1.- El número medio de clientes que visitan un hipermercado entre las 11 y las 20 horas está dado

por f(x) = x3 – 42x2 + 576x – 2296, en función de la hora x, siendo 11 ≤ x ≤ 20.

a) Halle los extremos relativos de esta función.

**Resolución**

f´(x) = 3x2 – 84x + 576 = 0 ⇔ ; x = 16, x = 12 ; f´´(x) = 6x – 84

f´´(16) = 6.16 – 84 = 12 > 0. Mínimo relativo: x = 16, y = f(16) = 163 – 42.162 + 576.16 – 2296 = 264

f´´(12) = 6.12 – 84 = –12 < 0. Máximo relativo: x = 12, y = f(12) = 123 – 42.122 + 576.12 – 2296 = 296

b) Represente esta función y determine las horas en las que crece el número medio de clientes.

**Resolución**

Además de los extremos relativos del apartado anterior usamos que

f(11) = 113 – 42.112 + 576.11 – 2296 = 289 y f(20) = 203 – 42.202 + 576.20 – 2296 = 424



El nº medio de clientes crece de las 11 h a las 12 h y de las 16 h a las 20 h

c) Halle los valores máximos y mínimos del número medio de clientes que visitan el hipermercado entre

las 11 y las 20 horas.

**Resolución**

El valor máximo es 424 clientes y se alcanza a las 20 h

El valor mínimo es 264 clientes y se alcanza a las 16 h

2.-

a) Sea la función f(x) = x2 + ax + b. Calcule a y b para que su gráfica pase por el punto (0, –5) y que en

este punto la recta tangente sea paralela a la recta y = –4x.

**Resolución**

f´(x) = 2x + a. Como la recta tangente en el punto (0, –5) es paralela a la recta y = –4x tiene la misma pendiente y como la pendiente de la recta tangente viene dada por f´(0) = 2.0 + a = a, entonces a = –4

Como la gráfica pasa por (0, –5) ⇒ f(0) = –5 ⇒ 02 – 4.0 + b = –5 ⇒ b = –5

Conclusión: debe ser a = –4, b = –5

b) Estudie el crecimiento y decrecimiento de una función g cuya derivada tiene por gráfica la recta que pasa por los puntos (2, 0) y (3, 1).

**Resolución**

La recta que pasa por los puntos (2, 0) y (3, 1) es . Luego, g´(x) = x – 2

g´(x) = 0 ⇔ x = 2. Hagamos una tabla de signos de g´(x):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| g´(x) | – | 0 | + |
| g(x) | decreciente | mínimo | creciente |

g es decreciente en y creciente en

**3.- (prueba ordinaria)**

a) Sea la función . Halle a y b para que la función sea continua y derivable en x = 2.

**Resolución**

Para x ≠ 2, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Como debe ser continua en x = 2, .

Para x ≠ 2,

Como debe ser derivable en x = 2,

Luego, –1 + b = 4 ; b = 5. Conclusión: debe ser a = 1, b = 5

b) Halle la función derivada de

**Resolución**

**4.- (prueba ordinaria)** Sea la función

a) Represéntela gráficamente.

**Resolución**

La gráfica está formada por un trozo de parábola, uno de hipérbola y una semirrecta

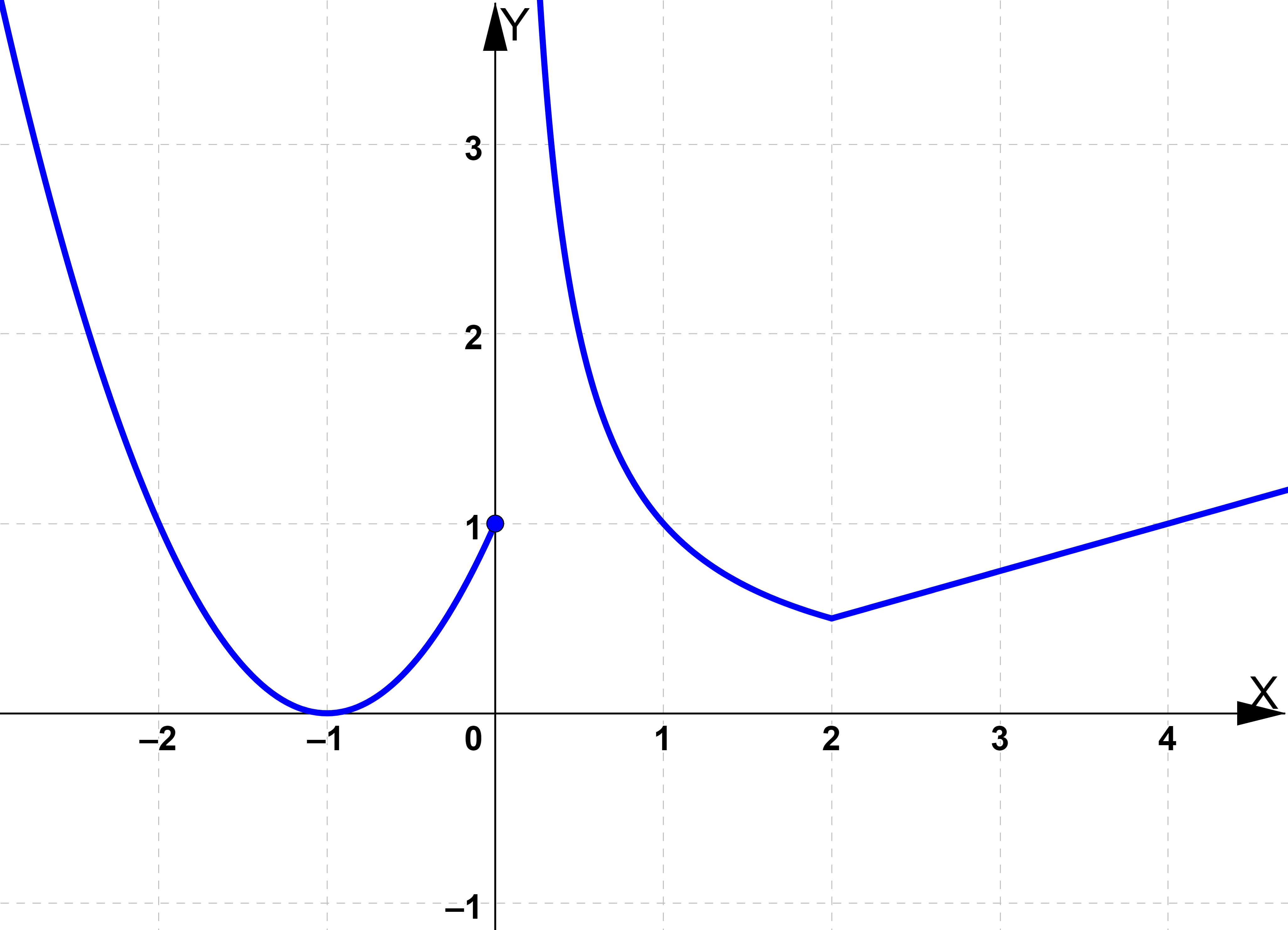
; ;

