1.- En el sector de las aceitunas sin hueso, tres empresas A, B y C, se encuentran en competencia.

Calcula el precio por unidad dado por cada empresa sabiendo que verifican las siguientes relaciones:

- El precio de la empresa A es 0,6 euros menos que la media de los precios establecidos por B y C.

- El precio dado por B es la media de los precios de A y C.

- El precio de la empresa C es igual a 2 € más del precio dado por A más del precio dado por B.

**Resolución**

Sean x, y, z el precio por unidad dado por las empresas A, B y C, respectivamente.

Por la 1ª relación, 10x = 5y + 5z – 6 ; –10x + 5y + 5z = 6

Por la 2ª relación, 2y = x + z ; x – 2y + z = 0

Por la 3ª relación, 15z = 30 +6x + 5y ; 6x + 5y – 15z = –30

Nos queda el sistema . La matriz del sistema es

que corresponde al sistema .

; –5y + 5.5,8 = 2 ; ; x = 2.5,4 – 5,8 = 5

Luego, el precio es de 5 € en la empresa A, 5,40 € en la B y 5,80 € en la C

2.- Considera las matrices

(a) Calcula la matriz inversa de A.

**Resolución**

det A = –1 ≠ 0, existe

(b) Calcula A127 y A128.

**Resolución**

Como, A–1 = A, entonces multiplicando por A obtenemos que A2 = I.

De esta forma A3 = A2A = IA = A ; A4 = A3A = AA = A2 = I ; .... . En general,

Por tanto, A127 = A y A128 = I

(c) Determina x e y tal que AB = BA

**Resolución**

Igualando los elementos, se tiene que x = 0, y = 1

3.- Sean

Determina α, si es posible, para que los sistemas de ecuaciones (dados en forma matricial)

AX = b, BX = c tengan infinitas soluciones (cada uno de ellos).

**Resolución**

Para el primer sistema, AX = b:

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = 9α + 4 – 1 + α – 6 + 3 – 2α + 2α2 = 2α2 + 8α = 2α(α + 4) = 0 ⇔ α = 0 ó α = –4

– Si α ≠ 0 ; α ≠ 0, det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A\* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

– Si α = 0, det A = 0 y . Como , rg A = 2.

.

Como , rg A\* = 2. Luego, rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si α = –4, la matriz del sistema es

.

La 3ª fila corresponde a la ecuación 0 = 12, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

Para el segundo sistema, BX = c:

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det B = α + 2α2 – 2α = 2α2 – α = α(2α – 1) = 0 ⇔ α = 0 ó

– Si α ≠ 0 ; , det B ≠ 0 y rg B = 3 = rg B\* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

– Si α = 0, det B = 0 y . Como , rg B = 2.

. Como , rg B\* = 2.

Luego, rg B\* = rg B = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si , la matriz del sistema es

.

La 2ª fila corresponde a la ecuación 0 = 1, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

Por tanto, para que los dos sistemas tengan infinitas soluciones, debe ser α = 0.

**4.- (prueba extraordinaria)** Considera el siguiente sistema de ecuaciones

(a) Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema tenga una y sólo una solución.

**Resolución**

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = m2 + 9 + 10 – 3m – 6m – 5 = m2 – 9m + 14 = 0 ;

– Si m ≠ 7 ; m ≠ 2, det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A\* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

– Si m = 7, det A = 0 y . Como , rg A = 2.

.

Como , rg A\* = 2. Luego, rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si m = 2, det A = 0 y . Como , rg A = 2.

Como , rg A\* = 2. Luego, rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Conclusión: Si m ≠ 7 ; m ≠ 2, el sistema tiene una y sólo una solución.

(b) Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema tenga al menos dos soluciones.

**Resolución** Usando el a) existen dos valores, m = 7, m = 2.

(c) Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema no tenga solución.

