
1.- El número medio de clientes que visitan un hipermercado entre las 11 y las 20 horas está dado por $f(x) = x^3 - 42x^2 + 576x - 2296$, en función de la hora x, siendo $11 \leq x \leq 20$.

a) Halle los extremos relativos de esta función.

Resolución

$f'(x) = 3x^2 - 84x + 576 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{84 \pm \sqrt{7056 - 4.3.576}}{2.3} = \frac{84 \pm 12}{6}$; $x = 16$, $x = 12$; $f''(x) = 6x - 84$

$f''(16) = 6.16 - 84 = 12 > 0$. Mínimo relativo: $x = 16$, $y = f(16) = 16^3 - 42.16^2 + 576.16 - 2296 = 264$

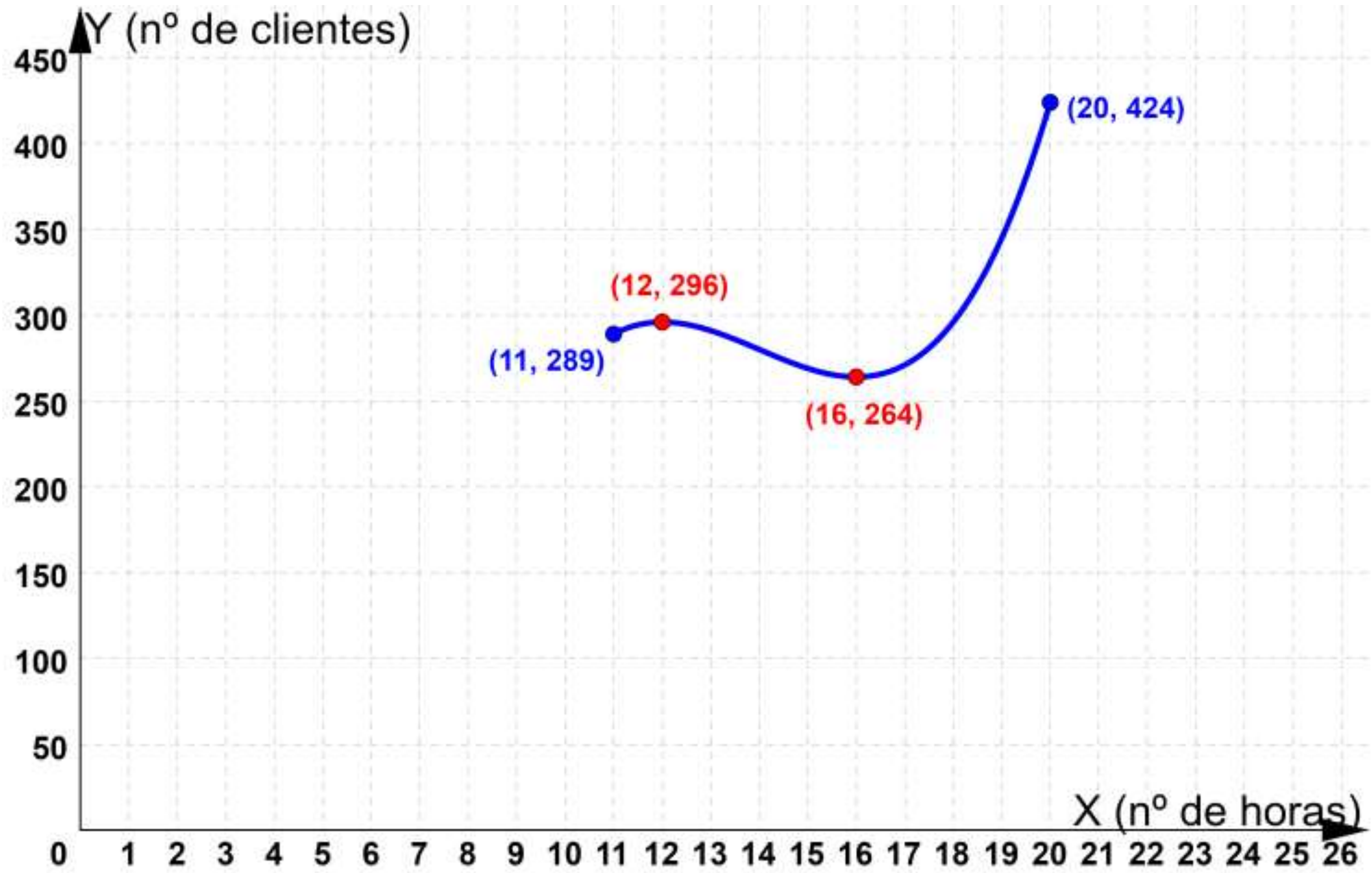
$f''(12) = 6.12 - 84 = -12 < 0$. Máximo relativo: $x = 12$, $y = f(12) = 12^3 - 42.12^2 + 576.12 - 2296 = 296$

b) Represente esta función y determine las horas en las que crece el número medio de clientes.

Resolución

Además de los extremos relativos del apartado anterior usamos que

$f(11) = 11^3 - 42.11^2 + 576.11 - 2296 = 289$ y $f(20) = 20^3 - 42.20^2 + 576.20 - 2296 = 424$



El nº medio de clientes crece de las 11 h a las 12 h y de las 16 h a las 20 h

c) Halle los valores máximos y mínimos del número medio de clientes que visitan el hipermercado entre las 11 y las 20 horas.

Resolución

El valor máximo es 424 clientes y se alcanza a las 20 h

El valor mínimo es 264 clientes y se alcanza a las 16 h

2.-

a) Sea la función $f(x) = x^2 + ax + b$. Calcule a y b para que su gráfica pase por el punto (0, –5) y que en este punto la recta tangente sea paralela a la recta y = –4x.

Resolución

$f'(x) = 2x + a$. Como la recta tangente en el punto (0, –5) es paralela a la recta y = –4x tiene la misma pendiente y como la pendiente de la recta tangente viene dada por $f'(0) = 2.0 + a = a$, entonces a = –4

Como la gráfica pasa por (0, –5) $\Rightarrow f(0) = -5 \Rightarrow 0^2 - 4.0 + b = -5 \Rightarrow b = -5$

Conclusión: debe ser a = –4, b = –5

b) Estudie el crecimiento y decrecimiento de una función g cuya derivada tiene por gráfica la recta que pasa por los puntos (2, 0) y (3, 1).

