicularidad entre una recta y un plano?

(d) En el caso concreto de la recta r y el plano π, ¿cómo averiguarías si son perpendiculares?

Comprueba si lo son.

**Resolución**

Si es un vector director de r y un vector normal de π, entonces r ⊥ π ⇔ .

En este caso, , ⇒ r ~~⊥~~ π

16.- Considera el punto P(–1, 2, 1).

(a) Determina un punto Q del plano π: –3x + y + z + 5 = 0 de forma que el vector sea perpendicular al plano π.

**Resolución**

Observamos que P ∉ π porque no cumple su ecuación: –3(–1) + 2 + 1 + 5 = 11 ≠ 0

Si Q(x, y, z) es el punto de π que buscamos, –3x + y + z + 5 = 0 por pertenecer a π y

⇒ .

Queda el sistema

, . Sumando, 11z = 0, z = 0 ; y = 0 + 1 = 1 ; x + 3.0 = 2, x = 2

Por tanto, el punto Q que buscamos es Q(2, 1, 0)

(b) Determina un punto M de la recta de forma que el vector sea

paralelo al plano π.

**Resolución**

M(2 – k, –1 + k, 10 – k) ∈ r. Como ⇒ ⇒

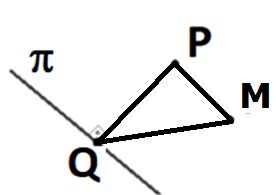
Operando, –3k + 9 + 3 – k + k – 9 = 0, –3k = –3, k = 1. Luego, el punto M buscado es M(1, 0, 9)

(c) Calcula el área del triángulo MPQ.

**Resolución**

De los apartados anteriores P(–1, 2, 1), Q(2, 1, 0) y M(1, 0, 9)

Como y , entonces el triángulo MPQ es rectángulo en P



; ,

**17.-** **(prueba extraordinaria)** Prueba que todos los planos de la familia (3 + λ)x + (3 – λ)y + (5 – 2λ)z = λ

(con λ ∈ R) contienen una misma recta y halla unas ecuaciones paramétricas de dicha recta.

**Resolución**

Desarrollando la ecuación, 3x + λx + 3y – λy + 5z – 2λz – λ = 0 ⇒ 3x +3y – 5z + λ(x – y – 2z – 1) = 0

Por tanto, la familia de planos tiene como base la recta

Es decir, todos los planos de la familia contienen a la recta r. Pongamos r en forma paramétrica:

Hacemos z = 0, ; sumando, 6x = 3, ; restando, 6y = –3,

Luego, el punto ∈ r. Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores

normales de los planos que la definen: .

Por tanto,

**18.- (prueba extraordinaria)**

(a) Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C(3, 2) y una de cuyas rectas tangentes tiene de ecuación 4x – 3y – 5 = 0.

(b) Determina si el punto X(3, 3) es interior, es exterior o está en la circunferencia.

**Resolución**

El radio R es la distancia del centro a la tangente r: 4x – 3y – 5 = 0 ⇒ R = dist(C, r) =

Hemos usado la fórmula de la distancia de un punto a una recta.

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es

Para (b) sustituyendo X(3, 3), se tiene ⇒ X es exterior.

19.- Considera el plano π: 2x + 2y + z + 7 = 0, la recta y el punto A(1, 5, –4).

(a) Determina razonadamente si existe y, en ese caso, halla un punto B de la recta r tal que la recta que pasa por los puntos A y B es paralela al plano π.

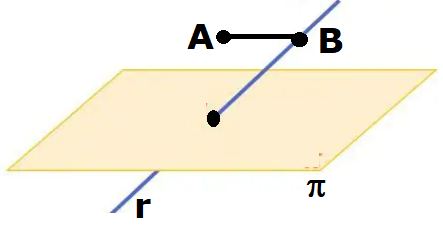
**Resolución**

es un vector director de r y un vector normal de π.

⇒ r ~~//~~ π. Como ⇒ r ~~⊥~~ π

π : 2x + 2y + z + 7 = 0, y A(1, 5, –4).

A **∉** π y A **∉** r porque no cumple ninguna de las ecuaciones.



. Buscamos un punto de r, B(1 + k, 2 + 2k, 1 + 3k), tal que .

