**1.-** **(prueba ordinaria)** Las ganancias de una empresa, en millones de pesetas, se ajustan a la función

donde x representa los años de vida de la empresa, cuando x ≥ 0.

a) Represente gráficamente la función y = f(x) para x ∈ (–∞ , +∞), indicando: dominio, corte con los ejes,

asíntotas, crecimiento y decrecimiento.

**Resolución**

Como 2x + 5 = 0 ⇔ x = –2,5. Luego, Dom(f) = R – {–2,5}

Por otra parte, como y , la gráfica de f corta a los ejes de coordenadas en los puntos

Para no es continua por no estar definida y .

Luego, f(x) tiene una asíntota vertical en cuya ecuación es A.V. :

Además,

Estudiemos las asíntotas en ±∞: .

Luego, f(x) tiene asíntota horizontal en ±∞ de ecuación AH:

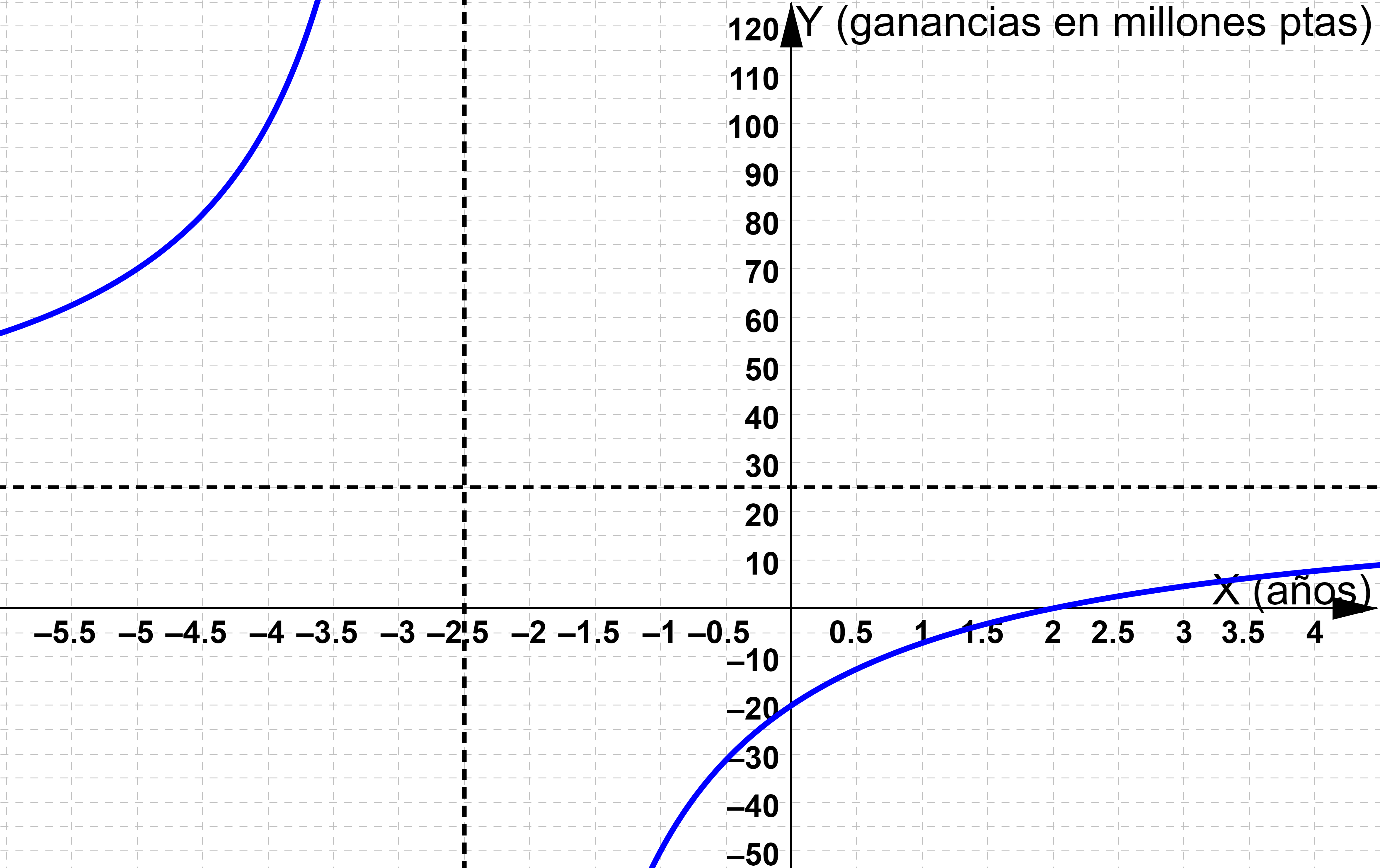
Estudiemos la posición de la gráfica respecto la asíntota: .

. Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en –∞

. Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en +∞

Observamos también que .

Luego, f es creciente en R – {–2,5}. No hay máximos ni mínimos



b) ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas?

**Resolución** A partir del 2º año de vida

c) A medida que transcurre el tiempo, ¿están limitados sus beneficios?

En caso afirmativo, ¿cuál es su límite?

**Resolución** Sí, están limitados por 25 millones de ptas

**2.- (prueba ordinaria)** Dada la función

a) Calcule el valor de a para que f sea continua en x = 2.

**Resolución**

Para x ≠ –2, x ≠ 2, f es continua y derivable independientemente del valor de a por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Como debe ser continua en x = 2, .

b) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f cuando a = 2.

**Resolución**

Si a = 2, y para x ≠ –2, x ≠ 2

En x = –2:

;

Como entonces f NO es continua en x = –2 y, por tanto, tampoco es derivable.

En x = 2: Sabemos del a) que f es continua en x = 2

≠ ⇒ f NO es derivable en x = 2.

Luego, f es continua en R – {–2} y derivable en R – {–2 ; 2}

c) Dibuje la gráfica de la función que se obtiene cuando a = 2.