Resolución

La recta que pasa por los puntos (2, 0) y (3, 1) es $\frac{y-0}{x-2} = \frac{1-0}{3-2} = 1 \Rightarrow y = x - 2$. Luego, $g'(x) = x - 2$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Hagamos una tabla de signos de $g'(x)$:

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$g'(x)$	–	0	+
g(x)	decreciente	mínimo	creciente

g es decreciente en $(-\infty, 2)$ y creciente en $(2, +\infty)$

3.- (prueba ordinaria)

a) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2, & si\ x \le 2 \\ a(x-3)^2 + 3, & si\ x > 2 \end{cases}$. Halle a y b para que la función sea continua y derivable en x = 2.

Resolución

Para x ≠ 2, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Como debe ser continua en x = 2, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow -(2-1)^2 + b = a(2-3)^2 + 3 \Rightarrow -a + b = 4$.

Para x ≠ 2, $f'(x) = \begin{cases} -2(x-1), & si\ x < 2 \\ 2a(x-3), & si\ x > 2 \end{cases}$

Como debe ser derivable en x = 2, $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) \Rightarrow -2(2-1) = 2a(2-3) \Rightarrow a = 1$

Luego, –1 + b = 4 ; b = 5. Conclusión: debe ser a = 1, b = 5

b) Halle la función derivada de $g(x) = \frac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$

Resolución $g'(x) = \frac{e^{2x+1}.2(x-1)^2 - e^{2x+1}.2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2e^{2x+1}(x-1-1)}{(x-1)^3} = \frac{2e^{2x+1}(x-2)}{(x-1)^3}$

4.- (prueba ordinaria) Sea la función $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & si\ x \le 0 \\ \frac{1}{x}, & si\ 0 < x < 2 \\ \frac{x}{4}, & si\ x \ge 2 \end{cases}$

a) Represéntela gráficamente.

Resolución

La gráfica está formada por un trozo de parábola, uno de hipérbola y una semirrecta

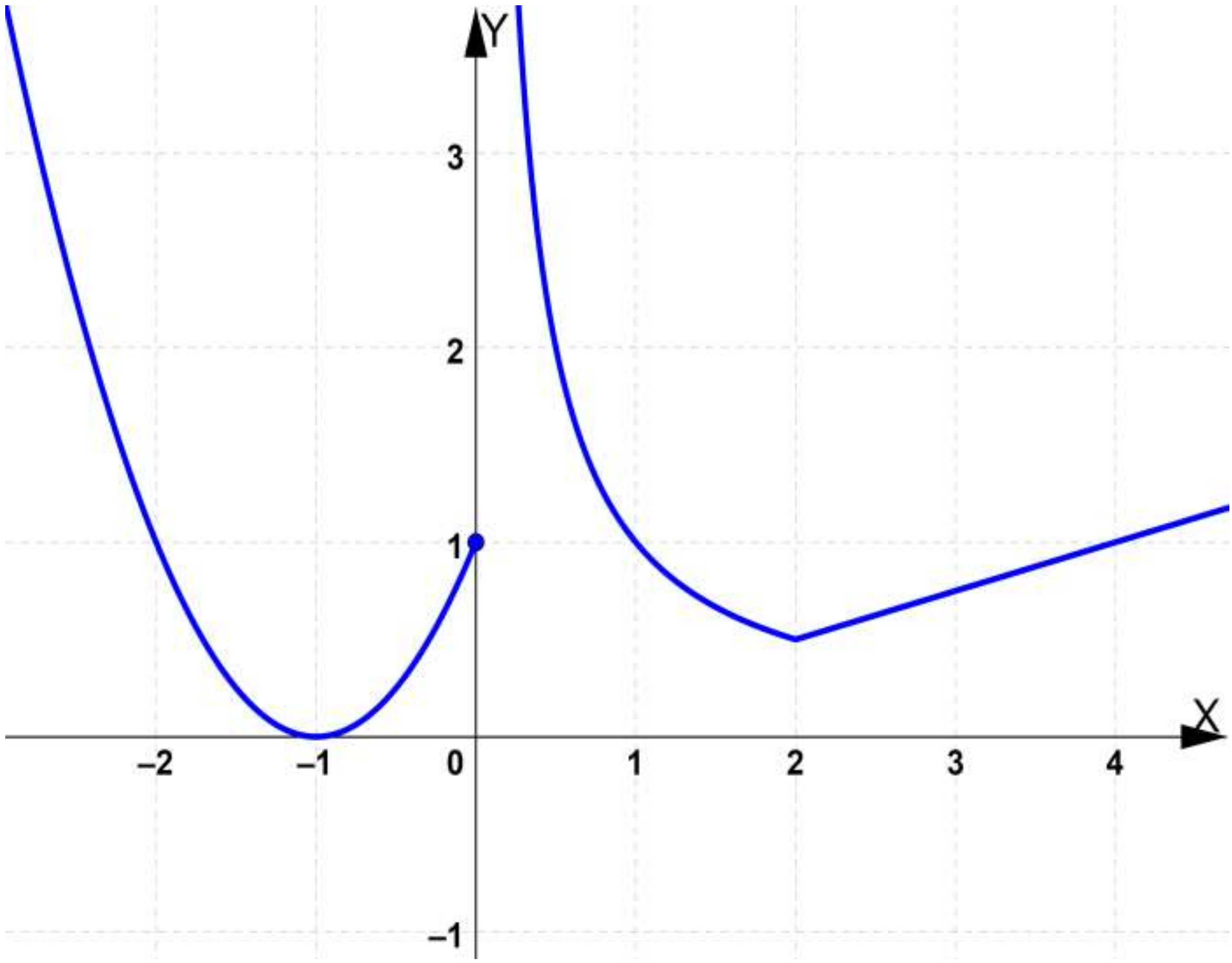
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = (0+1)^2 = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \frac{1}{2} = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$

$[(x+1)^2]' = 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$; $f''(x) = 2$; $f''(-1) = 2 > 0$.