Si , entonces . Luego,

Operando, 2k – 6 + 4k + 5 + 3k = 0, 9k = 1, ⇒ ⇒

(b) Determina razonadamente si existe y, en ese caso, halla un punto C de la recta r tal que la recta que pasa por los puntos A y C es perpendicular al plano π.

**Resolución**

Buscamos un punto de r, C(1 + k, 2 + 2k, 1 + 3k), tal que .

Si , entonces ⇒

Resolviendo, por una parte k = 2k – 3 ⇒ k = 3 ; por otra, 3k = 6k + 10, 3k = –10,

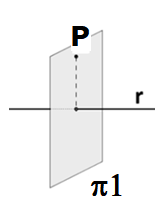
Luego, no existe el tal punto C

20.- Considera la recta

(a) Determina la ecuación del plano π1 que es perpendicular a la recta r y pasa por el punto P(1, 2, 3).

**Resolución**

P(1, 2, 3) ∉ r porque no cumple su ecuación:



Un vector normal del plano π1 que se pide es

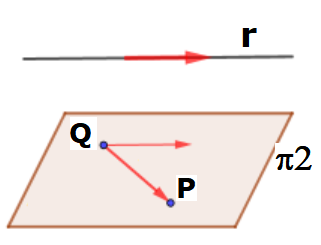
Como π1 pasa por P(1, 2, 3), entonces π1: 3(x – 1) + 2(y – 2) – 1(z – 3) = 0 ⇒ π1: 3x + 2y – z – 4 = 0

(b) Determina la ecuación del plano π2 que es paralelo a la recta r y pasa por los

puntos P(1, 2, 3) y Q(–1, 0, 2).

**Resolución**

Q(–1, 0, 2)**∉** r porque no cumple su ecuación:



y son vectores directores del plano π2 que se pide. Luego, un vector normal de π2 es

Y como π2 pasa por P(1, 2, 3), entonces π2: 4(x – 1) – 5(y – 2) + 2(z – 3) = 0 ⇒ π2: 4x – 5y + 2z = 0

(c) Sea s la recta en la que se cortan los planos π1 y π2. Determina de forma razonada la posición

relativa de las rectas r y s.

**Resolución**

A(1, 0, –1) ∈ r ; un vector director de r

. Hacemos y = 0,

Sustituyendo, 3x – (–2x) = 4, , . Luego, ∈ s

Un vector director de s se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen:

Como ,

entonces los vectores son l.i. Luego, r y s se cruzan

21.- De todos los planos que contienen la recta r dada por

(a) Determina el que pasa por el punto P(1, 4, 0)

**Resolución**

El haz de planos que contiene a r (excluyendo el plano , plano que no pasa por P) es

, con k ∈ R. Imponemos que el plano del haz pase por P(1, 4, 0):

.

Sustituyendo, el plano que se pide es

(b) Determina uno que esté a 3 unidades de distancia del origen. ¿Cuántas soluciones hay?

**Resolución**

Usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano,

3 = dist(O, hk) =

Por tanto, . Elevamos al cuadrado:

Para k = 2, obtenemos el plano hallado en (a),

Para k = 4, obtenemos el plano

Por tanto, hay dos soluciones.

22.- Considera la recta r y el plano π dados, en función de un parámetro real a,

por y π: 3x – z = a.

(a) Estudia la posición relativa de la recta y el plano según los valores del parámetro a.

**Resolución**

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen:

Un vector normal de π es:

Si a ≠ 0, a ≠ 3, ⇒ r y π son secantes.

Si a = 0, ⇒ r // π ó r ⸦ π.

, π ≡ 3x – z = 0, A(0, 0, 0) ∈ r y A ∈ π (cumple su ecuación: 3.0 – 0 = 0) ⇒ r ⸦ π.

Si a = 3, ⇒ r // π ó r ⸦ π.

, π ≡ 3x – z = 3, A(0, 0, 0) ∈ r y A ∉ π (no cumple su ecuación: 3.0 – 0 ≠ 3) ⇒ r // π.

(b) Para a = 1 determina el punto de intersección de la recta con el plano.

**Resolución**

Si a = 1, ⇒ r y π son secantes. Para hallar el punto de intersección resolvemos el sistema

4x + 2(2 – 3x) = 1, 2x = 3, ; ; .