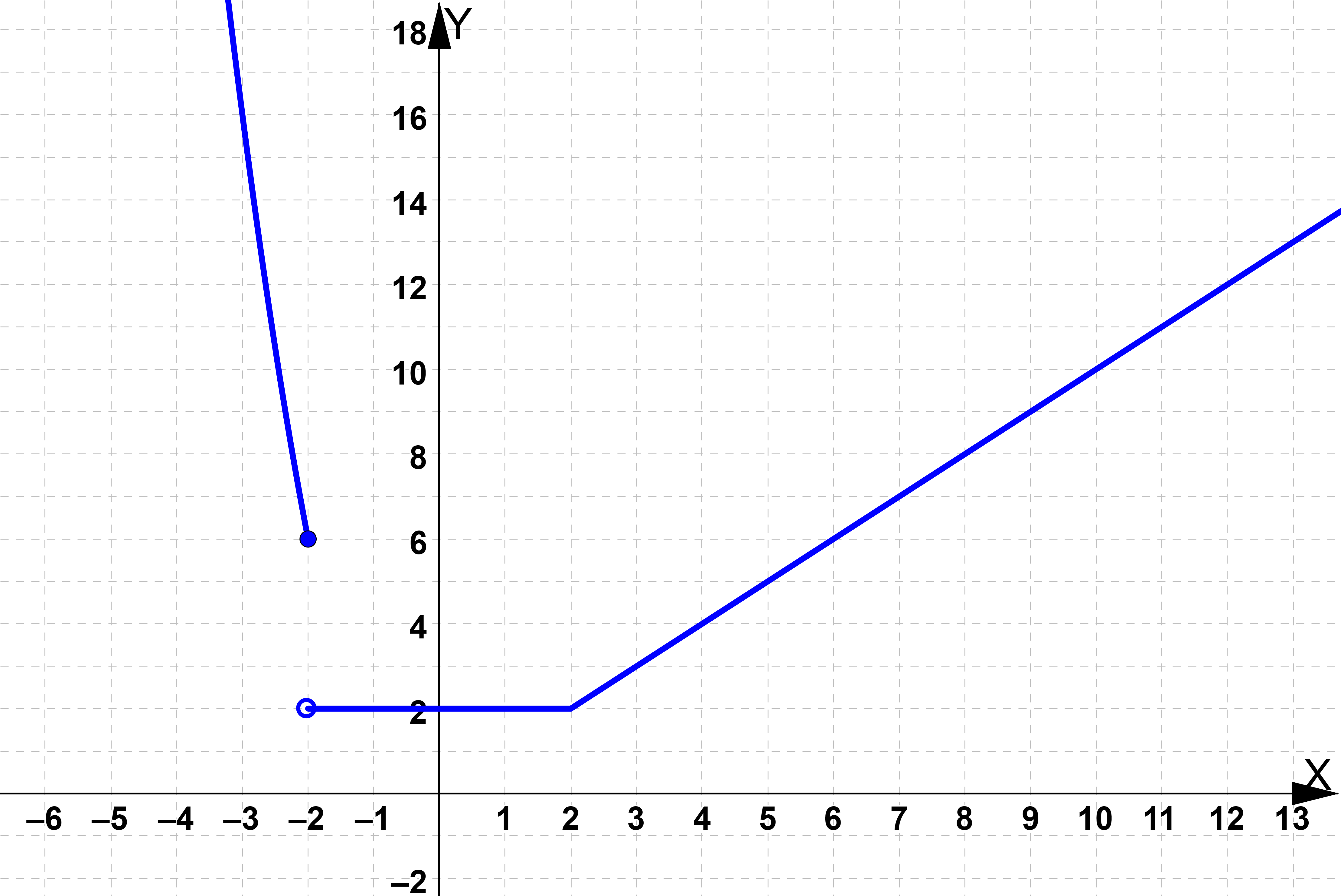
**Resolución**

La gráfica está formada un trozo de parábola y dos semirrectas.

Si x < –2, f´(x) = 4x < 0. Luego, el trozo de parábola corresponde a la rama decreciente.

Usamos el b) y además hallamos otro punto de la parábola y otro de la recta y = x:

para la parábola, x = –3, , punto (–3, 16) ; para la recta, x = 3, , punto



3.- Sea la función

a) Represéntela gráficamente.

**Resolución**

La gráfica está formada dos trozos de parábola.

Primer trozo:

Si x < 0, f´(x) = 2x + 1 ⇔ , f´´(x) = 2 ; . Luego, el mínimo relativo (vértice de la parábola) es , vértice

