1.- Tratamos de adivinar, mediante ciertas pistas, los precios de tres productos A, B y C.

• Pista 1: Si compramos una unidad de A, dos de B y una de C gastamos 118 euros

• Pista 2: Si compramos n unidades de A, n + 3 de B y tres de C gastamos 390 euros

a) ¿Hay algún valor de n para el que estas dos pistas sean incompatibles?

**Resolución**

Como una unidad de A, dos de B y una de C cuestan 118 €, entonces A + 2B + C = 118.

Como n unidades de A, (n + 3) de B y tres de C cuestan 390 €, entonces nA + (n+3)B + 3C = 390.

Nos queda el sistema

Matriz de coeficientes: ; matriz ampliada, o del sistema: .

Como el menor de M\* , , entonces rg M\* = 2

Para que las pistas (ecuaciones) sean incompatibles debe ser rg M = 1.

Debe ser entonces y . Luego, n – 3 = 0 y 6 – n – 3 = 0. De donde, n = 3.

Si n = 3, la matriz del sistema es

La 2ª fila corresponde a la ecuación 0 = 12, que es incompatible.

Luego, las pistas son incompatibles para n = 3.

b) Sabiendo que n = 4 y que el producto C cuesta el triple que el producto A, calcula el precio de cada

producto.

**Resolución**

Como el producto C cuesta el triple que el producto A, entonces C = 3A.

Al ser n = 4, el nuevo sistema sería

Matriz de coeficientes: ; Matriz ampliada, o del sistema:

Como det M = –7 + 18 – 21 + 8 = –2 ≠ 0, rg M = 3 y como M\* contiene a M y sólo tiene 3 filas, rg M\* = 3.

Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

La matriz del sistema es

que corresponde al sistema

Resolviendo, C = 69 ; B + 69 = 82, de donde B = 13; A + 2.13 + 69 = 118 ; A = 23

Respuesta: El producto A cuesta 23 €, el B 13 € y el C 69 €

2.- Sean A, B, C y X matrices que verifican AXB = C

a) Si las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de A es 3, el de B es –1 y el

de C es 6, calcula el determinante de las matrices X y 2X.

**Resolución**

Como el determinante del producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices: det(AXB) = det C ; det A . det X . det B = det C. Despejando,

Al ser las matrices de orden 3, entonces det (2X) = 23.det X = 8.(–2)= –16

b) Si y, calcula la matriz X

**Resolución**

Como det A = –2 y det B = 1, existen A–1 y B–1.

Multiplicando por A‒1, por la izquierda y por B‒1, por la derecha, en los dos miembros:

A–1AXBB–1 = A–1CB–1 ; IXI= A–1CB–1 ; X = A–1CB–1.

**3.-** **(prueba extraordinaria)**

a) Discute según los valores λ el siguiente sistema

**Resolución**

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = λ2 – 3λ – 3λ = λ2 – 6λ = 0 ⇔ λ(λ – 6) = 0 ⇔ λ = 0 ó λ = 6

– Si λ ≠ 0 ; λ ≠ 6, det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A\* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

– Si λ = 0, det A = 0 y . Como , rg A = 2.

. Como , rg A\* = 2.

Luego, rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si λ = 6, det A = 0 y . Como , rg A = 2.

La 2ª fila corresponde a la ecuación 0 = 4, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

b) Resuélvelo para λ = 0

**Resolución**

Para λ = 0, la matriz del sistema es equivalente a , que corresponde al

sistema . Como x = 0, sustituyendo, 0 + y + 3z = 1, y + 3z = 1. Luego, y = 1 – 3z.

Llamando z = k, las infinitas soluciones son , con k ∈ R

**4.-** **(prueba extraordinaria)** Sean las matrices

y . Determina la matriz X que verifica AX – Bt = 2C

**Resolución**

Sumando Bt en los dos miembros, AX = 2C + Bt. Como det A = 1 – 2 + 1 + 4 = 4 ≠ 0, existe A–1.