El punto de corte es

23.- Se sabe que la siguiente matriz M tiene rango 1,

(a) ¿Pueden determinarse a, b, c, d? Justifica la respuesta y, en caso afirmativo, hállalos.

**Resolución**

Al ser rg M = 1, todos los menores de orden 2 son nulos. En particular,

;

;

Para estos valores, , que tiene rango 1.

(b) ¿Cuál es la situación de los planos de ecuaciones respectivas

π1: 5x + 6y + 7z = 5, π2: x + ay + bz = 2 y π3: 2x + cy + dz = 1?

**Resolución**

Al ser rg M = 1, los tres planos tienen el mismo vector normal. Luego, sabemos que no son secantes.

Sustituyendo los valores encontrados en (a),

. Como vemos

24.- Consideremos el punto P(1, 0, –1) y la recta r dada por

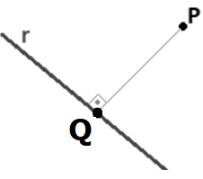
(a) Halla el punto de r más cercano a P y la distancia entre P y r.

**Resolución**

; si x = 0 ; y = 0. Luego,

Un vector director de r es y

El punto de r que buscamos es de la forma Q(k, –k, 1) de forma que

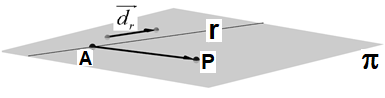


⇒ k – 1 + k = 0 , . Por tanto,

(b) Determina el plano que pasa por el punto P y contiene la recta r.

**Resolución**

Observamos que P(1, 0, –1) ∉ r porque no cumple sus ecuaciones:



Sabemos del (a) que y

El plano π que nos piden tiene como vectores directores y

Un vector normal de π es

Como π pasa por P(1, 0, –1), entonces π: 2(x – 1) + 2(y – 0) + 1(z + 1) = 0 ⇒ π: 2x + 2y + z – 1 = 0

25.-

(a) Demuestra que las rectas r y s dadas por y

se intersecan y halla el punto dónde lo hacen.

**Resolución**

Igualando las componentes,

Queda . Luego, se cortan en , P(–1, 2, 0)

(b) Halla la ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

**Resolución**

Al ser r y s secantes, son vectores directores del plano π que se pide.

Un vector normal de π es

Y como π pasa por A(2, 4, 1) de r ⇒ π: –1(x – 2) + 1(y – 4) + 1(z – 1) = 0 ⇒ π: –x + y + z – 3 = 0

26.-

(a) Determina los valores del parámetro a para los que los siguientes vectores

de R3: (1, 1, a), (a, 3, 2) y (0, 0, a), son linealmente independientes. Justifica la respuesta.

**Resolución**

Los vectores , y son l.i. ⇔

Hallemos el determinante:

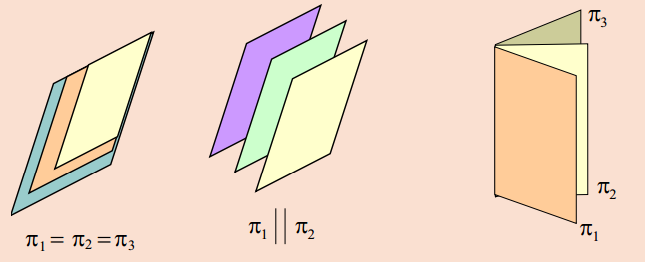
Luego, para a ≠ 0, a ≠ 3 los vectores son l.i.

(b) Determina la posición relativa de los planos cuyas ecuaciones son:

π1: x + y + 3z = 5, π2: 3x + 3y + 2z = 8 y π3: 3z = 3.

**Resolución**

Para a = 3 los vectores normales de los planos son, respectivamente , y , que no son proporcionales (los planos no son paralelos ni coincidentes) y como , y, por tanto, los tres planos se cortan en una recta



27.- Calcula todos los planos perpendiculares a la recta r de ecuaciones paramétricas , que se encuentran a 2 unidades de distancia del punto P(2, –7, 1).