[(x + 1)2]´= 2(x + 1) = 0 ⇔ x = –1 ; f´´(x) = 2 ; f´´(–1) = 2 > 0.

Luego, el mínimo relativo (vértice de la parábola) es x = –1, y = f(–1) = (–1 + 1)2 = 0, V(–1, 0)

Hallamos otro punto de la parábola, otro de la hipérbola y otro de la recta:

x = –2, , (–2, 1) ; x = 1, , (1, 1) ; x = 4, , (4, 1)



b) Estudie la continuidad y derivabilidad.

**Resolución**

Para x ≠ 0, x ≠ 2 f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas.

;

Como entonces f NO es continua en x = 0 y, por tanto, tampoco es derivable.

⇒ f es continua en x = 2

Para x ≠ 0, x ≠ 2 ; ;

Como , f NO es derivable en x = 2.

Luego, f es continua en R – {0} y derivable en R – {0 ; 2}

c) Calcule sus extremos relativos y asíntotas horizontales y verticales.

**Resolución**

;

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | –1 | (–1, 0) |  |  |  |  |
| f´(x) | – | 0 | + |  | – |  | + |
| f(x) | decreciente | mínimo | creciente |  | decreciente | máximo | creciente |

Mínimo relativo: x = –1, y = f(–1) = (–1 + 1)2 = 0. Punto M(–1, 0)

Máximo relativo: x = 2, y = f(2) = . Punto N(2, )

Para no es continua y .

Luego, f(x) tiene una asíntota vertical en cuya ecuación es A.V. :

; . No hay asíntotas en ±∞

**5.-** **(prueba extraordinaria)** Sea la función

a) Determine su dominio y asíntotas. Estudie su continuidad y derivabilidad.

**Resolución**

Para no está definida porque se anula el denominador. Luego, Dom(f) = R – {1}

No es continua en x = 1 por no estar definida y .

Luego, f(x) tiene una asíntota vertical en cuya ecuación es A.V. :

Además,

Estudiemos las asíntotas en ±∞: .

Luego, f(x) tiene asíntota horizontal en ±∞ de ecuación AH:

Estudiemos la posición de la gráfica respecto de la asíntota: .

. Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en –∞

. Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en +∞

b) Determine sus máximos y mínimos relativos, si los hubiere. Estudie su crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad.

**Resolución**

. Luego, f es decreciente y no hay extremos relativos.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| f´´(x) | – | 0 | + |
| f(x) | cóncava |  | convexa |

