**1.-** **(prueba ordinaria)** Sean las matrices y

(a) Indica los valores de m para los que A es invertible.

**Resolución**

det A = –m2 + 4m – 3 = 0 ⇔

Luego, para m ≠ 1 y m ≠ 3 la matriz A es invertible

(b) Resuelve la ecuación matricial XA − Bt = C para m = 0.

**Resolución**

Para m = 0 sabemos que A es invertible, y det A = –3 ≠ 0

Sumando Bt en los dos miembros de la igualdad, XA = C + Bt. Multiplicando por A**‒**1, por la derecha, en los dos miembros: XAA–1 = (C + Bt)A–1 ; XI= (C + Bt)A–1 ; X = (C + Bt)A–1.

**2.-** **(prueba ordinaria)** Sea el siguiente sistema de ecuaciones

(a) Discútelo según los valores de λ. ¿Tiene siempre solución?

**Resolución**

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = –λ3 + 1 – 2 + λ + λ – 2λ = –λ3 – 1 = 0 ⇔ λ3 = – 1 ⇔ λ = –1

– Si λ ≠ –1 , det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A\* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si λ = –1, det A = 0 y . Como , rg A = 2.

.

Como , rg A\* = 2. Luego, rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Luego, el sistema siempre tiene solución.

(b) Resuelve el sistema para λ = −1.

**Resolución**

Para λ = –1, sabemos que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a , que corresponde al sistema .

Despejando y en la 2ª ecuación, .

Despejando x en la 1ª ecuación, .

Llamando z = k, las infinitas soluciones son , con k ∈ R

3.- Sea la matriz

(a) Comprueba que se verifica 2A − A2 = I.

**Resolución**

(b) Calcula A−1. Sugerencia: Puedes usar la igualdad del apartado (a).

**Resolución**

I = 2A – A2 = A.2I – A2 = A(2I – A) ; I = 2A – A2 = 2I.A – A2 = (2I – A)A

Por definición de matriz inversa,

4.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

(a) Discútelo según los valores de m.

**Resolución**

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = m + 2 + m – 1 – 1 + 1 – m2 – 2m = 1 – m2 = 0 ⇔ m = 1 ó m = –1

– Si m ≠ 1 ; m ≠ –1 , det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A\* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si m = 1, det A = 0 y . Como , rg A = 2.

Por otra parte,

, rg A\* = 2. Luego, rg A = 2 = rg A\* < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si m = –1, la matriz del sistema es

La 3ª fila corresponde a la ecuación 0 = –2, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible.

(b) Resuélvelo para el caso m = 1.

**Resolución**

Para m = 1 sabemos que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a , que corresponde al sistema .

Despejando z en la 2ª ecuación, z = 2y – 1;

Despejando x en la 1ª ecuación, .

Llamando y = k, las infinitas soluciones son , con k ∈ R

5.- Considera el sistema

(a) Calcula razonadamente un valor de λ para que el sistema resultante al añadirle la

ecuación x + y + λz = 9 sea compatible indeterminado.

**Resolución**

La matriz de coeficientes del sistema es , que como , rg A = 2.

La matriz ampliada es que contiene a A y sólo tiene dos filas. Luego, rg A\* = 2

Como rg A = 2 = rg A\* < nº de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. Al añadir una tercera ecuación x + y + λz = 9 el nuevo sistema

es .

Las matrices de coeficientes y ampliada son

Como el sistema debe ser compatible indeterminado, det B debe ser nulo porque si no lo fuese

sería rg B = 3 = rg B\* = nº de incógnitas y por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema sería compatible determinado; det B = –9λ – 2 + 2 + 3 – 3 + 4λ = –5λ = 0 ⇔ λ = 0.

Veamos si para λ = 0 efectivamente es compatible indeterminado: rg B = 2 porque det B = 0 y

;

Dado que , rg B\* = 2. Como rg B = 2 = rg B\* < nº de incógnitas, por el teorema de

Rouché-Fröbenius el nuevo sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

(b) ¿Existe algún valor de λ para el cual el sistema resultante no tiene solución?

**Resolución**

Usando el apartado a) sabemos que si λ = 0 el sistema tiene infinitas soluciones y si λ ≠ 0 tiene solución única. Luego, no existe ningún valor de λ para el que no tenga solución.

6.- Sean las matrices y

(a) Determina los valores de α para los que A tiene inversa.

**Resolución**

det A = α + 6α – 2α2 – 6 = –2α2 + 7α – 6 = 0 ⇔ ⇔

Luego, para α ≠ 2 y la matriz A tiene inversa

(b) Calcula la inversa de A para α = 1.

**Resolución**

Para α = 1 A tiene inversa y, además, , det A = –2.12 + 7.1 – 6 = –1 ≠ 0.

(c) Resuelve, para α = 1, el sistema de ecuaciones AX = B.