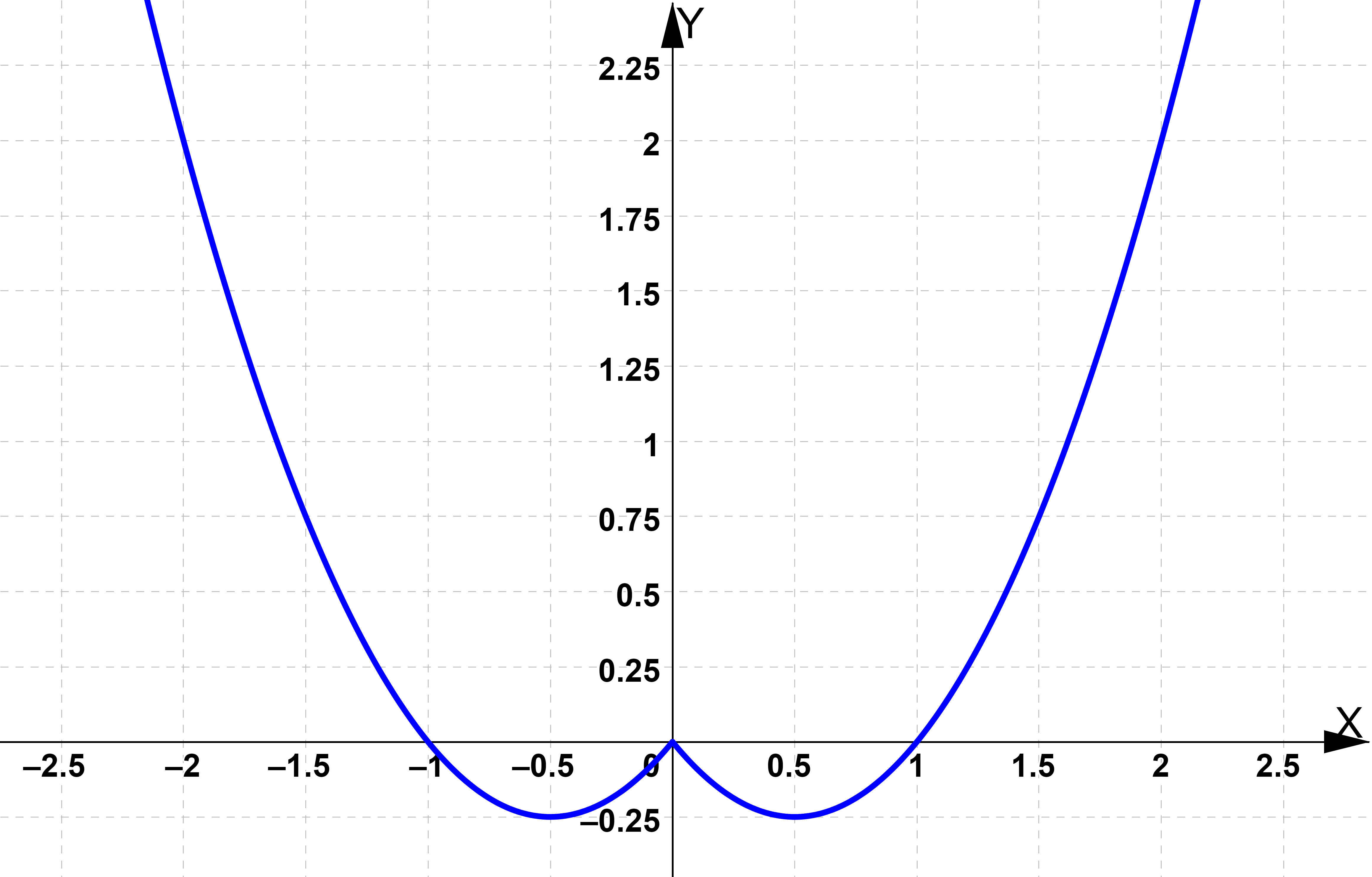
Segundo trozo:

Si x > 0, f´(x) = 2x – 1 ⇔ , f´´(x) = 2 ; . Luego, el mínimo relativo (vértice de la parábola) es , vértice

Por otra parte, si x < 0, x2 + x = x(x + 1) = 0 ⇔ x = –1 y si x ≥ 0, x2 – x = x(x – 1) = 0 ⇔ x = 1

junto con que f(0) = 0 concluimos que la gráfica corta a los ejes en (–1, 0), (1, 0) y (0, 0)

x = –1, , punto (–1, 2) ; x = 2, , punto



b) Estudie su continuidad.

**Resolución**

. Para x ≠ 0, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas.

= ⇒ f es continua en x = 0. Luego, f es continua en R.

c) Obtenga, si existe, la derivada de f en x = 1/2, x = –1/2 y x = 0.

**Resolución**

Para x ≠ 0, ⇒ ;

≠ ⇒ f NO es derivable en x = 0.

d) Indique si posee máximos y mínimos relativos y en qué puntos.

**Resolución**

Mínimos relativos: y Máximo relativo: P(0, 0)

4.- El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de pesetas

produce una ganancia de f(x) millones de pts, siendo

a) Represente la función f(x).

**Resolución**

La gráfica de f está formada por un trozo de parábola convexa y otro de hipérbola.

Como ; y al ser 0 ≤ x < 5

entonces x = 4. La gráfica corta al eje X en (4, 0)

Para x ≠ 5 f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas

y .