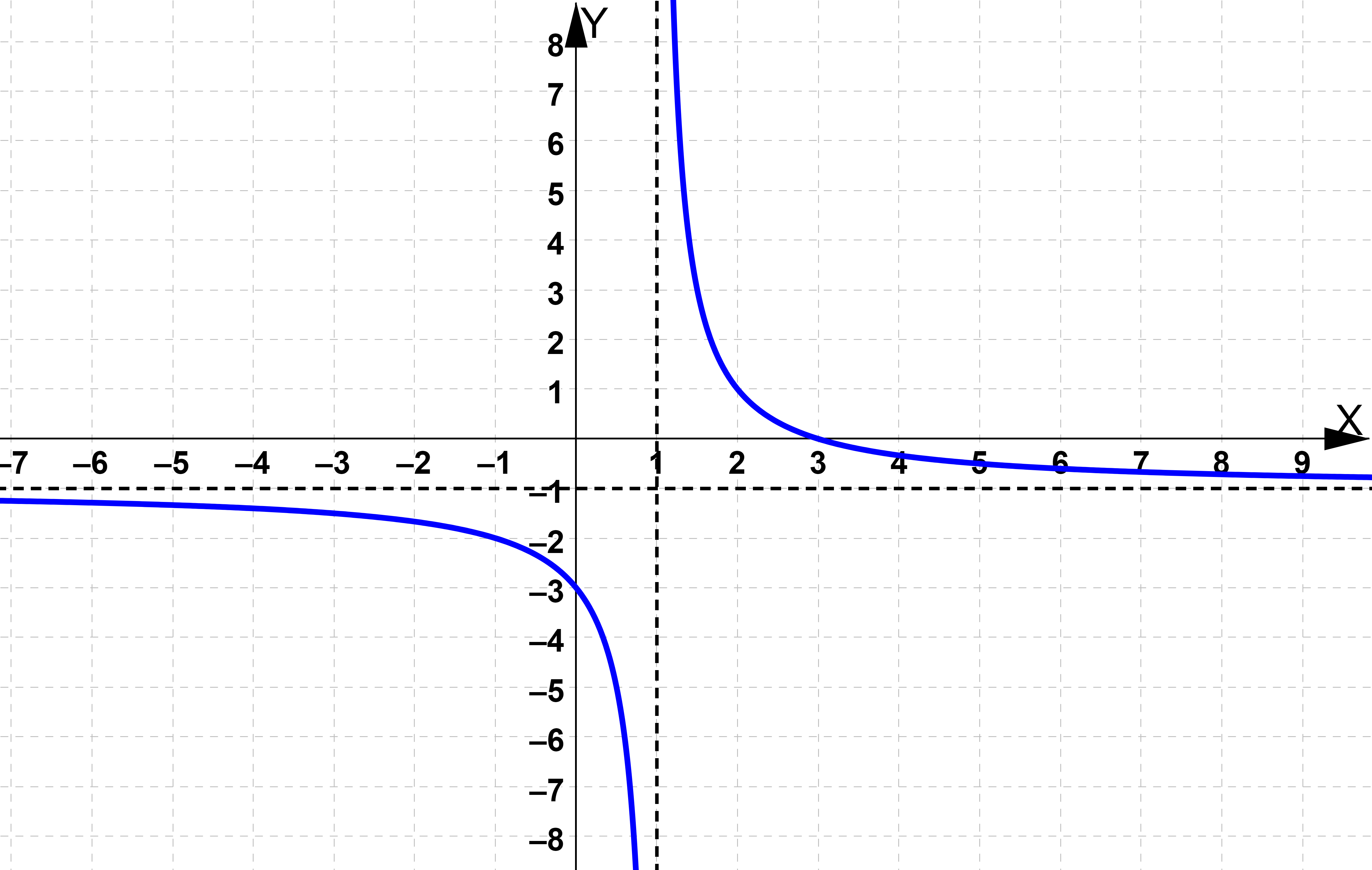
Hagamos una tabla de signos de f´´(x)

f es cóncava en y convexa en . No hay puntos de inflexión

c) Represéntela gráficamente.

**Resolución**

Como , la gráfica corta a los ejes en (3, 0) y (0, –3)



**6.-** **(prueba extraordinaria)** Sea la función

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de f en x = 1 y en x = 2.

**Resolución**

Para x ≠ 1, x ≠ 2 f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas.

= ⇒ f es continua en x = 1

⇒ f es continua en x = 2

Para x ≠ 1, x ≠ 2

≠ ⇒ f NO es derivable en x = 1.

≠ ⇒ f NO es derivable en x = 2.

Luego, f es continua en R y derivable en R – {1 ; 2}

b) Represéntela gráficamente.

