
1.- Sean A y B dos sucesos tales que $p(A^c) = 0{,}60$ $p(B) = 0{,}25$ y $p(A \cup B) = 0{,}55$

a) Razone si A y B son independientes.

Resolución

$p(A) = 1 - p(A^c) = 1 - 0{,}60 = 0{,}4$ y como $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, despejando,

$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}25 - 0{,}55 = 0{,}1$

$$p(A).p(B) = 0{,}4\,.\,0{,}25 = 0{,}1 = p(A \cap B) \Rightarrow \text{A y B son independientes.}$$

b) Calcule $p(A^c \cup B^c)$

Resolución Por una de las leyes de Morgan, $p(A^c \cup B^c) = p[(A \cap B)^c] = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

2.- Una urna contiene tres bolas azules y cuatro rojas. Se extraen al azar tres bolas sucesivamente con reemplazamiento.

a) Calcule la probabilidad de que las tres sean del mismo color.

Resolución

Sean los sucesos A = "sacar bola azul" R = "sacar bola roja". Como las bolas se devuelven a la urna hay independencia de sucesos. Usando la regla de Laplace, $p(A) = \frac{3}{7}$, $p(R) = \frac{4}{7}$.

Nos piden $p(AAA) + p(RRR) = \frac{3}{7}\frac{3}{7}\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\frac{4}{7}\frac{4}{7} = \frac{13}{49} \cong 0{,}2653 = 26{,}53\%$

b) Calcule la probabilidad de que dos sean azules y una roja.

Resolución

Nos piden $p(AAR) + p(ARA) + p(RAA) = \frac{3}{7}\frac{3}{7}\frac{4}{7} + \frac{3}{7}\frac{4}{7}\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\frac{3}{7}\frac{3}{7} = \frac{108}{343} \cong 0{,}3149 = 31{,}49\%$

3.- (prueba extraordinaria) Laura tiene un dado con tres caras pintadas de azul y las otras tres de rojo. María tiene otro dado con tres caras pintadas de rojo, dos de verde y una de azul. Cada una tira su dado y observan el color.

a) Describa el espacio muestral asociado y las probabilidades de los sucesos elementales.

Resolución

Sean los sucesos A = "la cara es azul" R = "la cara es roja".

El espacio muestral es E = {AR, AV, AA, RR, RV, RA}, donde, por ejemplo, AR significa que Laura saca cara azul y María saca cara roja. Evidentemente hay independencia de sucesos.

Usando la regla de Laplace, $p(AR) = p(RR) = \frac{3}{6}\frac{3}{6} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

$p(AV) = p(RV) = \frac{3}{6}\frac{2}{6} = \frac{1}{6} \cong 0{,}1667 = 16{,}67\%$; $p(AA) = p(RA) = \frac{3}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{12} \cong 0{,}0833 = 8{,}33\%$

b) Si salen los dos colores iguales gana Laura; y si sale el color verde, gana María. Calcule la probabilidad que tiene cada una de ganar.

Resolución

$p(gane\ Laura) = p(AA) + p(RR) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cong 0{,}3333 = 33{,}33\%$

$p(gane\ María) = p(AV) + p(RV) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cong 0{,}3333 = 33{,}33\%$

Tienen la misma probabilidad de ganar

4.- (prueba extraordinaria) De un estudio sobre accidentes de tráfico se dedujeron los siguientes datos: En el 23% de los casos no se llevaba puesto el cinturón de seguridad, en el 65% no se respetaron los límites de velocidad permitidos y en el 30% de los casos se cumplían ambas normas, es decir, llevaban puesto el cinturón y respetaban los límites de velocidad.
a) Calcule la probabilidad de que, en un accidente de tráfico, no se haya cumplido alguna de las dos normas.

Resolución

Sean los sucesos A = "llevar puesto el cinturón de seguridad" B = "respetar los límites de velocidad"

Según el enunciado $p(A^c) = 23\% = 0{,}23$; $p(B^c) = 65\% = 0{,}65$; $p(A \cap B) = 30\% = 0{,}3$

Por una de las leyes de Morgan, $p(A^c \cup B^c) = p[(A \cap B)^c] = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 = 70\%$

b) Razone si son independientes los sucesos "llevar puesto el cinturón" y "respetar los límites de velocidad".