**Resolución**

Los planos π que buscamos son perpendiculares a r. Luego, un vector normal de π es

. Por tanto, su ecuación es de la forma π: x – 4z + c = 0

Usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

2 = dist(P, π) = . Elevando al cuadrado obtenemos

c2 – 4c + 4 = 68 ⇒ c2 – 4c – 64 = 0 ⇒

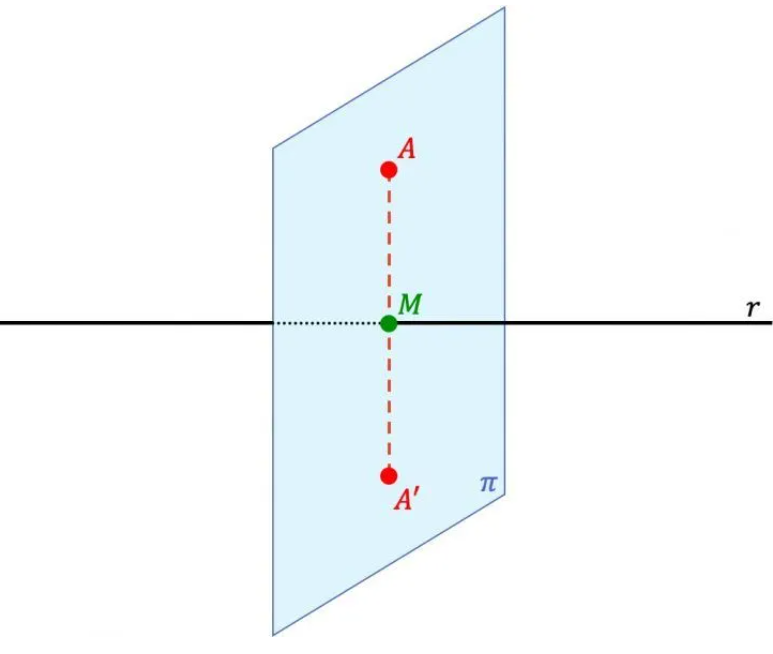
Hay dos planos, y

28.- Dado el punto A(3, 1, 0), halla su simétrico respecto de la recta r dada por las

ecuaciones paramétricas

**Resolución**

El punto simétrico de A(3, 1, 0) respecto de la recta r sería el punto A´ del dibujo.



- Hallamos el plano π que pasa por A y es ortogonal a la recta r

Un vector normal del plano es el vector director de r:

Y como π pasa por A(3, 1, 0) , π: 1(x ‒ 3) – 1(y – 1) + 2(z – 0) = 0 → π: x – y + 2z – 2 = 0

- Hallamos M, punto de corte de r y π, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

Sustituyendo en la ecuación del plano, 1 – t + 2 – t – 4t – 2 = 0 → –6t + 1 = 0 ;

Luego, . El punto de corte es

- Por último, hallamos el simétrico A´(a, b, c) de A(3, 1, 0)usando que M es el punto medio del

segmento AA´: . Luego,

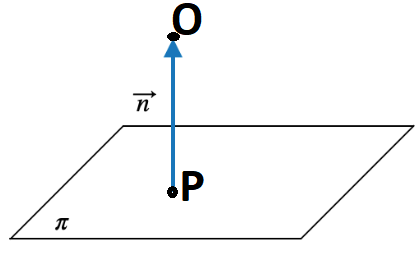
**OTROS DEL 1999 (COU I)**

1.-

a) Halla razonadamente la ecuación del plano π cuyo punto más próximo al origen es P(–1, 1, 2).

**Resolución**

Sea O(0, 0, 0) el origen y P(–1, 1, 2) ∈ π, plano que se busca.



Un vector normal de π es

Y como π pasa por P(–1, 1, 2) ⇒ π: –1(x + 1) + 1(y – 1) + 2(z – 2) = 0 ⇒ π: –x + y + 2z – 6 = 0

b) Halla la recta r que corta al eje OZ y cuyo punto más próximo al origen es P.

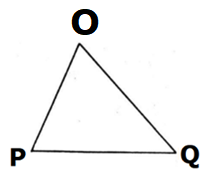
c) Calcula el área del triángulo OPQ siendo O el origen de coordenadas y Q el punto de corte de la recta r del apartado anterior con el eje OZ.

**Resolución**

Dado que P(–1, 1, 2) es también el punto de r más próximo al origen, entonces r ⸦ π.

Hallemos Q, el corte de π con el eje : 0 + 0 + 2z – 6 = 0, z = 3, punto Q(0, 0, 3).