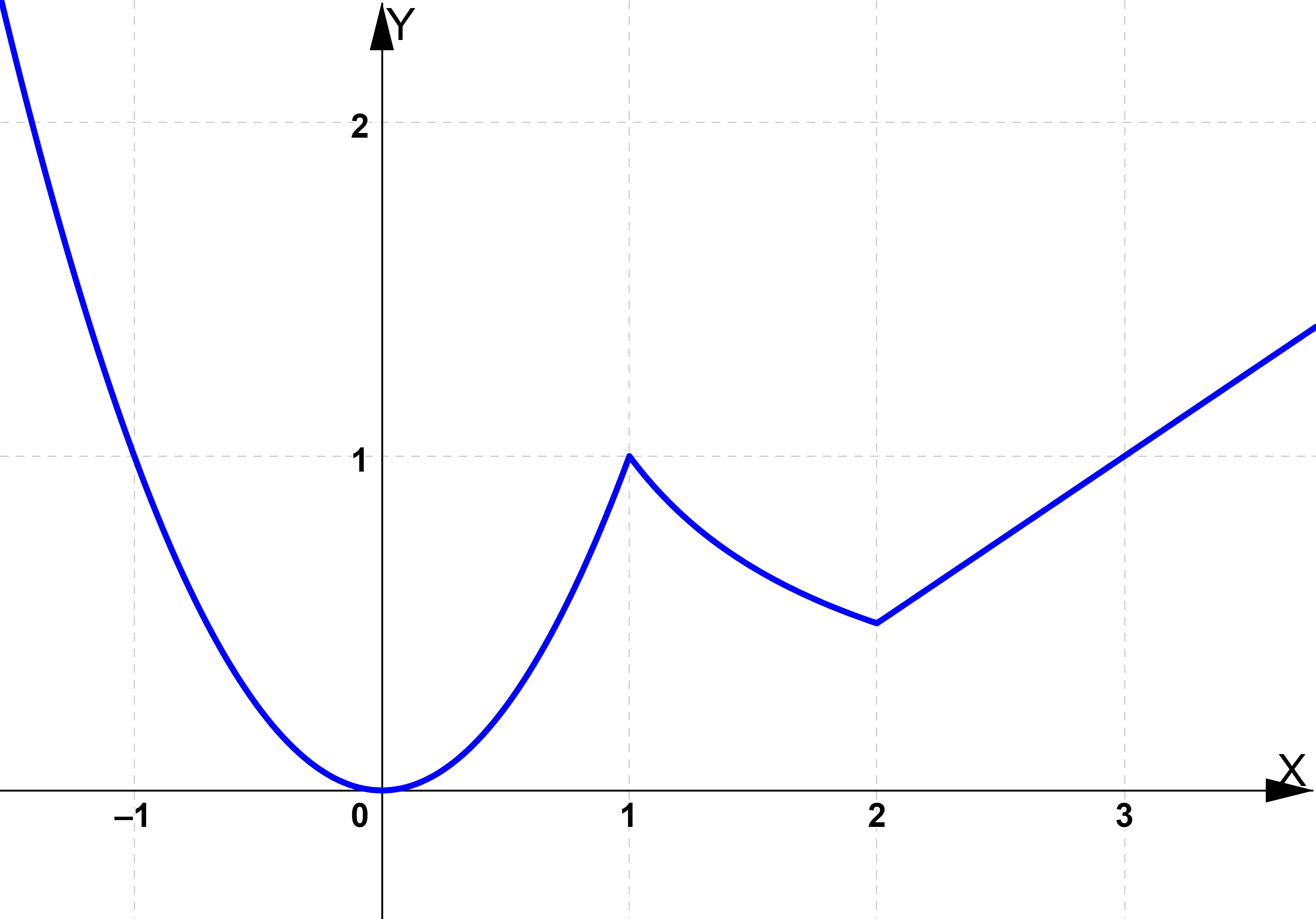
**Resolución**

Usamos el apartado anterior y que la gráfica está formada por un trozo parábola, uno de hipérbola y una semirrecta.

(x2)´= 2x = 0 ⇔ x = 0 ; f´´(x) = 2 ; f´´(0) = 2 > 0. Luego, el mínimo relativo (vértice de la parábola) es x = 0, y = f(0) = 02 = 0, V(0, 0)

Hallamos otro punto de la parábola y otro de la recta:

x = –1, , (–1, 1) ; x = 3, , (3, 1)



7.- Los beneficios esperados de una inmobiliaria en los próximos 5 años vienen dados por la función

B(t) = t3 – 9t2 + 24t (t indica el tiempo, en años, 0 ≤ t ≤ 5).

a) Represente la evolución del beneficio esperado en función del tiempo.

**Resolución**

B(t) = t3 – 9t2 + 24t = t(t2 – 9t + 24) = 0 ⇔ t = 0 ó t2 – 9t + 24 = 0

, Imposible. Sólo corta a los ejes en (0, 0)

B´(t) = 3t2 – 18t + 24 = 0 ⇔ t2 – 6t + 8 = 0 = 0 ; ; t = 2 ó t = 4

Hagamos una tabla de signos de B´(t) teniendo en cuenta que su gráfica es una parábola convexa que corta al eje X en 2 y en 4