Resolución

$$p(A) = 1 - p(A^c) = 1 - 0{,}23 = 0{,}77 \ ; \ p(B) = 1 - p(B^c) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$$

$$p(A).p(B) = 0{,}77 \,.\, 0{,}35 = 0{,}2695 \neq p(A \cap B) = 0{,}3 \Rightarrow \text{A y B son dependientes.}$$

5.- (prueba ordinaria) En un aula de dibujo hay 40 sillas, 30 con respaldo y 10 sin él. Entre las sillas sin respaldo hay 3 nuevas y entre las sillas con respaldo hay 7 nuevas.
a) Tomada una silla al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea nueva?

Resolución

Sean los sucesos R = "La silla tiene respaldo" N = "La silla es nueva"

Construimos la siguiente tabla de contingencia:

	R	R^c	Total
N	7	3	10
N^c	30 – 7 = 23	10 – 3 = 7	30
Total	30	10	40

Se pide $p(N) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

b) Si se coge una silla que no es nueva, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga respaldo?

Resolución Se pide $p(R^c/N^c) = \frac{p(R^c \cap N^c)}{p(N^c)} = \frac{7/40}{30/40} = \frac{7}{30} \cong 0{,}2333 = 23{,}33\%$

6.- (prueba ordinaria) Sean los sucesos A y B independientes. La probabilidad de que ocurra el suceso B es 0,6. Sabemos también que $p(A/B) = 0{,}3$.
a) Calcule la probabilidad de que suceda al menos uno de los dos sucesos.

Resolución

Al ser A y B independientes $p(A) = p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A/B)\,.\,p(B) = 0{,}3 \,.\, 0{,}6 = 0{,}18$

Luego, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}18 = 0{,}72$

b) Calcule la probabilidad de que ocurra el suceso A pero no el B.

Resolución Se pide $p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B) = 0{,}3 - 0{,}18 = 0{,}12$

7.- Una enfermedad afecta a un 5% de la población. Se aplica una prueba diagnóstica para detectar dicha enfermedad, obteniéndose el siguiente resultado: Aplicada a personas que padecen la enfermedad se obtiene un 96% de resultados positivos, y aplicada a personas que no la padecen se obtiene un 2% de resultados positivos. Elegida una persona, al azar, y aplicada la prueba:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga un resultado positivo?

Resolución

Sean los sucesos A = "la persona está enferma" B = "la prueba da resultado positivo"

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	A	A^c	Total
B	96% del 5% = 4,8%	2% del 95% = 1,9%	6,7%
B^c	5% – 4,8% = 0,2%	95% – 1,9% = 93,1%	93,3%
Total	5%	100% – 5% = 95%	100%

Se pide $p(B) = 6{,}7\%$

b) Si se obtiene un resultado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona no padezca la enfermedad?

Resolución Se pide $p(A^c/B) = \frac{p(A^c \cap B)}{p(B)} = \frac{1{,}9\%}{6{,}7\%} = \frac{1{,}9}{6{,}7} \cong 0{,}2836 = 28{,}36\%$

8.- Una urna A contiene diez bolas numeradas del 1 al 10, y otra urna B contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8. Se escoge una urna al azar y se saca una bola.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída tenga el número 2?

Resolución

Sean los sucesos A = "elegir urna A" B = "elegir urna B" C = "sacar el número 2"

Usando el enunciado, $p(A) = p(B) = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $p(C/A) = \frac{1}{10} = 0{,}1$; $p(C/B) = \frac{1}{8} = 0{,}125$

Se pide p(C) y podemos usar el teorema de la probabilidad total,

$$p(C) = p(A).p(C/A) + p(B).p(C/B) = 0{,}5\,.\,0{,}1 + 0{,}5\,.\,0{,}125 = 0{,}1125 = 11{,}15\%$$

b) Si el número de la bola extraída es impar, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B.

Resolución

Sean los sucesos A = "elegir urna A" B = "elegir urna B" D = "sacar un número impar"

Usando el enunciado, $p(A) = p(B) = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $p(D/A) = \frac{5}{10} = 0{,}5$; $p(D/B) = \frac{4}{8} = 0{,}5$

Se pide p(D) y podemos usar el teorema de la probabilidad total,

$$p(D) = p(A).p(D/A) + p(B).p(D/B) = 0{,}5\,.\,0{,}5 + 0{,}5\,.\,0{,}5 = 0{,}5 = 50\%$$

9.- Se dispone de dos urnas A y B. En la urna A hay diez bolas, numeradas del 1 al 10 y en la urna B hay 3 bolas, numeradas del 1 al 3. Se lanza una moneda, si sale cara se extrae una bola de la urna A y si sale cruz se extrae de la B.

a) Calcule la probabilidad de obtener cara y un 5.