La recta r que se busca pasa por Q y tiene vector director ⇒



;

2.- Sea r la recta dada por las ecuaciones paramétricas x = 1 + λ, y = –16 + λ, z = –2 + 5λ.

Calcula el punto de r que está más cerca del eje OX.

**Resolución**

Estudiemos la posición relativa de r y s = OX:

A(1, –16, –2) ∈ r y un vector director de r es

O(0, 0, 0) ∈ s y un vector director de s es

Como , entonces los vectores son l.i. Luego, r y s se cruzan

Sea un punto genérico de r (el que está más cerca de s) y punto genérico de s. Entonces, es perpendicular a y a .

Luego, paralelo a ⇒

Operando, ; k = 1, 1 + 1 – k´ = 0, k´= 2.

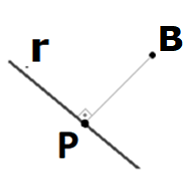
Luego, el punto de r más próximo a OX es P(2, –15, 3)

3.- Sea r la recta que pasa por el punto A(0, 2, 1) y tiene como vector director el vector .

(a) Halla el punto P de la recta r que está más cerca del punto B(4, 7, 5).

**Resolución**

El punto P que buscamos de r es de la forma P(k, 2 – k, 1 + k) de forma que

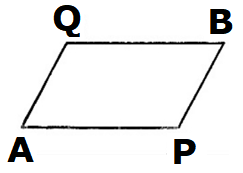


⇒ k – 4 + 5 + k – 4 + k = 0, k = 1. Luego, P(1, 1, 2)

(b) Halla el cuarto vértice Q del paralelogramo con vértices consecutivos APBQ.

**Resolución**

A(0, 2, 1), P(1, 1, 2), B(4, 7, 5), Q(x, y, z)



Por ser un paralelogramo,

Igualando las componentes, 1 = 4 – x, x = 3 ; –1 = 7 – y, y = 8 ; 1 = 5 – z, z = 4. Luego, Q(3, 8, 4)

(c) ¿Puedes especificar qué tipo de paralelogramo es APBQ?

**Resolución**

⇒

;

Por tanto, el paralelogramo es un rectángulo.

4.- De entre todos los planos que contienen a la recta r dada por calcula la ecuación

del que pasa por el origen de coordenadas.

**Resolución**

Pongamos la recta r en forma implícita:

El conjunto de planos que contienen la recta r es , h´: 5y – z + 3 = 0.

El plano que buscamos debe pasar por O(0, 0). Luego,

Sustituyendo, el plano que buscamos es . Multiplicando por 3:

π: 3x – 3y – 6 + 10y – 2z + 6 = 0 ⇒ π: 3x + 7y – 2z = 0

5.- Las ecuaciones paramétricas de una recta r y de un plano π son,

respectivamente, y , donde λ, α y β son parámetros reales.

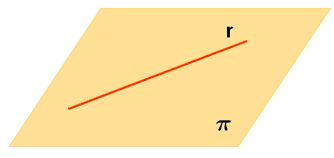
(a) ¿Cuál es su posición relativa?

**Resolución**

O(0, 0, 0) ∈ r y un vector director de r es

Un vector normal de π se obtiene como producto vectorial de los vectores que lo definen:

⇒ r // π ó r ⊂ π. Como O(0, 0, 0) es común a r y a π ⇒ r ⊂ π



(b) Encuentra la ecuación de un plano que sea perpendicular al plano π y que pase por el origen de coordenadas y por el punto P(1, 2, 3).

**Resolución**

Un vector normal del plano α que se pide se obtiene como producto vectorial de los vectores que lo definen, que son y :

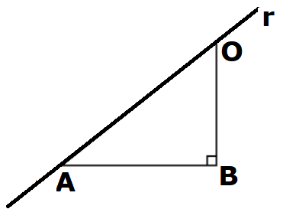
Y como α pasa por O(0, 0, 0) ⇒ α: 1(x – 0) + 1(y – 0) – 1(z – 0) = 0 ⇒ α: x + y – z = 0

(c) Determina un punto A de la recta r de manera que el triángulo de vértices A, B(4, 4, 4) y el origen

de coordenadas sea rectángulo en B.

**Resolución**

Como , el punto A de r que buscamos es de la forma A(k, k, 0)



Al ser el triángulo rectángulo en B, .