Luego, el mínimo relativo (vértice de la parábola) es $x = -1$, $y = f(-1) = (-1+1)^2 = 0$, $V(-1, 0)$

Hallamos otro punto de la parábola, otro de la hipérbola y otro de la recta:

$x = -2$, $y = (-2+1)^2 = 1$, $(-2, 1)$; $x = 1$, $y = \frac{1}{1} = 1$, $(1, 1)$; $x = 4$, $y = \frac{4}{4} = 1$, $(4, 1)$



b) Estudie la continuidad y derivabilidad.

Resolución

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & si\ x \le 0 \\ \frac{1}{x}, & si\ 0 < x < 2 \\ \frac{x}{4}, & si\ x \ge 2 \end{cases}$$

Para x ≠ 0, x ≠ 2 f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = (0+1)^2 = 1$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ entonces f NO es continua en x = 0 y, por tanto, tampoco es derivable.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$ ⇒ f es continua en x = 2

Para x ≠ 0, x ≠ 2 $f'(x) = \begin{cases} 2(x+1), & si\ x < 0 \\ \frac{-1}{x^2}, & si\ 0 < x < 2 \\ \frac{1}{4}, & si\ x > 2 \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \frac{-1}{2^2} = \frac{-1}{4}$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \frac{1}{4}$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)$, f NO es derivable en x = 2.

Luego, f es continua en R – {0} y derivable en R – {0 ; 2}

c) Calcule sus extremos relativos y asíntotas horizontales y verticales.

Resolución

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x+1), & si\ x < 0 \\ \frac{-1}{x^2} < 0, & si\ 0 < x < 2 \\ \frac{1}{4} > 0, & si\ x > 2 \end{cases} \quad ; \quad x < 0, 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
f´(x)	–	0	+	∄	–	∄	+
f(x)	decreciente	mínimo	creciente		decreciente	máximo	creciente

Mínimo relativo: x = –1, y = f(–1) = $(-1+1)^2$ = 0. Punto M(–1, 0)

Máximo relativo: x = 2, y = f(2) = $\frac{1}{2}$. Punto N(2, $\frac{1}{2}$)

Para $x = 0$ no es continua y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

Luego, f(x) tiene una asíntota vertical en $x = \frac{1}{3}$ cuya ecuación es A.V. : $x = \frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (x+1)^2 = +\infty$. No hay asíntotas en $\pm\infty$

5.- (prueba extraordinaria) Sea la función $f(x) = \frac{3-x}{x-1}$

a) Determine su dominio y asíntotas. Estudie su continuidad y derivabilidad.

Resolución

Para $x = 1$ no está definida porque se anula el denominador. Luego, Dom(f) = R – {1}

No es continua en x = 1 por no estar definida y $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{3-1}{1-1} = \frac{2}{0} = \pm\infty$.

Luego, f(x) tiene una asíntota vertical en $x = 1$ cuya ecuación es A.V. : $x = 1$

Además, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

Estudiemos las asíntotas en $\pm\infty$: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x}{x} = -1$.

Luego, f(x) tiene asíntota horizontal en $\pm\infty$ de ecuación AH: $y = -1$

Estudiemos la posición de la gráfica respecto de la asíntota: $y_{gráfica} - y_{asíntota} = \frac{3-x}{x-1} - (-1) = \frac{2}{x-1}$.

$Si\ x \to -\infty,\ y_{gráfica} - y_{asíntota} < 0$. Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en –∞

$Si\ x \to +\infty,\ y_{gráfica} - y_{asíntota} > 0$. Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en +∞

b) Determine sus máximos y mínimos relativos, si los hubiere. Estudie su crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad.

Resolución

$f'(x) = \frac{-1.(x-1)-(3-x).1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$. Luego, f es decreciente y no hay extremos relativos.

$f''(x) = [-2(x-1)^{-2}]' = 4(x-1)^{-3} = \frac{4}{(x-1)^3} \neq 0$

Hagamos una tabla de signos de f´´(x)

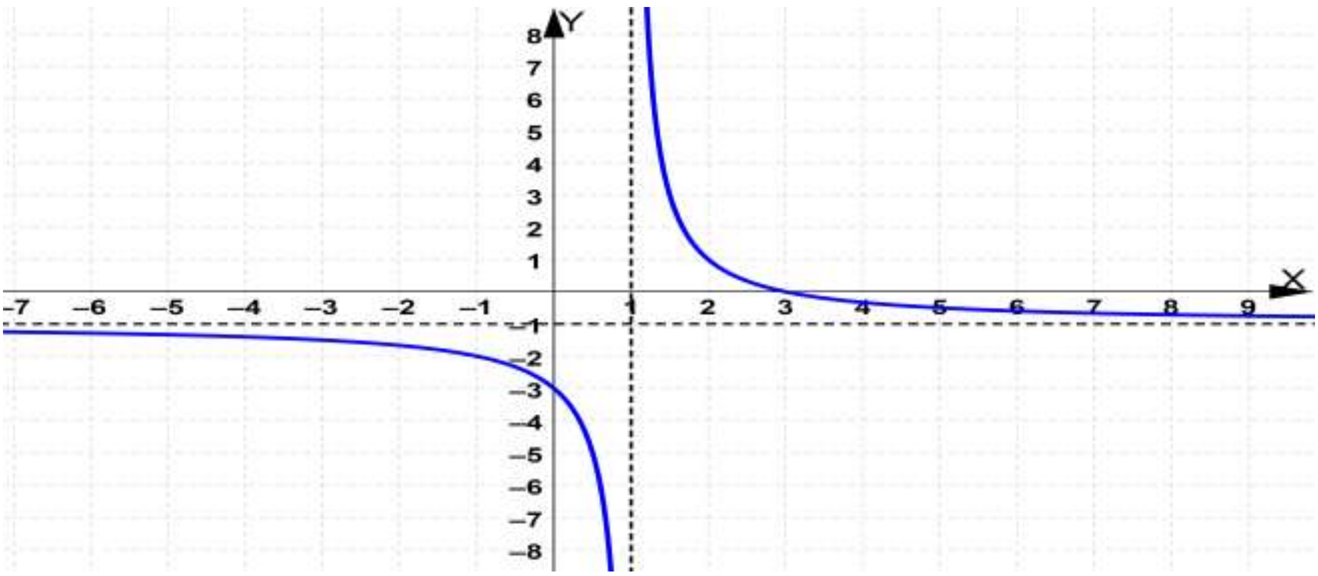
	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f´´(x)	–	0	+
f(x)	cóncava		convexa

f es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, +\infty)$. No hay puntos de inflexión

c) Represéntela gráficamente.