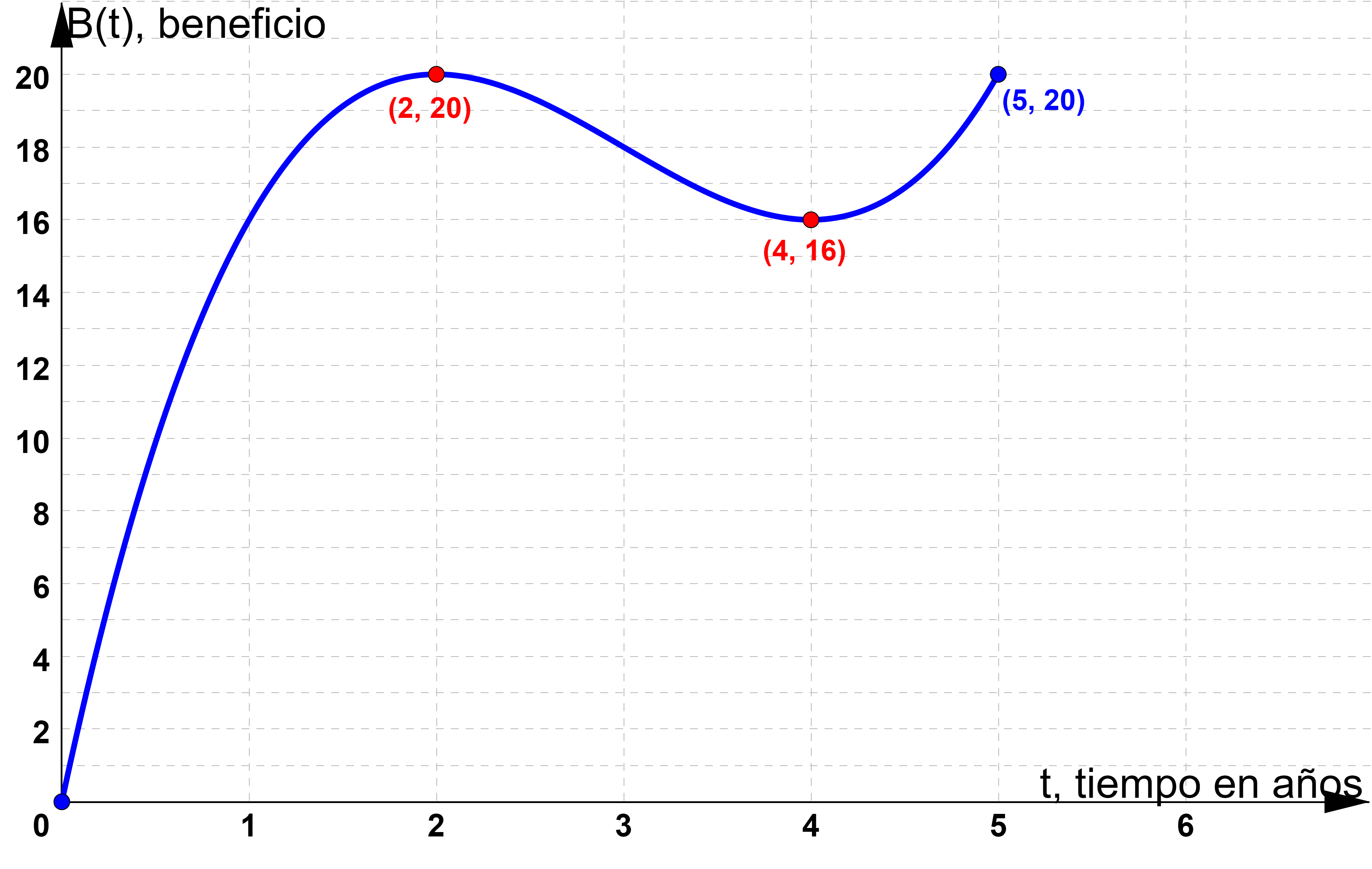
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| f´(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | creciente | máximo | decreciente | mínimo | creciente |

f es creciente en y decreciente en

Máximo relativo: t = 2 ; B(2) = 23 – 9.22 + 24.2 = 20. Punto (2, 20)

Mínimo relativo: t = 4 ; B(4) = 43 – 9.42 + 24.4 = 16. Punto (4, 16)

Además, B(5) = 53 – 9.52 + 24.5 = 20. La gráfica termina en (5, 20)



b) En ese periodo, ¿cuándo será máximo el beneficio esperado?

**Resolución** Será máximo a los 2 años y a los 5 años, siendo el valor máximo de 20

8.- Sea la función

a) Estudie su continuidad y derivabilidad.

**Resolución**

Para x ≠ 4, x ≠ 3 f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas.

En x = 3 no está definida porque se anula el denominador de la fracción. Luego, f no es continua en x = 3 y, por tanto, tampoco derivable.

= ⇒ f es continua en x = 4

Para x ≠ 4

= ⇒ f es derivable en x = 4.

Luego, f es continua y derivable en R – {3}

b) Represente gráficamente la función y determine máximos y mínimos relativos, si los hubiere, así como el crecimiento y decrecimiento.

**Resolución**

La gráfica está formada por un trozo de hipérbola y otro de parábola

;

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 4 | (4; 4,5) |  |  |
| f´(x) | – |  | – |  | + |
| f(x) | decreciente |  | decreciente | mínimo | creciente |

f es decreciente en y creciente en

Mínimo relativo: x = 4,5, y = f(4,5) = 4,52 – 9.4,5 + 21 = 0,75. Punto M(4,5; 0,75), vértice de la parábola

Para no es continua y ,

Luego, f(x) tiene una asíntota vertical en cuya ecuación es A.V. :