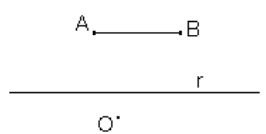
Operando, 4k – 16 + 4k – 16 – 16 = 0, 8k = 48, k = 6 y el punto buscado es A(6, 6, 0)

6.- Considera el punto A(1, 1, 0) y la recta r dada por

(a) Halla el punto B más próximo al origen de coordenadas de los que verifican que el segmento AB es

paralelo a r y mide 4 unidades de longitud.

**Resolución**



Ponemos r en forma paramétrica: haciendo x = 0, , y = 1, z = 1. El punto (0, 1, 1) ∈ r

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen, y

El punto que buscamos es B(x, y, z). Como AB // r, entonces

Luego, y B se puede poner de la forma B(1 + t, 1 – 2t, 2t)

Como AB mide 4 unidades, . Hay dos soluciones:

3t = 4, ,

3t = –4, ,

Veamos cuál de los dos puntos, B1 ó B2, está más próximo al origen, O(0, 0, 0):

Luego, el punto B que buscamos es el de coordenadas

(b) Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento AB en su punto medio.

**Resolución**

A(1, 1, 0) y . El punto medio de AB es

Un vector normal del plano π que se pide es

Y como π pasa por ⇒ . Multiplicando por 3:

π: 3x – 5 – 6y – 2 + 6z – 8 = 0 ⇒ π: 3x – 6y + 6z – 15 = 0 ⇒ π: x – 2y + 2z – 5 = 0

7.- Considera los cuatro vectores de R3:

(a) Prueba que los tres vectores son linealmente independientes.

**Resolución**

. Luego, los vectores son l.i.

(b) Determina, si es posible, los números reales α, β, γ, que verifican

**Resolución**

. Igualando las componentes,

; resolviendo, α = 2, β = 3, γ = 2

8.- Dadas las rectas , ,

determina la recta r que corta a las rectas r1 y r2 y es paralela a r3.

**Resolución**

Para , si x = 0, ; y = 0, z = 0. Luego,

Un vector director de se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen, ;

Para , si y = 0, ; x = 1, y = 0, z = 1. Luego,

Un vector director de se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen, ;

Un punto genérico de es P(–2k, k, 3k) y un punto genérico de es Q(1 + 2k´,–3k´, 1 + 5k´)

La recta r que se pide pasa por P y Q y tiene vector director que debe ser paralelo al vector director de r3, que es .

Luego, . Operando,

Multiplicando la 1ª ecuación por 3: . Sumando, 16k´= 16, k´= 1 ; 9k – 5.1 = 4, k = 1

Sustituyendo en las coordenadas de P se obtiene P(–2, 1, 3). Por tanto, la recta r que se pide pasa

por P(–2, 1, 3) y tiene vector director ⇒

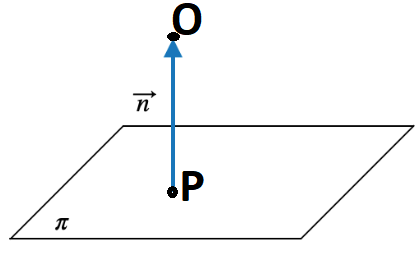
**OTROS DEL 1999**

1.-

(a) Determina razonadamente el plano π cuyo punto más cercano al origen es el (1, –2, 2).

**Resolución**

Sea O(0, 0, 0) el origen y P(1, –2, 2) ∈ π, plano que se busca



Un vector normal de π es

Y como π pasa por P(1, –2, 2) ⇒ π: 1(x – 1) – 2(y + 2) + 2(z – 2) = 0 ⇒ π: x – 2y + 2z – 9 = 0

(b) Determina el plano π´ simétrico del plano π con respecto al origen.

**Resolución**

Como π no pasa por el origen, el plano π´que se pide debe ser paralelo a π y dist(O, π´) = dist(O, π)

Luego, es de la forma π´: x – 2y + 2z + k = 0. Hallemos el parámetro k:

Usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano

dist(O, π´) = dist(O, π) ⇒

Para k = –9 obtenemos el plano π y para k = 9 obtenemos el plano buscado π´: x – 2y + 2z + 9 = 0

(c) Estudia la compatibilidad del sistema formado por las ecuaciones de los planos π y π´ anteriores y la ecuación x – 3y + 7z = 2

**Resolución** Como π y π´son paralelos, entonces el sistema es incompatible

2.-

(a) Dados los vectores y , halla un tercer vector que sea linealmente

dependiente de los anteriores y ortogonal a .