Resolución

Como $f(x) = \frac{3-x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 3\ \ y\ \ f(0) = \frac{3-0}{0-1} = -3$, la gráfica corta a los ejes en (3, 0) y (0, −3)



6.- (prueba extraordinaria) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & si\ x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & si\ 1 < x \leq 2 \\ \frac{x-1}{2}, & si\ x > 2 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de f en x = 1 y en x = 2.

Resolución

Para x ≠ 1, x ≠ 2 f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 1^2 = 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ f es continua en x = 1

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = \frac{1}{2} = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{2-1}{2} \Rightarrow$ f es continua en x = 2

Para x ≠ 1, x ≠ 2 $f'(x) = \begin{cases} 2x, & si\ x < 1 \\ \frac{-1}{x^2}, & si\ 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2}, & si\ x > 2 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2.1 = 2 \neq \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \frac{-1}{1^2} = -1 \Rightarrow$ f NO es derivable en x = 1.

$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \frac{-1}{2^2} = \frac{-1}{4} \neq \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ f NO es derivable en x = 2.

Luego, f es continua en R y derivable en R – {1 ; 2}

b) Represéntela gráficamente.

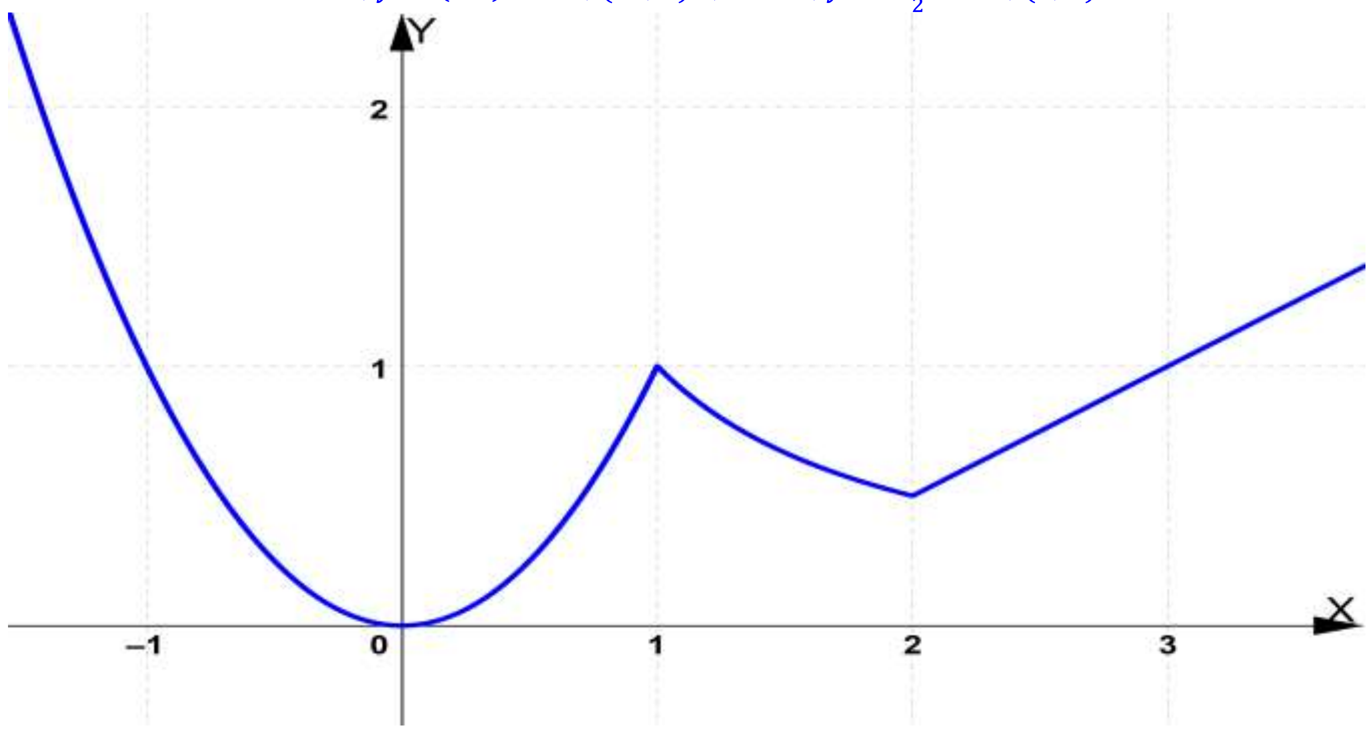
Resolución

Usamos el apartado anterior y que la gráfica está formada por un trozo parábola, uno de hipérbola y una semirrecta.

$(x^2)' = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $f''(x) = 2$; $f''(0) = 2 > 0$. Luego, el mínimo relativo (vértice de la parábola) es $x = 0$, $y = f(0) = 0^2 = 0$, V(0, 0)

Hallamos otro punto de la parábola y otro de la recta:

$$x = -1, y = (-1)^2 = 1, (-1, 1) \quad ; \quad x = 3, y = \frac{3-1}{2} = 1, (3, 1)$$



7.- Los beneficios esperados de una inmobiliaria en los próximos 5 años vienen dados por la función $B(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ (t indica el tiempo, en años, $0 \leq t \leq 5$).

a) Represente la evolución del beneficio esperado en función del tiempo.