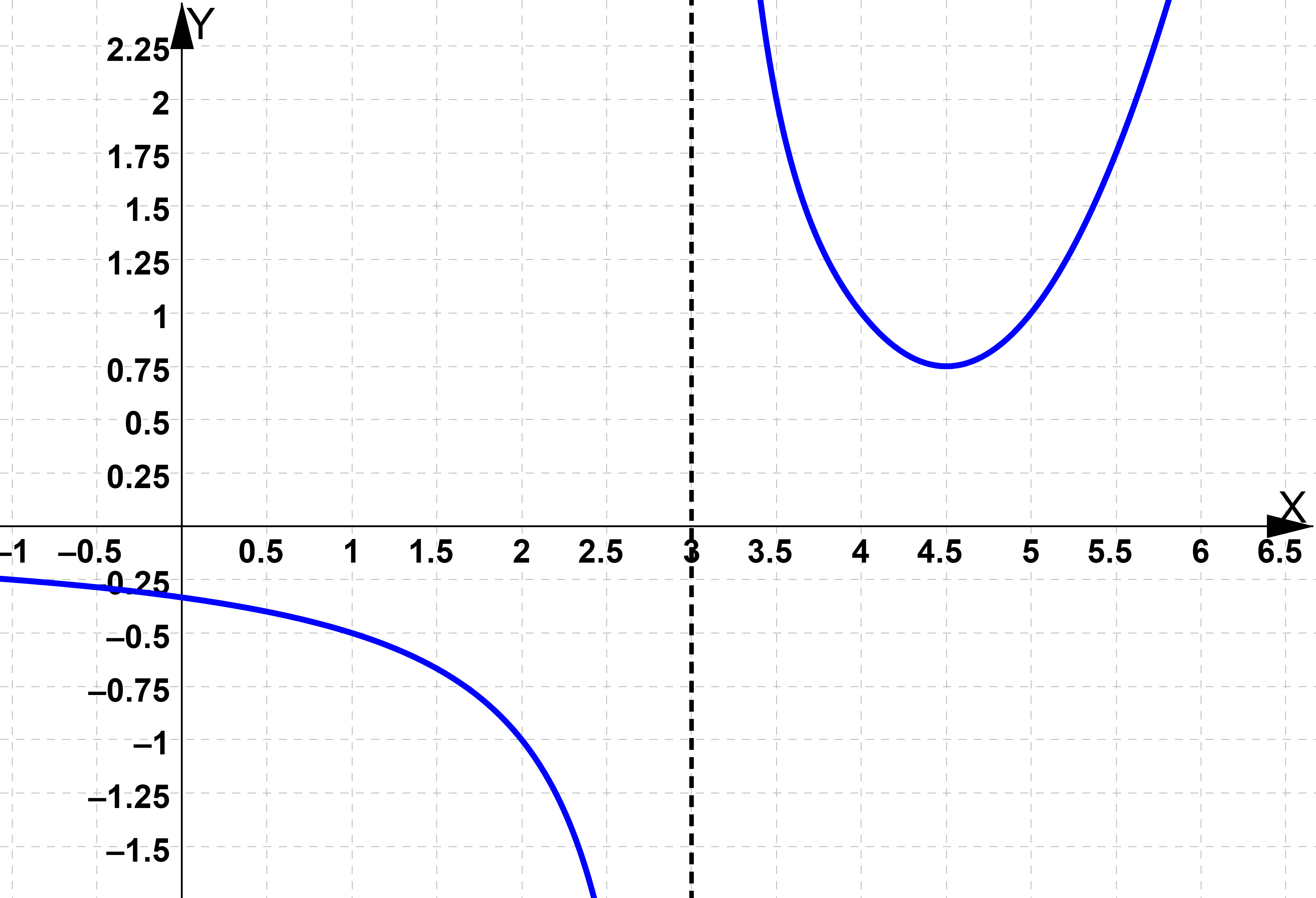
. Luego, f(x) tiene asíntota horizontal en –∞ de ecuación AH:

. Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en –∞

Como , la gráfica sólo corta a los ejes en

Hallamos otro punto de la parábola:

Un esbozo de la gráfica es



9.- Sea la función

a) Calcule el valor que debe tomar el parámetro k para que la función sea continua en R y estudie su derivabilidad para el valor de k obtenido.

**Resolución**

Para x ≠ –1, x ≠ 1 f es continua y derivable independientemente del valor de k por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Como debe ser continua en R, en particular en x = 1, .

Para k = –1,

= ⇒ f es continua en x = –1

También sabemos que f es continua en x = 1 y para x ≠ –1, x ≠ 1

⇒ f es derivable en x = –1.

⇒ f NO es derivable en x = 1.

Luego, f es continua en R y derivable en R – {1}

b) Dibuje la gráfica de la función para k = –1.