Multiplicando por A–1, por la izquierda, en los dos miembros: A‒1AX = A‒1(2C + Bt) ⇒ X = A‒1(2C + Bt)

**5.-** **(prueba ordinaria)** Sean F1, F2 , F3 , las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una

matriz B de orden 3, cuyo determinante vale –2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

(a) El determinante de B–1. **Resolución**

(b) El determinante de (Bt)4 (Bt es la matriz traspuesta de B).

**Resolución**

(c) El determinante de 2B. **Resolución** Como B es de orden 3,

(d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son,

respectivamente, 5F1 – F3, 3F3, F2.

**Resolución**

det(5F1 – F3, 3F3, F2) = det(5F1, 3F3, F2) – det(F3, 3F3, F2) = 5.3 det(F1, F3, F2) – 0 =

= 15.[– det(F1, F2, F3)] = 15.[–(–2)] = 30

**6.-** **(prueba ordinaria)** Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres

mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros respectivamente. El coste total de la

operación ha sido de 40500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que

en el primero de ellos se ha comprado el 30% de las cajas.

**Resolución**

Sean x, y, z el nº de cajas de pescado que la empresa compra en cada mercado.

Como compra 1500 cajas, entonces x + y + z = 1500.

Como le cuesta en total 40500 €, entonces 30x + 20y + 40z = 40500.

Como en el primer mercado ha comprado el 30% de las cajas, entonces x = 30% de 1500 ; x = 450.

La 1ª ecuación quedaría así: 450 + y + z = 1500 ; y + z = 1050

La 2ª ecuación quedaría así: 30.450 + 20y + 40z = 40500 ; 20y + 40z = 27000 ; o sea, y + 2z = 1350

Nos queda el sistema . Restando las ecuaciones se tiene que z = 300 ; despejando y en la

primera ecuación, y = 1050 – z = 1050 – 300 ; y = 750.

En el primer mercado paga: 450 cajas. 30 €/caja = 13500 €

En el 2º: 750 cajas. 20 €/caja = 15000 € ; En el 3º: 300 cajas. 40 €/caja = 12000 €

7.- Dadas las matrices y

a) Calcula, si existe, la matriz inversa de A

**Resolución**

Como det A = –1 ≠ 0, existe

b) Calcula las matrices X e Y que satisfacen las ecuaciones matriciales XA = A + 2B y AY = A + 2B

**Resolución**

Multiplicando por A**‒**1, por la derecha, en los dos miembros de la 1ª ecuación:

XA.A‒1 = (A + 2B)A‒1 ⇒ X = (A + 2B)A‒1

Multiplicando por A‒1, por la izquierda, en los dos miembros de la 2ª ecuación:

A**‒**1AY= A**‒**1(A + 2B) ⇒ Y = A**‒**1(A + 2B)

8.- Dado el sistema de ecuaciones lineales

a) Discútelo según los valores de parámetro λ.

**Resolución**

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = 3 + λ2 + 1 – 3λ – 1 – λ = λ2 – 4λ + 3 = 0 ⇔

– Si λ ≠ 3 ; λ ≠ 1 , det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A\* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si λ = 1, det A = 0 y . Como , rg A = 2.

. Como , rg A\* = 2.

Luego, rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si λ = 3, .

La 2ª fila corresponde a la ecuación 0 = 8, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible.

b) Resuélvelo en el caso λ = 1 **Resolución**

Para λ = 1 sabemos que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a , que corresponde al sistema .

Despejando y en la 2ª ecuación, .

Despejando x en la 1ª ecuación, .

Llamando z = k, las infinitas soluciones son , con k ∈ R

9.-

a) Resuelve el sistema de ecuaciones

**Resolución**

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = 5 – 2 + 1 – 4 = 0. Como , rg A = 2.

; , rg A\* = 2.

Luego, rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a , que corresponde al sistema .