Resolución

$B(t) = t^3 - 9t^2 + 24t = t(t^2 - 9t + 24) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ó $t^2 - 9t + 24 = 0$

$t = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4.1.24}}{2.1} = \frac{9 \pm \sqrt{-15}}{2}$, Imposible. Sólo corta a los ejes en (0, 0)

$B´(t) = 3t^2 - 18t + 24 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 = 0$; $t = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4.1.8}}{2.1} = \frac{6 \pm 2}{2}$; $t = 2$ ó $t = 4$

Hagamos una tabla de signos de B´(t) teniendo en cuenta que su gráfica es una parábola convexa que corta al eje X en 2 y en 4

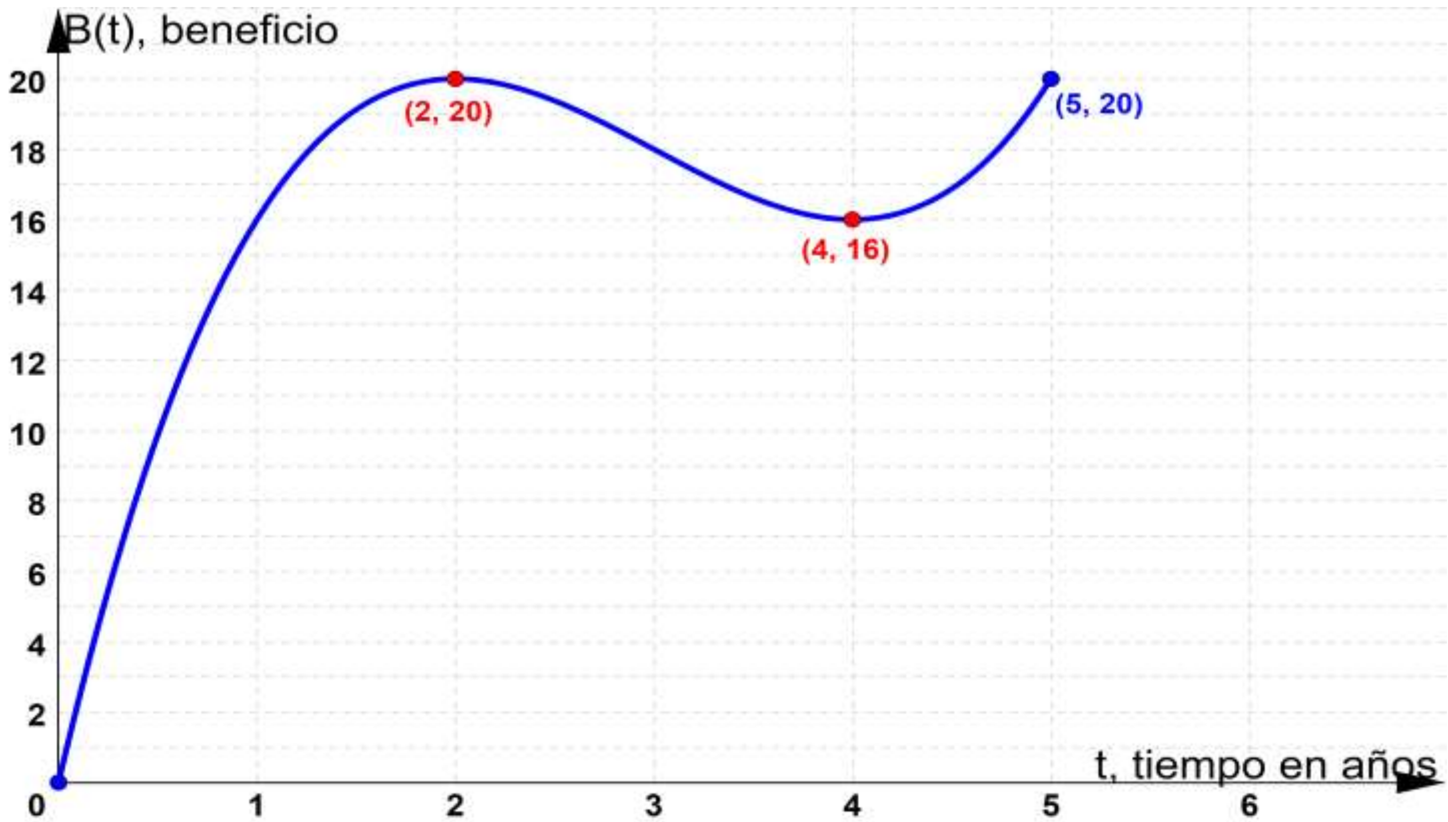
	(0, 2)	2	(2, 4)	4	(4, 5)
f´(x)	+	0	–	0	+
f(x)	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $(0, 2) \cup (4, 5)$ y decreciente en (2, 4)

Máximo relativo: $t = 2$; $B(2) = 2^3 - 9.2^2 + 24.2 = 20$. Punto (2, 20)

Mínimo relativo: $t = 4$; $B(4) = 4^3 - 9.4^2 + 24.4 = 16$. Punto (4, 16)

Además, $B(5) = 5^3 - 9.5^2 + 24.5 = 20$. La gráfica termina en (5, 20)



b) En ese periodo, ¿cuándo será máximo el beneficio esperado?

Resolución Será máximo a los 2 años y a los 5 años, siendo el valor máximo de 20

8.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, & si\ x \leq 4 \\ x^2 - 9x + 21, & si\ x > 4 \end{cases}$

a) Estudie su continuidad y derivabilidad.

Resolución

Para x ≠ 4, x ≠ 3 f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas.

En x = 3 no está definida porque se anula el denominador de la fracción. Luego, f no es continua en x = 3 y, por tanto, tampoco derivable.

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = f(4) = \frac{1}{4-3} = 1 = \lim_{x \to 4^+} f(x) = 4^2 - 9.4 + 21 = 1 \Rightarrow$ f es continua en x = 4

Para x ≠ 4 $f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-3)^2}, & si\ x < 4, x \neq 3 \\ 2x - 9, & si\ x > 4 \end{cases}$

$\lim_{x \to 4^-} f'(x) = \frac{-1}{(4-3)^2} = -1 = \lim_{x \to 4^+} f'(x) = 2.4 - 9 = -1 \Rightarrow$ f es derivable en x = 4.

Luego, f es continua y derivable en R – {3}

b) Represente gráficamente la función y determine máximos y mínimos relativos, si los hubiere, así como el crecimiento y decrecimiento.