**Resolución**

Para k = –1, ,

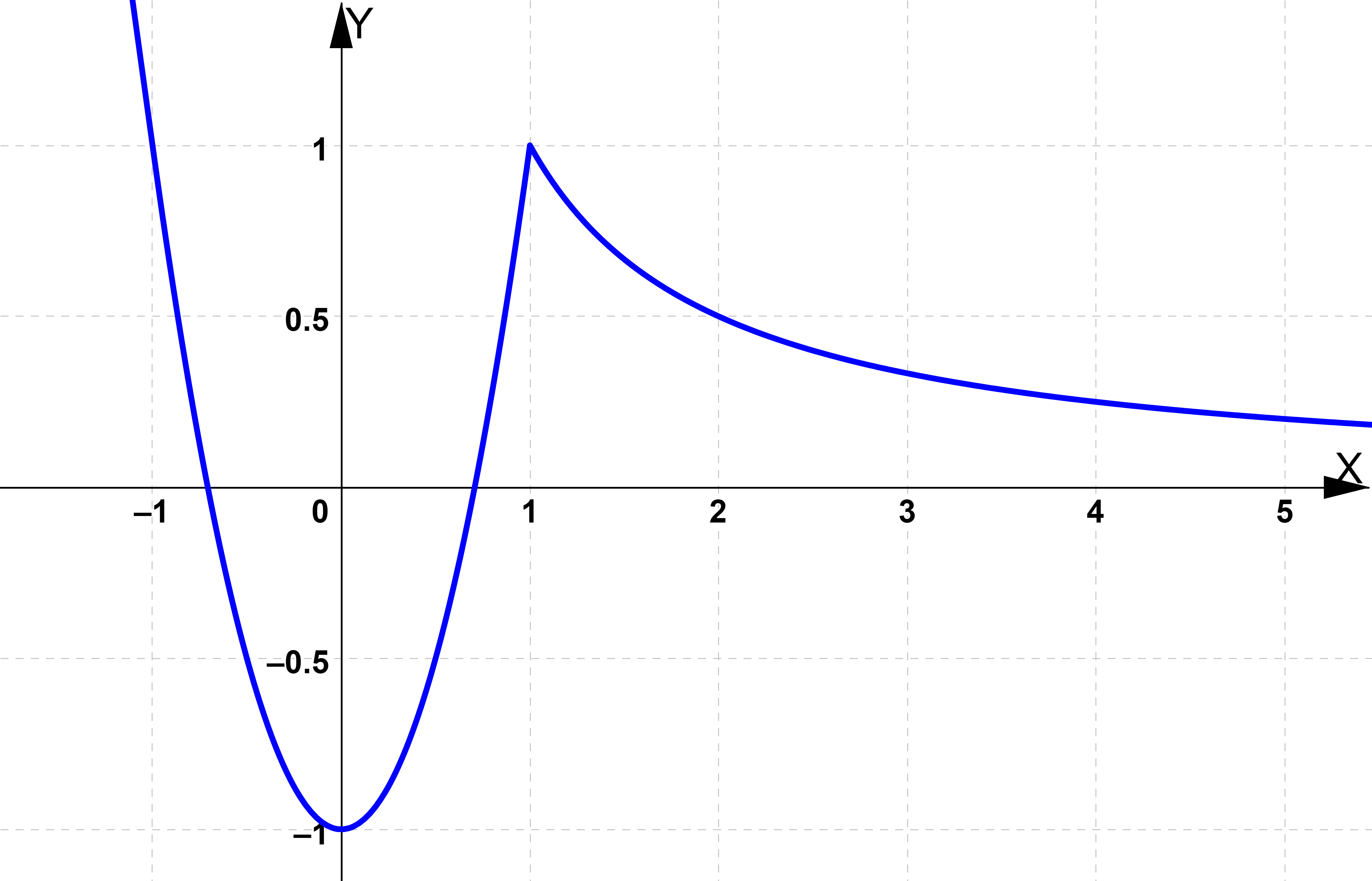
La gráfica está formada por una semirrecta, un trozo de parábola y uno de hipérbola.

4x = 0 ⇔ x = 0 ; para –1 < x < 1, f´´(x) = 4 ; f´´(0) = 4 > 0.

Luego, el mínimo relativo (vértice de la parábola) es x = 0, y = f(0) = 2.02 – 1 = –1, vértice V(0, –1)

Usamos el a) y además hallamos otro punto de la recta y otro de la hipérbola:

x = –2, , (–2, 5) ; x = 2, , punto



10.- Sea la función f(x) = 2x3 + ax2 – 12x + b.

a) Halle a y b para que la función se anule en x = 1 y tenga un punto de inflexión en

**Resolución**

f´(x) = 6x2 + 2ax – 12, f´´(x) = 12x + 2a

Como tiene punto de inflexión en entonces . Luego, ; a = 3

Nos queda f(x) = 2x3 + 3x2 – 12x + b

Como f se anula en x =1 entonces f(1) = 0. Luego, 2.13 + 3.12 – 12.1 + b = 0 ; b = 7

Conclusión: debe ser a = 3, b = 7 y f(x) = 2x3 + 3x2 – 12x + 7

b) Para a = –3 y b = 2, calcule sus máximos y mínimos relativos.

**Resolución**

Para a = –3, b = 2, f(x) = 2x3 – 3x2 – 12x + 2 ; f´(x) = 6x2 – 6x – 12 = 6(x2 – x – 2) = 0

; x = –1, x = 2

Hagamos una tabla de signos de f´(x) teniendo en cuenta que su gráfica es una parábola convexa que corta al eje X en –1 y en 2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| f´(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | creciente | máximo | decreciente | mínimo | creciente |

f es creciente en y decreciente en

Máximo relativo: x = –1, y = f(–1) = 2(–1)3 – 3(–1)2 – 12(–1) + 2 = 10. Punto M(–1, 9)

Mínimo relativo: x = 2, y = f(2) = 2.23 – 3.22 – 12.2 + 2 = –18. Punto N(2, –18)

11.- Se conoce que el rendimiento de un jugador de fútbol durante los primeros 45 minutos de un partido viene dado por la función f: [0, 45] → R cuya expresión analítica es f(t) = 7,2t – 0,16t2, donde t es el tiempo, expresado en minutos.

a) Represente gráficamente esta función.