**Resolución** Usando el a) no existe ningún valor de m para el que el sistema no tenga solución.

**5.- (prueba ordinaria)** Determina una matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo

que det(A) = –7 y

**Resolución**

Al ser A simétrica de orden 2 será de la forma

det A = –7 ⇒ xy – z2 = –7 ;

Operando, . Igualando elementos,

Podemos eliminar la 2ª y 4ª ecuación por ser proporcionales a la 1ª y 3ª, respectivamente

; z = 2x + 4. Sustituyendo, 2.(2x + 4) – y = 1 ; 4x + 8 – y = 1 ; y = 4x + 7.

Luego, x.(4x + 7) – (2x + 4)2 = –7 ; 4x2 + 7x – 4x2 – 16x – 16 = –7 ; –9x = 9 ; x = –1

z = 2.(–1) + 4 = 2 ; y = 4.(–1) + 7 = 3. Por tanto, la matriz que se pide es

**6.-** **(prueba ordinaria)** Determina una matriz X que verifique la ecuación AX = X – B siendo

y

**Resolución**

Restando X, en los dos miembros, AX – X = –B ; AX – IX = –B.

Sacando factor común X, por la derecha, (A – I)X = –B.

; det C = –1 – 1 = –2 ≠ 0, existe C–1.

En la ecuación CX = –B, multiplicamos por C**‒**1, por la izquierda, en los dos miembros:

C**‒**1AX = C**‒**1(–B) ⇒ X = –C**‒**1B

7.- Considera , y

(a) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A?

**Resolución**

det A = –2m + 3m + 4 – 3 – 4 + 2m2 = 2m2 + m – 3 = 0 ;

Luego, para m ≠ 1 ; , tiene inversa la matriz A

(b) Resuelve, para m = 2, el sistema de ecuaciones AX = c.

**Resolución**

Para m = 2 sabemos que A tiene inversa. Además, ; det A = 2.22 + 2 – 3 = 7

Multiplicamos por A**‒**1, por la izquierda, en los dos miembros: A**‒**1AX = A**‒**1c ⇒ X = A**‒**1c

8.- Considera el sistema de ecuaciones

(a) Clasifícalo según los valores del parámetro m.

**Resolución**

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = m – m + 1 – 1 – 1 + m2 = m2 – 1 = 0 ⇔ m = 1 ó m = –1

– Si m ≠ 1 ; m ≠ –1, det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A\* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

– Si m = 1, .

La 3ª fila corresponde a la ecuación 0 = 1, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

– Si m = –1, det A = 0 y . Como , rg A = 2.

. Como , rg A\* = 2.

Luego, rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

(b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

**Resolución**

Para m = –1 sabemos que el sistema es compatible indeterminado. La matriz del sistema es equivalente

a , que corresponde al sistema . En la 2ª ecuación, ;

en la 1ª ecuación

Llamando y = k, las infinitas soluciones son , con k ∈ R

9.- Sin desarrollarlo, calcula el valor del determinante de la matriz y enuncia las

propiedades que hayas utilizado

**Resolución**

(1) Descomponemos en suma de dos determinantes, usando la 3ª columna

(2) El primer determinante es nulo por ser proporcionales la 1ª y 3ª columnas y el segundo determinante también es nulo por ser proporcionales la 2ª y 3ª columnas

10.- Denotamos por Mt a la matriz traspuesta de una matriz M. Considera

(a) Calcula (AB)t y (BA)t.

**Resolución**

;

(b) Determina una matriz X que verifique la relación X + (AB)t = C.

**Resolución**

Multiplicando la ecuación por 2, se obtiene X + 2(AB)t = 2C.

Restando 2(AB)t, en los dos miembros obtenemos X = 2C – 2(AB)t.

11.- Considera la matriz .

(a) Halla los valores de a para los que la matriz 3A no tiene inversa

**Resolución**

det A = –a2 + 1 = 0 ⇔ a = 1 ó a = –1.

Luego, A no tiene inversa para a = 1 ó a = –1 y lo mismo ocurre con 3A

(b) Calcula, si es posible, la inversa de A2 para a = 0

**Resolución**

Para a = 0, ;

det B = 1 ≠ 0, existe