Resolución

La gráfica está formada por un trozo de hipérbola y otro de parábola

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-3)^2} < 0, & si\ x < 4 \\ 2x - 9, & si\ x > 4 \end{cases} \quad ; \quad x < 4, 2x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 4{,}5$$

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

	$(-\infty, 4) - \{3\}$	4	(4; 4,5)	4,5	(4,5; $+\infty$)
f´(x)	–		–	0	+
f(x)	decreciente		decreciente	mínimo	creciente

f es decreciente en $(-\infty; 4{,}5) - \{3\}$ y creciente en $(4{,}5;\ +\infty)$

Mínimo relativo: x = 4,5, y = f(4,5) = 4,5² – 9.4,5 + 21 = 0,75. Punto M(4,5; 0,75), vértice de la parábola

Para $x = 3$ no es continua y $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Luego, f(x) tiene una asíntota vertical en $x = 3$ cuya ecuación es A.V. : $x = 3$

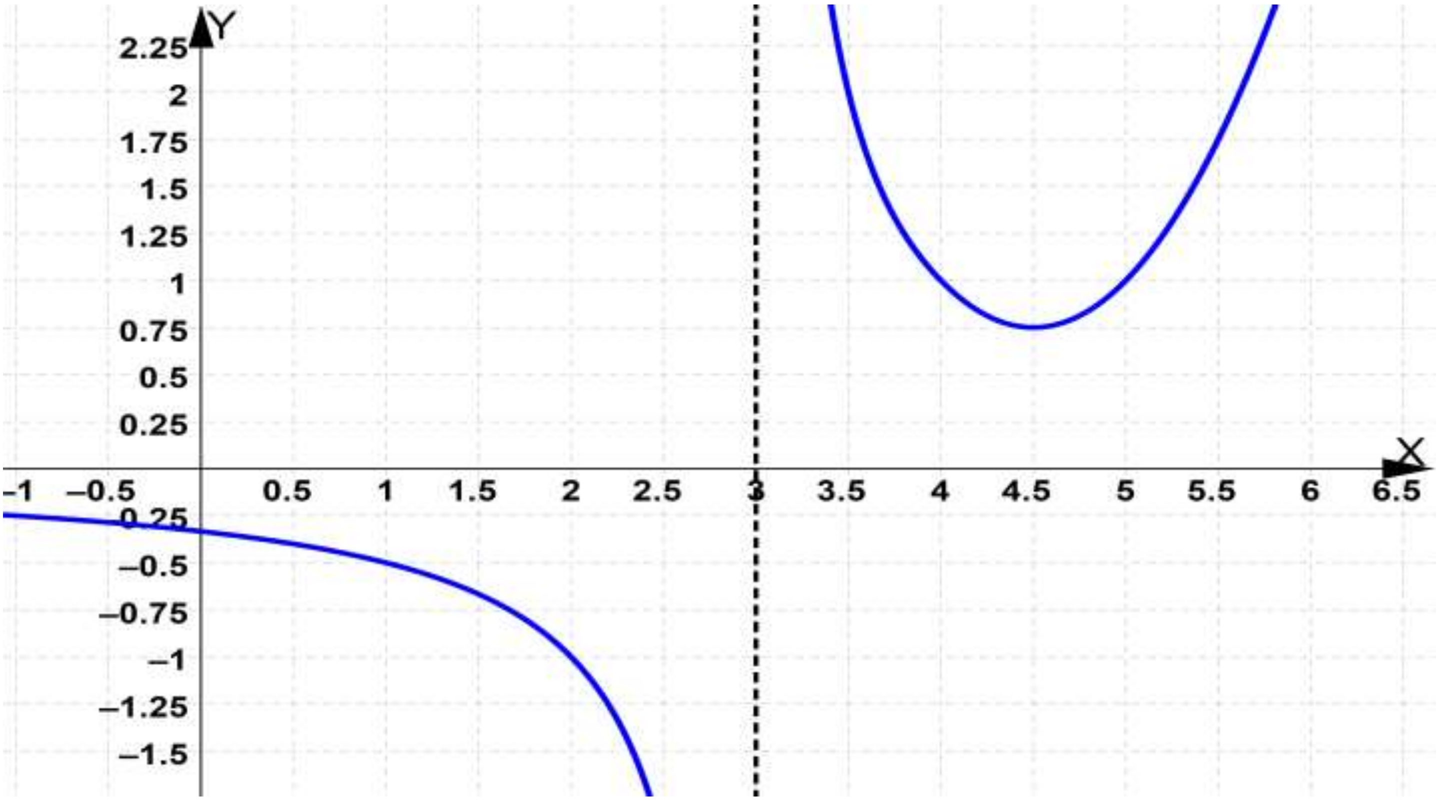
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-3} = 0$. Luego, f(x) tiene asíntota horizontal en $-\infty$ de ecuación AH: $y = 0$

$y_{gráfica} - y_{asíntota} = \frac{1}{x-3} - 0 = \frac{1}{x-3} < 0$. Luego, la gráfica está "por debajo" de la asíntota en $-\infty$

Como $x > 4, x^2 - 9x + 21 > 0$ y $f(0) = \frac{1}{0-3} = \frac{-1}{3}$, la gráfica sólo corta a los ejes en $\left(\frac{-1}{3}, 0\right)$

Hallamos otro punto de la parábola: $x = 5,\ y = f(5) = 5^2 - 9.5 + 21 = 1$

Un esbozo de la gráfica es



9.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} -4x-3, & si\ x \le -1 \\ 2x^2-1, & si -1 < x < 1 \\ \frac{k+2}{x}, & si\ x \ge 1 \end{cases}$

a) Calcule el valor que debe tomar el parámetro k para que la función sea continua en R y estudie su derivabilidad para el valor de k obtenido.