**Resolución**

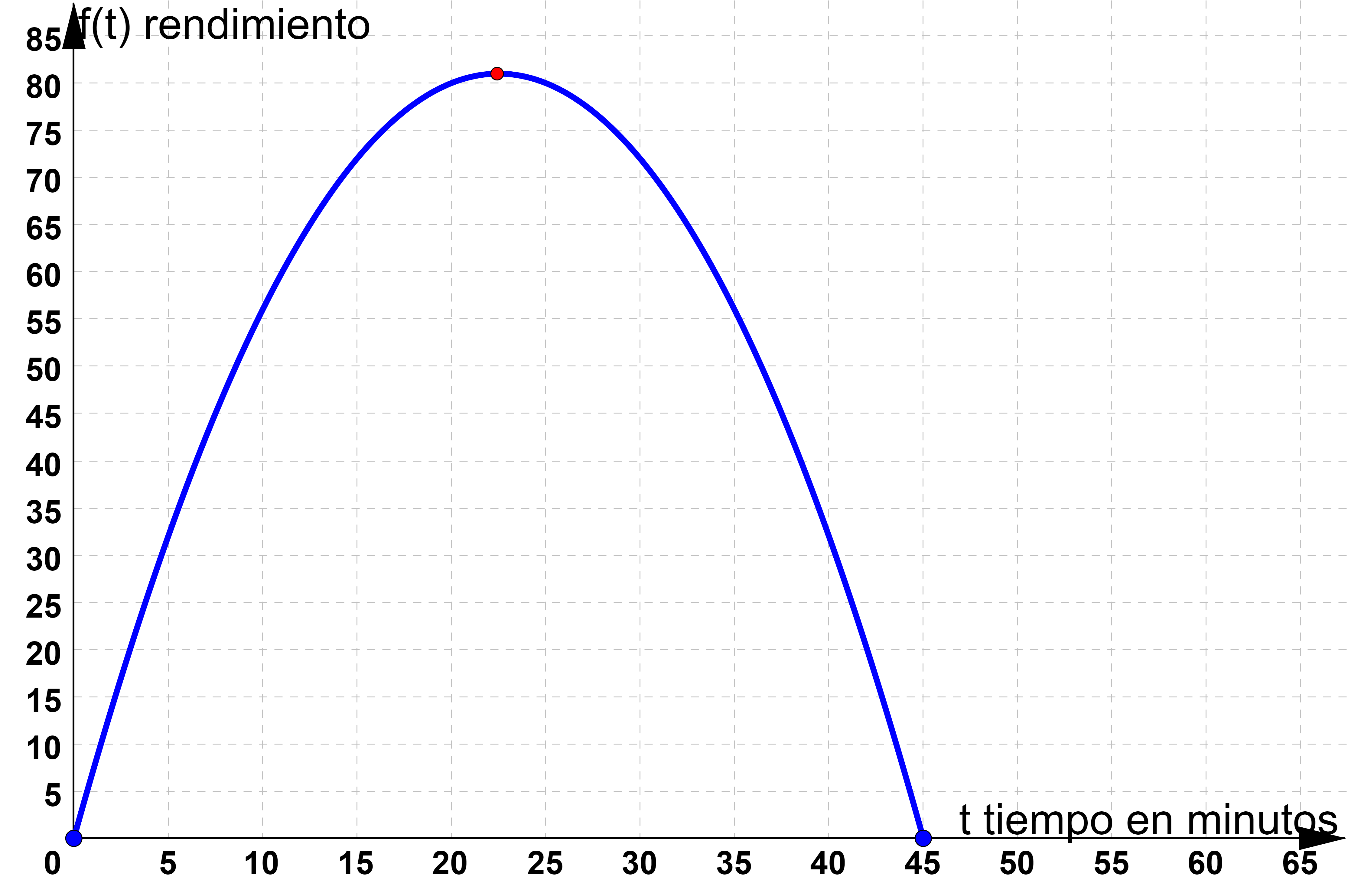
La gráfica está formada por un trozo de parábola en el intervalo [0, 45].

; f´´(22,5) = –0,32 < 0 (cóncava)

Vértice (máximo relativo): t = 22,5, f(22,5) = 7,2 . 22,5 – 0,16 . 22,52 = 81, V(22,5; 81).

Extremos del trozo de parábola:

t = 0, f(0) = 7,2 . 0 – 0,16 . 02 = 0, P(0, 0) ; t = 45, f(45) = 7,2 . 45 – 0,16 . 452 = 81, Q(45, 0)



b) ¿Cuál es el máximo rendimiento del jugador? ¿En qué momento lo consigue? ¿En qué instantes tiene un rendimiento igual a 32?

**Resolución**

El máximo rendimiento es 81 y lo consigue a los 22,5 minutos.

Rendimiento = 32 ⇒ f(t) = 7,2t – 0,16t2 = 32 ⇒ 16t2 – 720t + 3200 = 0 ⇒ t2 – 45t + 200 = 0

; t = 5, t = 40

Luego, el rendimiento es 32 a los 5 minutos y a los 40 minutos

12.- Sea la función

a) Indique el dominio de definición de f, sus puntos de corte con los ejes, sus máximos y mínimos, si

existen, y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

**Resolución**

Como x + 1 = 0 ⇔ x = –1, no existe f(–1) y Dom(f) = R – {–1}

Por otra parte, como y , la gráfica de f corta a los ejes de

coordenadas en los puntos ; también .

Luego, f es creciente en su dominio, en R – {–1}. No hay máximos ni mínimos

b) Obtenga las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de f, si las tiene, y represente la

gráfica de la función.

**Resolución**

Para no es continua por no estar definida y .

Luego, f(x) tiene una asíntota vertical en cuya ecuación es A.V. :

Además, ;

Estudiemos las asíntotas en ±∞: .

Luego, f(x) tiene asíntota horizontal en ±∞ de ecuación AH:

Estudiemos la posición de la gráfica respecto de la asíntota: .

. Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en –∞

. Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en +∞