**Resolución**

Sea el vector buscado. Por ser ortogonal a se cumple ⇒ 2a + b + 2c = 0

Por ser l.d. ,

Obtenemos el sistema

Sustituyendo en la 2ª ecuación,

. Por tanto, hay infinitos vectores

(b) Sin realizar los cálculos, razona por qué vale cero el determinante cuyas columnas son y.

**Resolución** Por ser l.d.

(c) Sin realizar los cálculos, razona por qué no vale cero el determinante cuyas columnas son, respectivamente, y.

**Resolución** Por ser l.i. pues claramente son no proporcionales y ser ortogonal a y a

3.- Considera las rectas , s: x = y – 1 = –z

(a) Comprueba que están en el mismo plano π y halla la ecuación de dicho plano.

**Resolución**

Poniendo s en forma paramétrica, . Sustituyendo en r,

Simplificando, . Esto significa que las rectas se cortan en el punto P(1, 2, –1).

Por tanto, las rectas están en el mismo plano. Hallemos la ecuación del plano π:

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que

definen a la recta r: y uno de s es

Un vector normal de π que se pide es

Y como π pasa por P(1, 2, –1), entonces π: 2(x – 1) – 1(y – 2) + 1(z + 1) = 0 ⇒ π: 2x – y + z + 1 = 0

(b) Determina razonadamente las ecuaciones de la proyección ortogonal de la recta t sobre el plano π,

siendo t: x = 1 + λ , y = 2 + λ , z = –1 + λ

**Resolución**

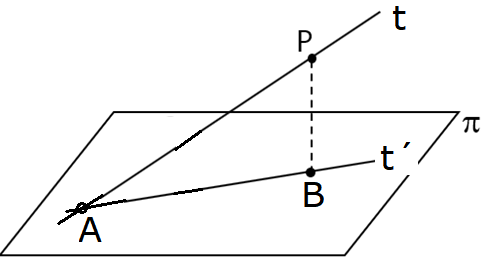
Del apartado anterior, π: 2x – y + z + 1 = 0, de vector normal .

Un vector director de t es . Observamos que ⇒ π y t son secantes.

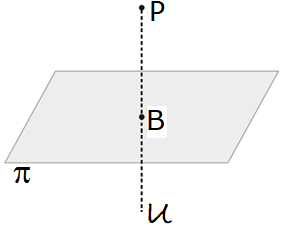
Hallemos el punto de corte: sustituyendo t en la ecuación de π,

2(1+ λ) – (2 + λ) + (–1 + λ) + 1 = 0 ⇒ λ = 0; el punto de corte es A(1, 2, –1).

Hallamos otro punto P de la recta t. Por ejemplo, para λ = 1, P(2, 3, 0).



Primero hallamos el punto B, que es la proyección ortogonal de P sobre el plano π:



Hallamos la recta u: como u ⊥ π un vector director de u es y como u pasa

por P(2, 3, 0), entonces . B es el punto de corte de la recta u con el plano: sustituyendo en

la ecuación de π, 2(2 + 2k) – (3 – k) + k + 1 = 0 ⇒ ; el punto de corte

es . O sea .

Un vector director de la recta t´, proyección ortogonal de t sobre π es

. Y como t´ pasa por A,

4.- Considera la matriz

(a) Calcula S = AtA.

**Resolución**

(b) Determina si S es invertible enunciando las propiedades que utilices.

**Resolución**

S es invertible ⇔ det S ≠ 0 ; Usando la regla de Sarrus, det S = 2 + 0 + 0 – 0 – 1 – 1 = 0. Luego, S no es invertible

(c) Halla el valor de λ para el que el conjunto de las soluciones del sistema SX = c, siendo c = (λ 1 λ)t, es una recta en R3.

**Resolución**

Dado que det S = 0 y rg S = 2 porque el menor para que la solución del sistema sea una

recta, debe ser también . En particular

Desarrollando, λ + λ – 1 = 0 ;