Resolución

Para x ≠ −1, x ≠ 1 f es continua y derivable independientemente del valor de k por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Como debe ser continua en R, en particular en x = 1, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow 2.1^2 - 1 = \frac{k+2}{1} \Rightarrow k = -1.$

Para k = −1, $f(x) = \begin{cases} -4x-3, & si\ x \le -1 \\ 2x^2-1, & si -1 < x < 1 \\ \frac{1}{x}, & si\ x \ge 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = f(-1) = -4.(-1) - 3 = 1 = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2(-1)^2 - 1 \Rightarrow$ f es continua en x = −1

También sabemos que f es continua en x = 1 y para x ≠ −1, x ≠ 1 $f'(x) = \begin{cases} -4, & si\ x < -1 \\ 4x, & si -1 < x < 1 \\ \frac{-1}{x^2}, & si\ x > 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = -4 = \lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = 4(-1) \Rightarrow$ f es derivable en x = −1.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = 4.1 = 4 \ne \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \frac{-1}{1^2} = -1 \Rightarrow$ f NO es derivable en x = 1.

Luego, f es continua en R y derivable en R – {1}

b) Dibuje la gráfica de la función para k = –1.

Resolución

Para k = –1, $f(x) = \begin{cases} -4x-3, & si\ x \le -1 \\ 2x^2-1, & si\ -1 < x < 1 \\ \frac{1}{x}, & si\ x \ge 1 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} -4, & si\ x \le -1 \\ 4x, & si\ -1 < x < 1 \\ \frac{-1}{x^2}, & si\ x > 1 \end{cases}$

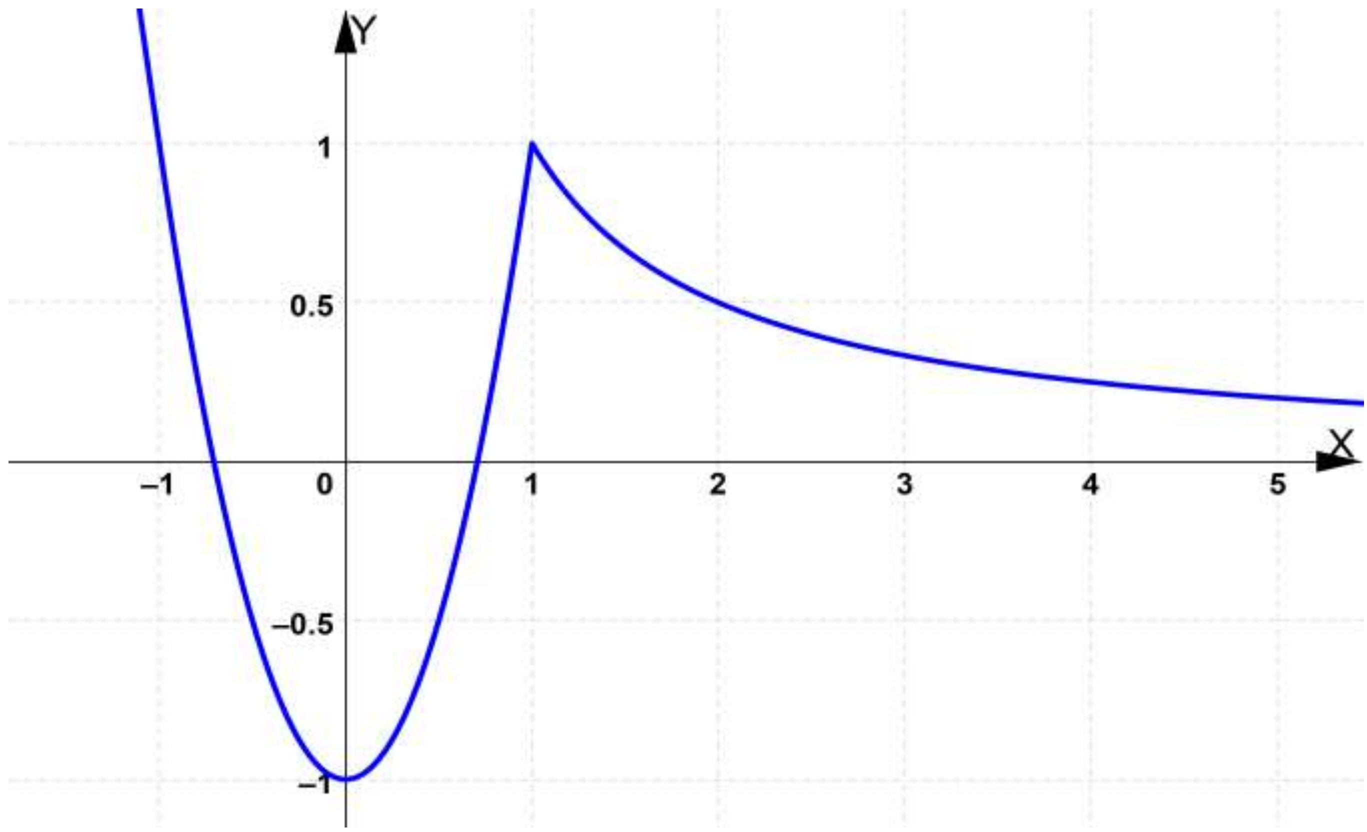
La gráfica está formada por una semirrecta, un trozo de parábola y uno de hipérbola.

$4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$; para $-1 < x < 1$, $f''(x) = 4$; $f''(0) = 4 > 0$.

Luego, el mínimo relativo (vértice de la parábola) es x = 0, y = f(0) = $2.0^2 - 1 = -1$, vértice V(0, –1)

Usamos el a) y además hallamos otro punto de la recta y otro de la hipérbola:

$x = -2$, $y = -4(-2) - 3 = 5$, (–2, 5) ; $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$, , punto (2 ; 0,5)



10.- Sea la función $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + b$.

a) Halle a y b para que la función se anule en x = 1 y tenga un punto de inflexión en $x = \frac{-1}{2}$

Resolución

$f'(x) = 6x^2 + 2ax - 12$, $f''(x) = 12x + 2a$

Como tiene punto de inflexión en $x = \frac{-1}{2}$ entonces $f''\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$. Luego, $12.\frac{-1}{2} + 2a = 0$; a = 3

Nos queda $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + b$

Como f se anula en x =1 entonces f(1) = 0. Luego, $2.1^3 + 3.1^2 - 12.1 + b = 0$; b = 7

Conclusión: debe ser a = 3, b = 7 y $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$

---

b) Para a = −3 y b = 2, calcule sus máximos y mínimos relativos.