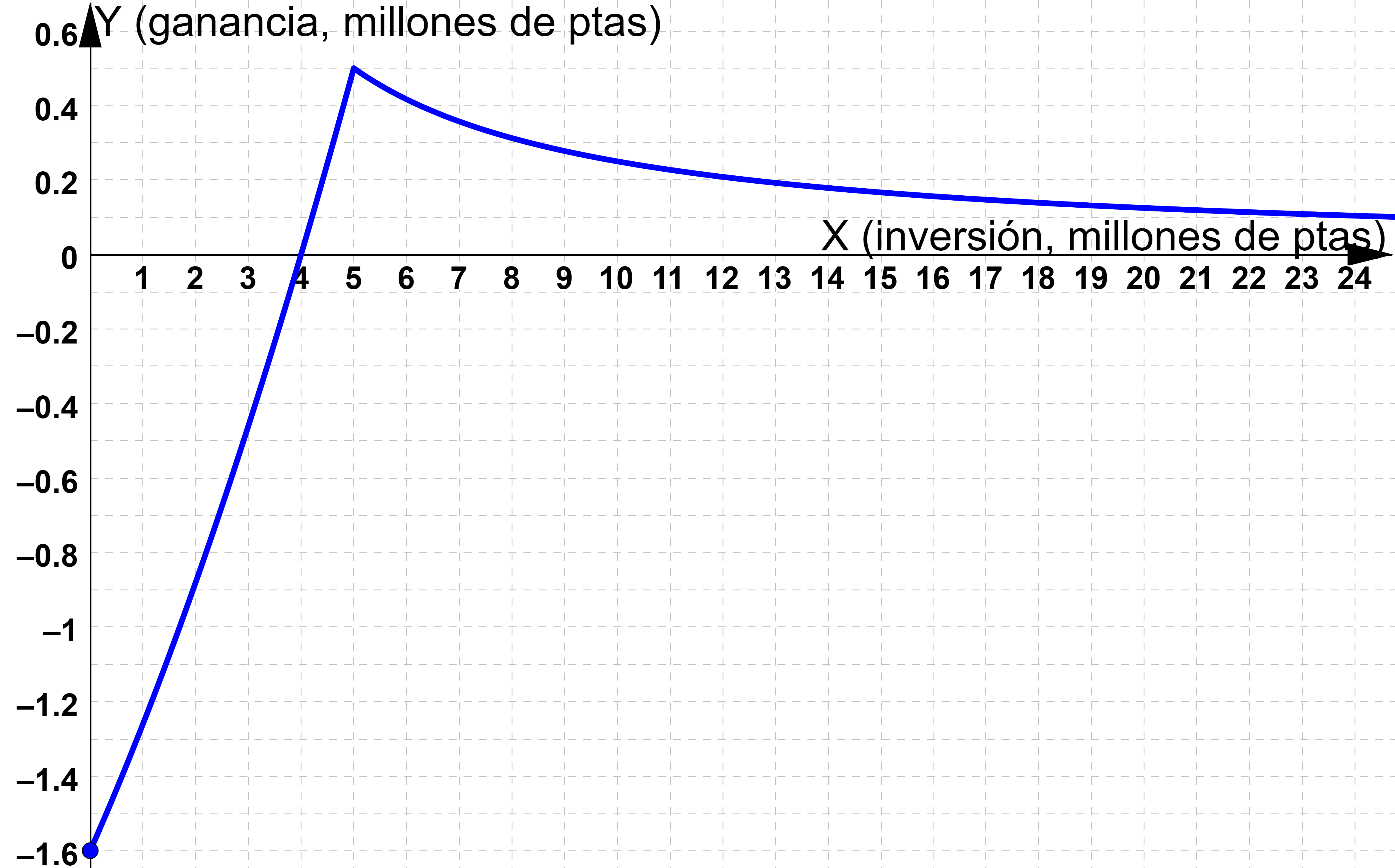
= ⇒ f es continua en x = 5

x = 0,

Si 0 ≤ x < 5, f´(x) > 0. Luego, el trozo de parábola corresponde a la rama creciente.

Hallamos otro punto de la hipérbola: x = 10,

Además,



b) Halle la inversión que produce máxima ganancia.

**Resolución**

Como el máximo es x = 5, y = 0,5, la inversión que produce máxima ganancia es 5 millones de ptas produciendo una máxima ganancia de 0,5 millones de ptas, o sea 500000 ptas.

c) Halle el valor de la inversión que produce ganancia nula.

**Resolución**

Como la gráfica corta al eje X en (4, 0), una inversión de 4 millones de ptas produce ganancia nula.

d) Razone lo que ocurre con la rentabilidad si la inversión se incrementa indefinidamente.

**Resolución**

Como si la inversión se incrementa indefinidamente la rentabilidad tiende a ser nula.

5.- Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba de modo que la altura “h” (en metros) a la que se

encuentra en cada instante “t” (en segundos) viene dada por la expresión: h(t) = –5t2 + 40t

a) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

**Resolución**

La gráfica está formada por un trozo de parábola en el intervalo [0, +∞).

; h´´(4) = –10 < 0 (cóncava)

Vértice de la parábola (máximo relativo): t = 4, h(4) = –5.42 + 40.4 = 80, V(4, 80).

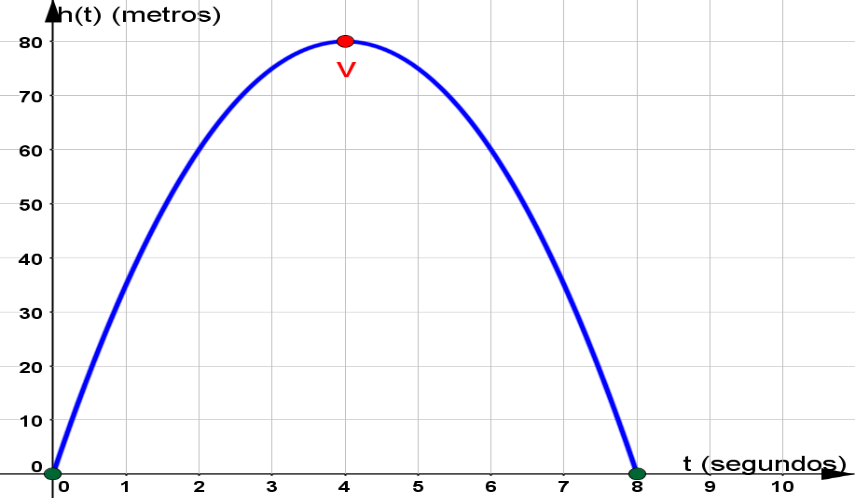
Luego, la altura máxima es de 80 metros y se alcanza en el instante t = 4 segundos.

b) Represente gráficamente la función h(t).

**Resolución**

Como h(t) = –5t2 + 40t = 5t(–t + 8) = 0 ⇔ t = 0 ó t = 8 y h(0) = –5.02 + 40.0 = 0, la gráfica corta a

los ejes en (0, 0) y (8, 0) y la gráfica sería:



c) ¿En qué momento de su caída se encuentra el objeto a 60 metros de altura?

**Resolución**

h(t) = –5t2 + 40t = 60 ; 5t2 – 40t + 60 = 0 ; t2 – 8t + 12 = 0 ; ; t = 2, t = 6

Luego, a los 6 segundos va cayendo y se encuentra a 60 metros.

d) ¿En qué instante llega al suelo?

**Resolución** Como h(8) = 0 el objeto llega al suelo a los 8 segundos

6.- Determine los valores que han de tomar “a” y “b” para que la función

sea derivable.

**Resolución**

Para x ≠ 1, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de

operar con funciones continuas y derivables.

Como debe ser continua en x = 1, .