Resolución

Sean los sucesos A = "salir cara" = "elegir urna A" B = "salir cruz" = "elegir urna B"

C = "sacar el número 5"

Usando el enunciado, $p(A) = p(B) = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $p(C/A) = \frac{1}{10} = 0{,}1$

Se pide $p(A \cap C) = p(A).p(C/A) = 0{,}5 \,.\, 0{,}1 = 0{,}05 = 5\%$

b) Halle la probabilidad de obtener un 6.

Resolución

Sean los sucesos A = "salir cara" = "elegir urna A" B = "salir cruz" = "elegir urna B"

D = "sacar el número 6"

Usando el enunciado, $p(A) = p(B) = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $p(D/A) = \frac{1}{10} = 0{,}1$; $p(D/B) = 0$

Se pide p(D) y podemos usar el teorema de la probabilidad total,

$$p(D) = p(A).p(D/A) + p(B).p(D/B) = 0{,}5 \,.\, 0{,}1 + 0{,}5 \,.\, 0 = 0{,}05 = 5\%$$

c) Calcule la probabilidad de obtener un 3.

Resolución

Sean los sucesos A = "salir cara" = "elegir urna A" B = "salir cruz" = "elegir urna B"

F = "sacar el número 3"

Usando el enunciado, $p(A) = p(B) = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $p(F/A) = \frac{1}{10} = 0{,}1$; $p(F/B) = \frac{1}{3}$

Se pide p(F) y podemos usar el teorema de la probabilidad total,

$$p(F) = p(A).p(F/A) + p(B).p(F/B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{60} \cong 0{,}2167 = 21{,}67\%$$

10.- Se conocen los siguientes datos de un grupo de personas, relativos al consumo de un determinado producto:

	Consume	No consume
Hombre	10	30
Mujer	25	12

Se elige en ese grupo una persona al azar. Calcule la probabilidad de que:

a) Sea mujer.

Resolución

Sean los sucesos C = "consumir" H = "ser hombre" . Completamos la tabla de contingencia:

	C	C^c	Total
H	10	30	40
H^c	25	12	37
Total	35	42	77

Se pide $p(H^c) = \frac{37}{77} \cong 0{,}4805 = 48{,}05\%$

b) Habiendo consumido el producto, se trate de una mujer.

Resolución Se pide $p(H^c/C) = \frac{p(H^c \cap C)}{p(C)} = \frac{25/77}{35/77} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7} \cong 0{,}7143 = 71{,}43\%$

c) Sea mujer y no consuma el producto.

Resolución Se pide $p(H^c \cap C^c) = \frac{12}{77} \cong 0{,}1558 = 15{,}58\%$

11.- En un espacio muestral se tienen dos sucesos independientes, A y B.
Se sabe que $p(A \cap B) = 0{,}18$ y $p(A/B) = 0{,}30$.
a) Calcule las probabilidades de A y de B.

Resolución

Al ser A y B independientes $p(A) = p(A/B) = 0{,}3$

Por otra parte, $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Rightarrow p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A/B)} = \frac{0{,}18}{0{,}3} = 0{,}6$

b) Calcule la probabilidad de que no ocurra ninguno de esos dos sucesos.

Resolución

Por una de las leyes de Morgan, $p(A^c \cap B^c) = p[(A \cup B)^c] = 1 - p(A \cup B) =$

$= 1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)] = 1 - (0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}18) = 0{,}28$

12.- En una empresa, el 65% de la plantilla son hombres; de ellos, el 80% usan el ordenador.
Se sabe que el 83,5% de la plantilla de la empresa usa el ordenador.
a) Calcule la probabilidad de que una persona de esa empresa, elegida al azar, sea un hombre que no utiliza el ordenador.

Resolución

Sean los sucesos A = "la persona es hombre" B = "la prueba usa el ordenador"

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	A	A^c	Total
B	80% del 65% = 52%	83,5% – 52% = 31,5%	83,5%
B^c	65% – 52% = 13%	35% – 31,5% = 3,5%	16,5%
Total	65%	100% – 65% = 35%	100%

Se pide $p(A \cap B^c) = 13\%$

b) Seleccionada una mujer de esa empresa, al azar, calcule la probabilidad de que utilice el ordenador.

Resolución

Se pide $p(B/A^c) = \frac{p(B \cap A^c)}{p(A^c)} = \frac{31{,}5\%}{35\%} = \frac{31{,}5}{35} = 0{,}9 = 90\%$