Resolución

Para a = −3, b = 2, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$; $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.(-2)}}{2.1} = \frac{1 \pm 3}{2};\ x = -1, x = 2$$

Hagamos una tabla de signos de f´(x) teniendo en cuenta que su gráfica es una parábola convexa que corta al eje X en −1 y en 2

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f´(x)	+	0	-	0	+
f(x)	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 2)$

Máximo relativo: x = −1, y = f(−1) = $2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 2 = 10$. Punto M(−1, 9)

Mínimo relativo: x = 2, y = f(2) = $2.2^3 - 3.2^2 - 12.2 + 2 = -18$. Punto N(2, −18)

11.- Se conoce que el rendimiento de un jugador de fútbol durante los primeros 45 minutos de un partido viene dado por la función f: [0, 45] → R cuya expresión analítica es $f(t) = 7{,}2t - 0{,}16t^2$, donde t es el tiempo, expresado en minutos.

a) Represente gráficamente esta función.

Resolución

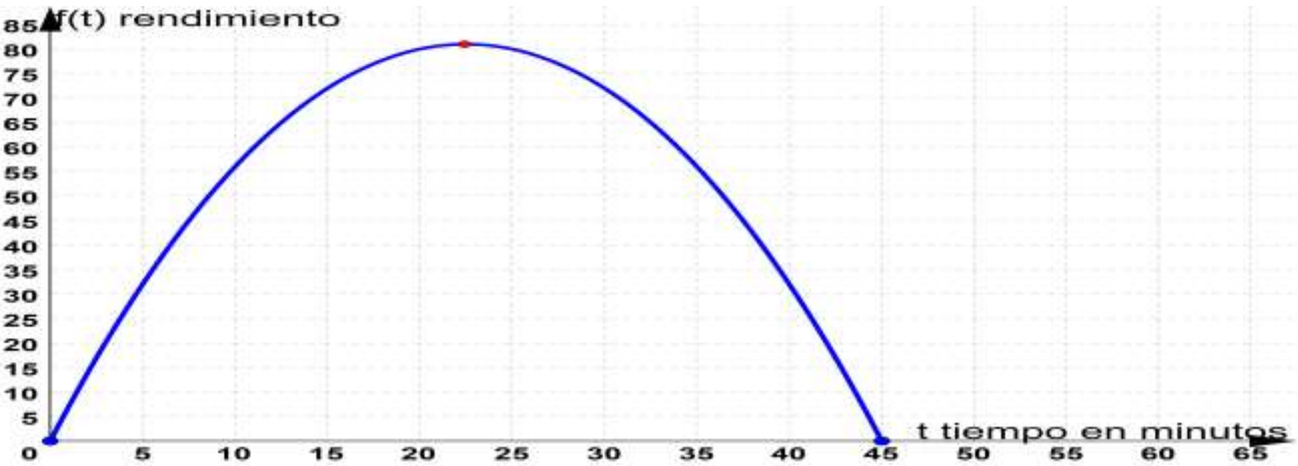
La gráfica está formada por un trozo de parábola en el intervalo [0, 45].

$f'(t) = 7{,}2 - 0{,}32t = 0 \Leftrightarrow t = 22{,}5$; $f''(t) = -0{,}32$ $f''(22{,}5) = -0{,}32 < 0$ (cóncava)

Vértice (máximo relativo): t = 22,5, $f(22{,}5) = 7{,}2 \,.\, 22{,}5 - 0{,}16 \,.\, 22{,}5^2 = 81$, V(22,5; 81).

Extremos del trozo de parábola:

t = 0, $f(0) = 7{,}2 \,.\, 0 - 0{,}16 \,.\, 0^2 = 0$, P(0, 0) ; t = 45, $f(45) = 7{,}2 \,.\, 45 - 0{,}16 \,.\, 45^2 = 81$, Q(45, 0)



b) ¿Cuál es el máximo rendimiento del jugador? ¿En qué momento lo consigue? ¿En qué instantes tiene un rendimiento igual a 32?

Resolución

El máximo rendimiento es 81 y lo consigue a los 22,5 minutos.

Rendimiento = 32 ⇒ $f(t) = 7{,}2t - 0{,}16t^2 = 32 \Rightarrow 16t^2 - 720t + 3200 = 0 \Rightarrow t^2 - 45t + 200 = 0$

$$t = \frac{45 \pm \sqrt{2025 - 4.1.200}}{2.1} = \frac{45 \pm 35}{2};\ t = 5, t = 40$$

Luego, el rendimiento es 32 a los 5 minutos y a los 40 minutos

12.- Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

a) Indique el dominio de definición de f, sus puntos de corte con los ejes, sus máximos y mínimos, si existen, y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Resolución

Como $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$, no existe $f(-1)$ y $Dom(f) = R - \{-1\}$

Por otra parte, como $f(x) = \frac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ y $f(0) = \frac{0-1}{0+1} = -1$, la gráfica de f corta a los ejes de coordenadas en los puntos $(1, 0)$ y $(0, -1)$; también $f'(x) = \frac{1.(x+1)-(x-1).1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$.

Luego, f es creciente en su dominio, en $R - \{-1\}$. No hay máximos ni mínimos

b) Obtenga las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de f, si las tiene, y represente la gráfica de la función.

Resolución

Para $x = -1$ no es continua por no estar definida y $\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{-1-1}{-1+1} = \frac{-2}{0} = \pm\infty$.

Luego, f(x) tiene una asíntota vertical en $x = -1$ cuya ecuación es A.V. : $x = -1$

Además, $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

Estudiemos las asíntotas en $\pm\infty$: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x} = 1$.

Luego, f(x) tiene asíntota horizontal en $\pm\infty$ de ecuación AH: $y = 1$

Estudiemos la posición de la gráfica respecto de la asíntota: $y_{gráfica} - y_{asíntota} = \frac{x-1}{x+1} - 1 = \frac{-2}{x+1}$.

$Si\ x \to -\infty,\ y_{gráfica} - y_{asíntota} > 0$. Luego, la gráfica está "por encima" de la asíntota en $-\infty$

$Si\ x \to +\infty,\ y_{gráfica} - y_{asíntota} < 0$. Luego, la gráfica está "por debajo" de la asíntota en $+\infty$