**Resolución**

Para α = 1 sabemos que A tiene inversa.

Multiplicando por A**‒**1, por la izquierda, en los dos miembros: A–1AX = A–1B; IX= A–1B; X = A–1B.

**7.- (prueba extraordinaria)**

(a) Discute, según los valores del parámetro λ, el siguiente sistema de ecuaciones

**Resolución**

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = –4 + λ2 + 2λ + 3λ – 2 + 3λ + 6 – 2λ2 = –λ2 + 8λ = λ(–λ + 8) = 0 ⇔ λ = 0 ó λ = 8

– Si λ ≠ 0 ; λ ≠ 8 det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A\* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si λ = 0, det A = 0 y . Como , rg A = 2.

.

Como , rg A\* = 2. Luego, rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si λ = 8, la matriz del sistema es

.

La 3ª fila corresponde a la ecuación 0 = –44, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible.

(b) Resuelve el sistema anterior para λ = 0.

**Resolución**

Para λ = 0, sabemos que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a , que corresponde al sistema .

Despejando y = 2 – z ; x = z. Llamando z = k, las infinitas soluciones son , con k ∈ R

**8.-** **(prueba extraordinaria)** Sean las matrices y

Calcula la matriz X que cumpla la ecuación AXB = C.

**Resolución**

Observemos que como det A = 1 ≠ 0, existe A**‒**1 y como det B = –2 + 1 = –1 ≠ 0, existe también B–1.

Multiplicando por A**‒**1, por la izquierda y por B**‒**1, por la derecha, en los dos miembros:

A–1AXBB–1 = A–1CB–1 ; IXI= A–1CB–1 ; X = A–1CB–1.

9.- Considera las siguientes matrices y

(a) Calcula A−1.

**Resolución**

Observemos que como det A = –1 ≠ 0, existe A**‒**1.

(b) Resuelve la ecuación matricial AXAt − B = 2I

**Resolución**

Sumando B en los dos miembros, AXAt = B + 2I. Observemos que existen A**‒**1 y (At)**‒**1 = (A–1)t.

Multiplicando por A**‒**1, por la izquierda y por (At)**‒**1, por la derecha, en los dos miembros:

A–1AXAt(At)**‒**1 = A–1(B + 2I)(At)**‒**1 ; IXI= A–1(B + 2I)(At)**‒**1 ; X = A–1(B + 2I)(At)**‒**1.

10.- Obtén un vector no nulo de manera que las matrices siguientes tengan simultáneamente rango 2. y

**Resolución**

Dado que el menor de A y el menor de B , si det A = det B = 0

las dos matrices tendrán rango 2.

det A = b + a – b – c = a – c = 0 ⇔ c = a

det B = –2c + 3a – 2b. Como c = a, det B = a – 2b = 0 ⇔ a = 2b.

Llamando b = k, el vector que se pide es de la forma (2k, k, 2k), con k ∈ R, k ≠ 0.

Hay infinitas soluciones. Una solución se obtiene, por ejemplo, para k = 1,

11.- Considera el sistema de ecuaciones

(a) Discútelo según los valores del parámetro λ.

**Resolución**

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = 6λ2 + 16 + 12λ – 12λ – 4λ2 – 24 = 2λ2 – 8 = 0 ⇔ λ2 = 4 ⇔ λ = 2 ó λ = –2

– Si λ ≠ 2 ; λ ≠ –2 det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A\* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si λ = 2, det A = 0 y . Como , rg A = 2.

.

Como , rg A\* = 2. Luego, rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de

Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si λ = –2, la matriz del sistema es

.

La 2ª y 3ª filas corresponden a las ecuaciones 5z = 1 , 3z = –1, respectivamente, que son ecuaciones contradictorias. Luego, el sistema es incompatible.

(b) Resuélvelo para λ = 2.

**Resolución**

Para λ = 2, sabemos que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a , que corresponde al sistema .

De la 3ª ecuación, z = –1; despejando, x = –y – 3z = –y –3(–1) = 3 – y.

Llamando y = k, las infinitas soluciones son , con k ∈ R

12.- De la matriz se sabe que det(A) = 4. Se pide:

(a) Halla det(−3At) y . Indica las propiedades que utilizas.

**Resolución**

Al ser A cuadrada de orden dos, det(–3At) = (–3)2. det (At) = (–3)2. det A = 9.4 = 36

Hemos usado que det(k.A) = kn.det A, siendo n el orden de la matriz A y que det (At) = det A

(1) Cambiamos de orden las columnas y el determinante cambia de signo

(2) Sacamos el factor 2 de la 1ª fila y el factor (–3) de la 2ª fila

(3) Por el enunciado sabemos que

(b) Calcula det(A–1At). **Resolución**

(c) Si B es una matriz cuadrada tal que B3 = I, halla det(B).

**Resolución** . Luego, det B = 1