Despejando, y = 2 – 3z ; x = 2 – z. Llamando z = k, las infinitas soluciones son , con k ∈ R

b) Calcula λ sabiendo que el siguiente sistema tiene alguna solución común con el del apartado a)

**Resolución**

Discutamos el sistema:

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = λ + 3 – 2 – 1 + λ – 6 = 2λ – 6 = 0 ⇔ λ = 3

– Si λ ≠ 3, det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A\* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

– Si λ = 3, det A = 0 y . Como , rg A = 2.

.

La 3ª fila corresponde a la ecuación 0 = –5, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible.

Por tanto, para que tenga alguna solución en común con el del a) debe ser λ ≠ 3

Veamos cuál es el valor de λ:

Sabemos que λ ≠ 3 y det A = 2λ – 6. Vamos a usar la regla de Cramer para resolver el sistema:

det Ax = λ – 9 + 2 + 3 – 6 – λ = –10

det Ay = λ + 3 + 3 – 1 + 9 + λ = 2λ + 14

det Az = –3 + 1 – 2 – 1 – 2 – 3 = –10

Como tiene que tener alguna solución común con el sistema del a), que es

3 – 7λ + 2λ2 = 15 – 5λ ; 2λ2 – 2λ – 12 = 0 ; λ2 – λ – 6 = 0 ;

39 – 16λ + λ2 = 45 – 15λ ; λ2 – λ – 6 = 0 ;

λ = –2 y . La solución común con el sistema del a) es

10.- Considera las matrices y

a) Calcula, si existe, A–1.

**Resolución**

Como det A = 4 + 4 + 4 – 1 + 8 + 8 = 27 ≠ 0, existe

b) Resuelve el sistema AX = 3X e interpreta geométricamente el conjunto de sus soluciones

**Resolución**

Restando 3X en los dos miembros de la igualdad, AX – 3X = 0 → AX – 3IX = 0.

Sacando factor común X, por la derecha, (A – 3I)X = 0, sistema homogéneo.

Sea . Nos queda BX = 0

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det B = –50 + 4 + 4 + 2 + 20 + 20 = 0 y como , rg B = 2 = rg B\* < nº de incógnitas.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es:

que corresponde al sistema . Despejando y en la 2ª ecuación, y = –2z

Despejando, x = –y – z = –(–2z) – z = z. Llamando z = k, las infinitas soluciones son , k ∈ R

Geométricamente las soluciones corresponden a los puntos de una recta, intersección de dos planos.

11.- Se consideran las matrices y B = A – kI , donde k es una constante.

a) Determina los valores de k para los que B no tiene inversa

**Resolución**

det B = 3 + 4k + k2 – 2 = k2 + 4k + 1 = 0 ⇔

Luego, para la matriz B no tiene inversa

b) Calcula B–1 para k = –1

**Resolución**

Para k = –1,

det B = –2 ≠ 0, existe

c) Determina la constantes α y β para las que se cumple A2 + αA = βI

**Resolución**

Operando,

Igualando las componentes, .

Como, α = 4, sustituyendo, . La respuesta es: α = 4, β = –1

12.- Sea el sistema de ecuaciones

a) Determina los valores de m para los que el sistema es compatible

**Resolución**

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = –m + m – 1 + 1 = 0 y como , rg A = 2.

En A\*, el menor

⇔ m = 0 ó m = –1

– Si m ≠ 0 ; m ≠ –1, rg A\* = 3 ≠ rg A = 2. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible, no tiene solución.

– Si m = 0, .

Como , rg A\* = 2. Luego, rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si m = –1, .

Como , rg A\* = 2.

Luego, rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Conclusión: Para m = 0 ó m = –1 el sistema es compatible (compatible indeterminado)

b) Resuelve el sistema en el caso m = –1

**Resolución**

Para m = –1, sabemos que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a , que corresponde al sistema .

Despejando, x = –y ; z = 2y +1. Llamando y = k, las infinitas soluciones son , con k ∈ R