Para x ≠ 1,

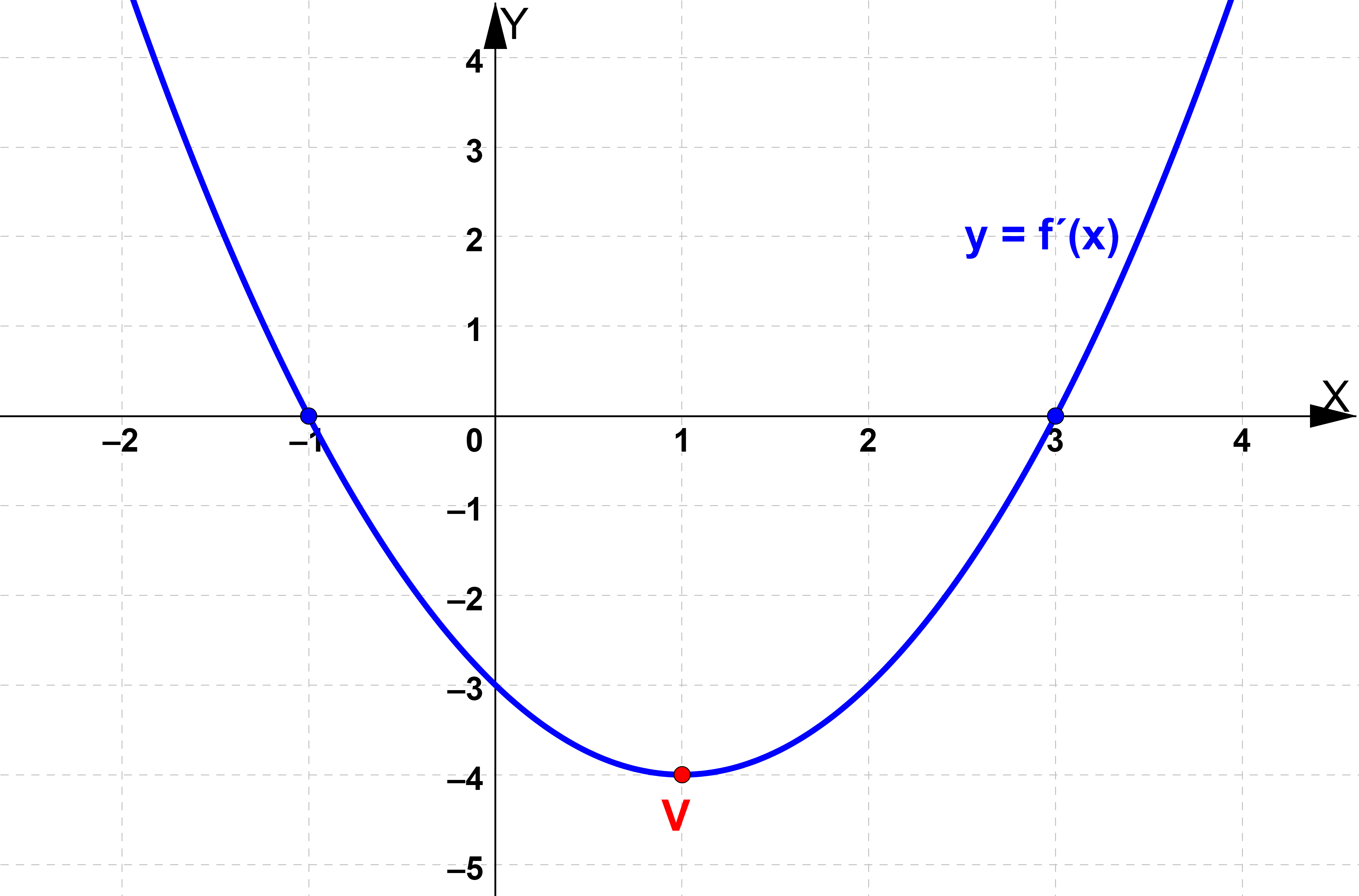
Como debe ser derivable en x = 1,

Sustituyendo en la 1ª ecuación, –1 – b = 5, de donde b = –6. Conclusión: a = –1, b = –6.

7.- La gráfica de la función derivada de una función f(x) es una parábola de vértice (1, –4) que corta al eje de abscisas en los puntos (–1, 0) y (3, 0). A partir de la gráfica de f´:

a) Estudie el crecimiento y el decrecimiento de f. ¿Para qué valores de x se alcanzan los máximos y mínimos relativos?

**Resolución**



f´(x) = 0 ⇔ x = –1, x = 3. Hagamos una tabla de signos de f´(x) teniendo en cuenta que su gráfica es una parábola convexa que corta al eje X en –1 y en 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| f´(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | creciente | máximo | decreciente | mínimo | creciente |

f es creciente en y decreciente en ;

Máximo relativo: x = –1 ; mínimo relativo: x = 3

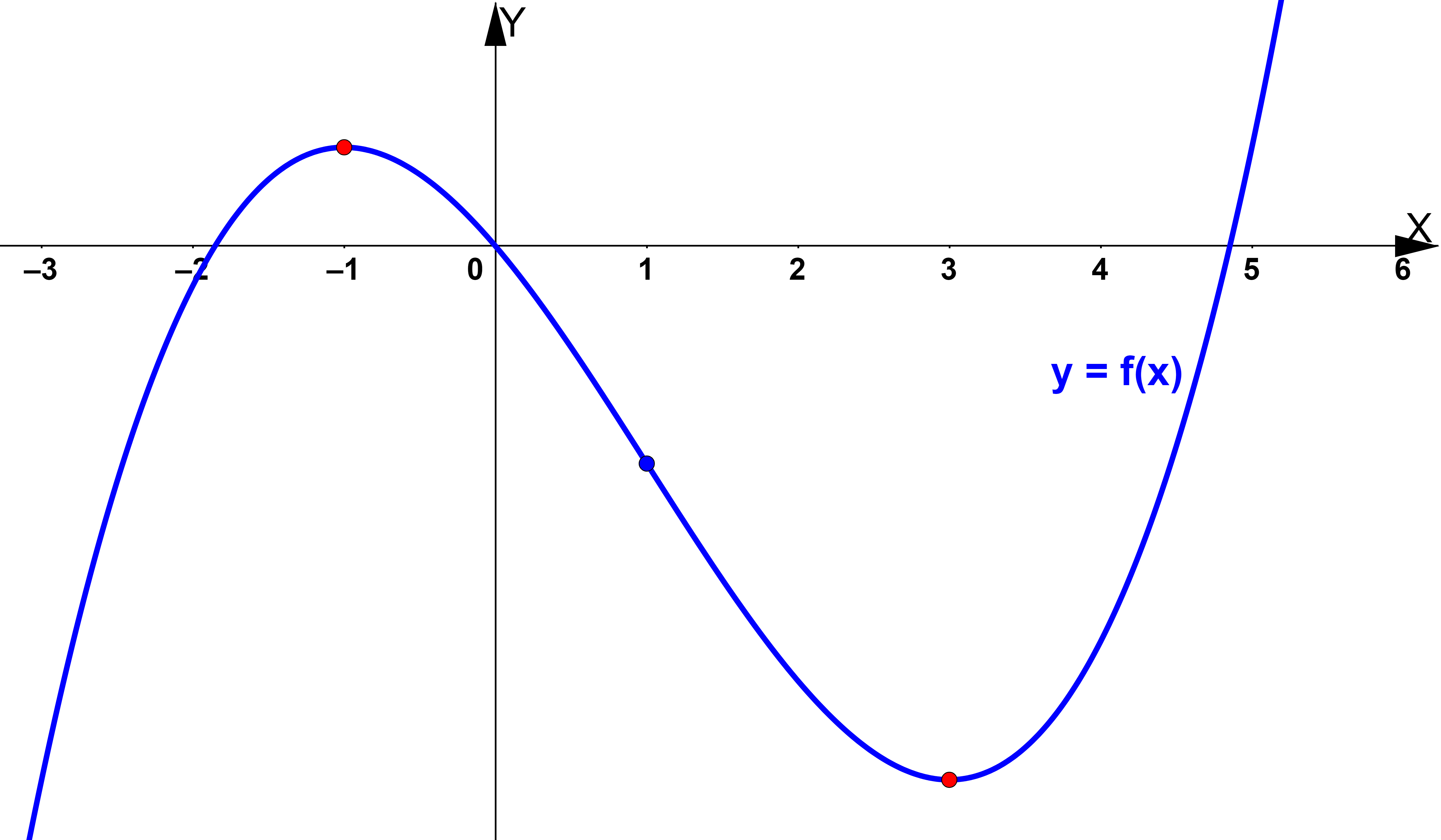
b) Esboce la forma de la gráfica de una función cuya derivada sea la parábola dada.

**Resolución**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| f´(x) | decreciente |  | creciente |
| f´´(x) | – |  | + |
| f(x) | cóncava | inflexión | convexa |

f es cóncava en y convexa en . Punto de inflexión en x = 1

Una de las infinitas gráficas de f(x) es



8.- En el año 2000 el consumo de luz (en miles de pesetas) de una vivienda, en función del tiempo transcurrido (en horas), nos venía dado por la expresión , 0 ≤ t ≤ 12

a) ¿En qué periodo de tiempo aumenta el consumo? ¿En cuál disminuye?

b) ¿En qué instante se produce el consumo máximo? ¿Y el mínimo?

c) Represente gráficamente la función.

**Resolución**

La gráfica está formada por un trozo de parábola en el intervalo [0, 12].

, punto (0, 10) ; punto (12 ; 5,2)

; (cóncava)

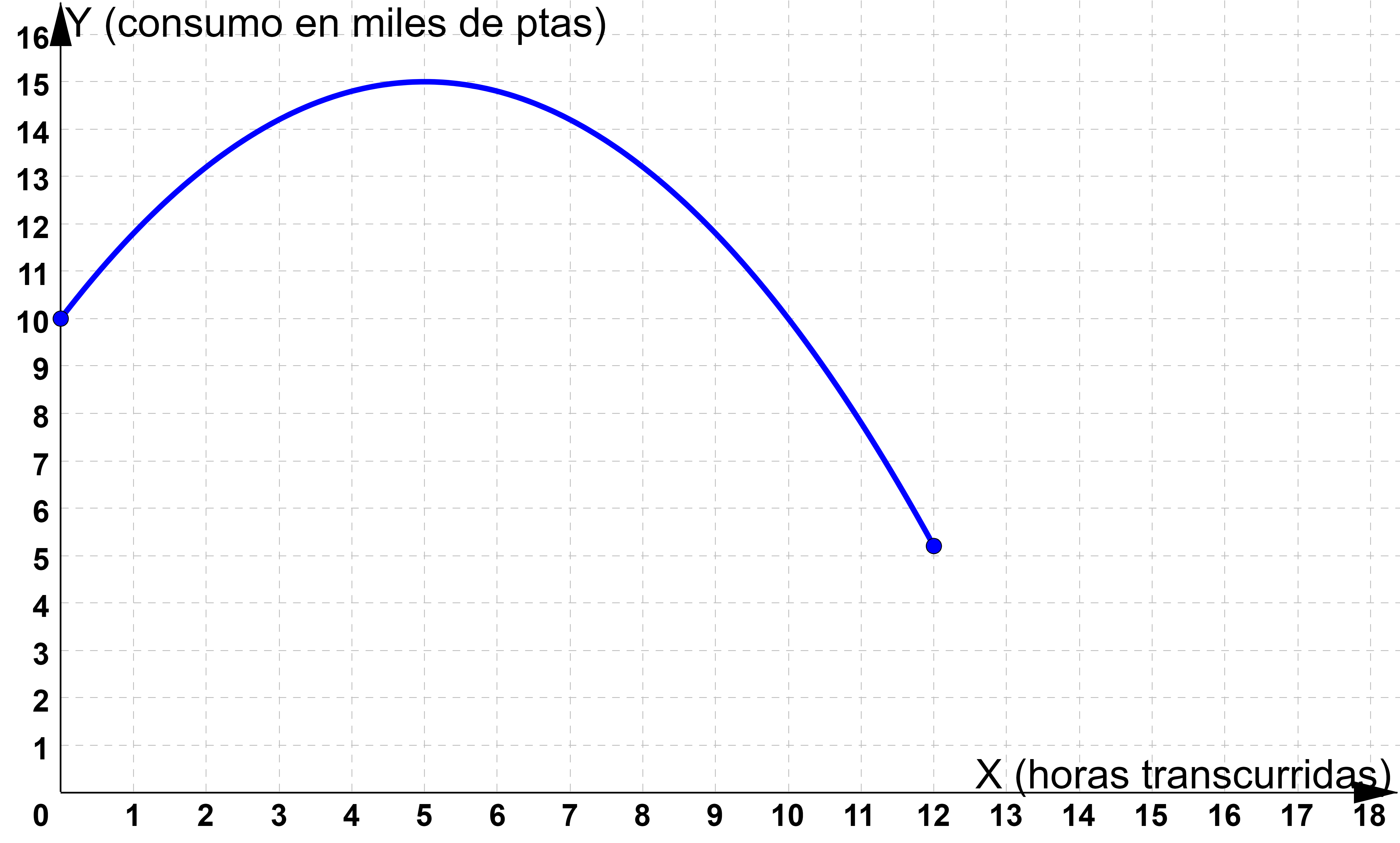
Vértice de la parábola (máximo relativo): t = 5, , V(5, 15)

Luego, f crece en el intervalo (0, 5) y decrece en (5, 12)

a) El consumo aumenta hasta las 5 horas y disminuye de las 5 horas hasta las 12 horas

b) El consumo máximo es de 15000 ptas y se produce a las 5 horas. El consumo mínimo es de 5200 ptas y se produce a las 12 horas

c)



**9.- (prueba extraordinaria)** Calcule las funciones derivadas de las siguientes:

a) **Resolución**

b) g(x) = (1 – x3) cos x **Resolución**

c) **Resolución**

**10.-** **(prueba extraordinaria)** Sea la función

a) Dibuje su gráfica y, a la vista de ella, estudie monotonía y extremos.

**Resolución**

La gráfica está formada tres trozos de parábola.

Primer trozo:

Si x ≤ 1, f´(x) = –2x = 0 ⇔ x = 0, f´´(x) = –2 ; . Luego, el máximo relativo (vértice de la parábola) es , vértice . Además,

Segundo trozo:

Si 1 < x ≤ 3, f´(x) = 6x – 12 = 0 ⇔ x = 2, f´´(x) = 6 ; . Luego, el mínimo relativo

(vértice de la parábola) es , vértice .

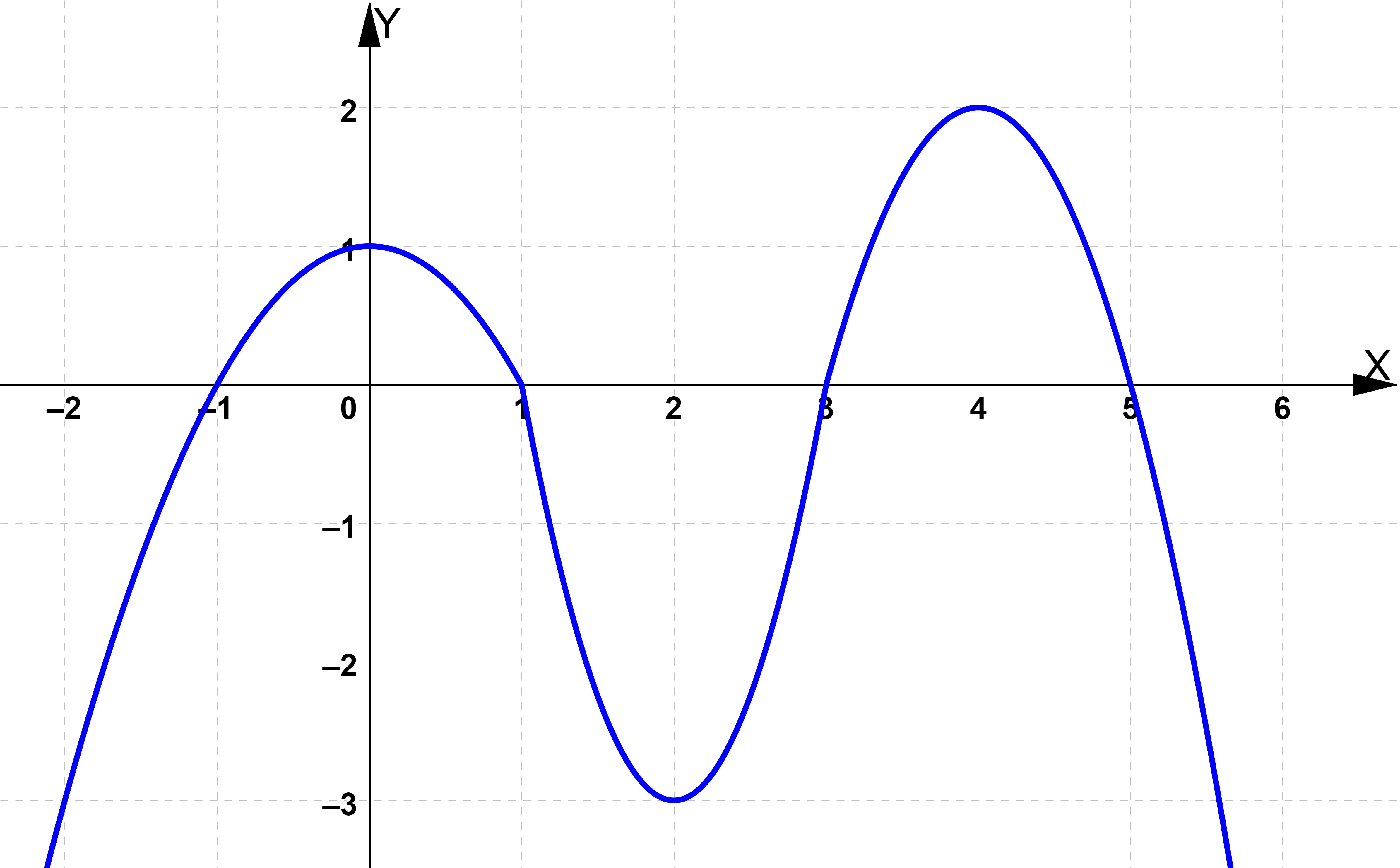
Además, y

Tercer trozo:

Si x > 3, f´(x) = –4x + 16 = 0 ⇔ x = 4, f´´(x) = –4 ; . Luego, el máximo relativo

(vértice de la parábola) es , vértice .

Además,



f es creciente en y decreciente en

b) Estudie su continuidad y derivabilidad.

**Resolución**

Para x ≠ 1, x ≠ 3 f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas.

Sabemos del a) que f es continua en R y para x ≠ 1, x ≠ 3

≠ ⇒ f NO es derivable en x = 1.

≠ ⇒ f NO es derivable en x = 3.

Luego, f es continua en R y derivable en R – {1 ; 3}

11.- Un agricultor comprueba que, si el precio al que vende cada caja de fresas es “x” euros, su beneficio diario, en euros, será: B(x) = –10x2 + 100x – 210.

a) Represente la función precio-beneficio.

**Resolución**

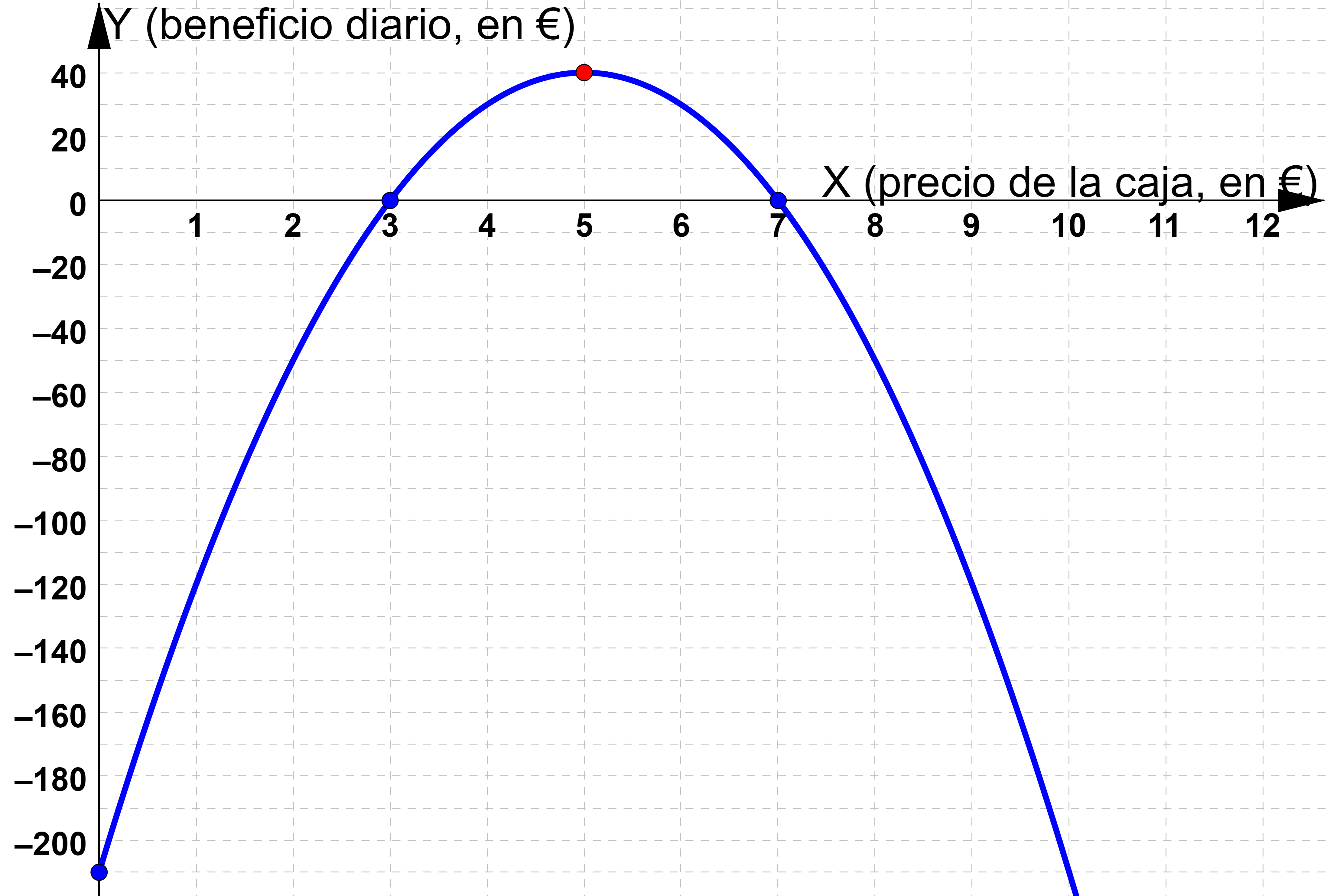
La gráfica está formada por un trozo de parábola en el intervalo [0, +∞).

; B´´(5) = –20 < 0 (cóncava)

Vértice (máximo relativo): x = 5, y = f(5) = –10. 52 + 100.5 – 210 = 40, V(5, 40).

Como B(x) = –10x2 + 100x – 210 = 0 ⇔ ; x = 3 ó x = 7

y B(0) = –10. 02 + 100.0 – 210 = –210, la gráfica corta a los ejes en (3, 0), (7, 0) y (0, –210)



b) Indique a qué precio debe vender cada caja de fresas para obtener el máximo beneficio.

¿Cuál será ese beneficio máximo?

**Resolución** A 5 € con un beneficio máximo 40 €

c) Determine a qué precios de la caja obtiene pérdidas el agricultor.

**Resolución** A menos de 3 € o a más de 7 €

12.-

a) Dada la función f(x) = x3 + bx + c, determine los valores de “b” y “c” sabiendo que dicha función alcanza un máximo relativo en el punto (–1, 3).

**Resolución**

f(x) = x3 + bx + c f´(x) = 3x2 + b f´´(x) = 6x.

Como tiene un máximo relativo en (–1, 3) ⇒ f´(–1) = 0 ⇒ 3.(–1)2 + b = 0 ; b = –3

Nos queda f(x) = x3 – 3x + c

Como la gráfica pasa por (–1, 3) ⇒ f(–1) = 3 ⇒ (–1)3 – 3(–1) + c = 3 ⇒ c = 1

Conclusión: debe ser b = –3, c = 1 y entonces f(x) = x3 – 3x + 1

b) Calcule “a” para que el valor mínimo de la función g(x) = x2 + 2x + a sea igual a 8.

**Resolución**

g´(x) = 2x + 2 = 0 ⇔ x = –1 ; g´´(x) = 2 ; g´´(–1) > 0 (mínimo en x = –1).

Como el valor mínimo es 8 ⇒ g(–1) = 8 ⇒ (–1)2 + 2(–1) + a = 8 ; a = 9

Conclusión: debe ser a = 9 y entonces g(x) = x2 + 2x + 9