
1.- (prueba ordinaria) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcule $A^2 - BC^t$.

Resolución

$$A^2 - BC^t = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

b) Resuelva la ecuación matricial $AX + B = 2C$

Resolución

De $AX + B = 2C$ se tiene $AX = 2C - B$. Como $\det A = -1 \neq 0$, existe A^{-1} y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adjA^t) = \frac{1}{-1} adj\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por A^{-1}, por la izquierda, $A^{-1}AX = A^{-1}(2C - B)$, $X = A^{-1}(2C - B)$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\left[2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & 9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -30 & -13 \\ 3 & -13 & -6 \end{pmatrix}$$

2.-

a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $N^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, razone cuáles de las siguientes operaciones tienen sentido y efectúe las que puedan realizarse: $M + N^t$, M^tN , MN

Resolución

Como $M_{2\times 3}$ y $(N^t)_{2\times 3}$ sí que se pueden sumar porque tienen el mismo orden:

$$M + N^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $(M^t)_{3\times 2}$ y $N_{3\times 2}$ entonces no se pueden multiplicar porque el nº de columnas de la primera no coincide con el nº de filas de la segunda

Como $M_{2\times 3}$ y $N_{3\times 2}$ entonces sí se pueden multiplicar porque el nº de columnas de la primera coincide con el nº de filas de la segunda: $MN = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

b) Un industrial cafetero produce dos tipos de café, natural y descafeinado, en tres modalidades cada uno, A, B y C. Se han anotado en la matriz P los pesos, en kg, del café que el industrial produce de cada una de las modalidades de cada tipo, y en la matriz Q los precios a los que vende el kg de cada producto final:

$$P: \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} natural \\ descafeinado \end{array} & \begin{pmatrix} 550 & 400 & 240 \\ 260 & 200 & 100 \end{pmatrix} \end{array} \qquad Q: \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} natural \\ descafeinado \end{array} & \begin{pmatrix} 2{,}20 & 2{,}75 & 2{,}50 \\ 3{,}20 & 3{,}90 & 3{,}60 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectúe el producto PQ^t y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante.

Resolución

$$PQ^t = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} natur & descaf. \end{array} \\ \begin{array}{c} natural \\ descafeinado \end{array} & \begin{pmatrix} 2910 & 4184 \\ 1372 & 1972 \end{pmatrix} \end{array}$$

Significado: obtiene 2910 € por la venta de café natural y 1972 € por la de café descafeinado.

3.- Sean las matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Resuelva la ecuación matricial $2X - CD = (I_3 + D)C$.

Resolución

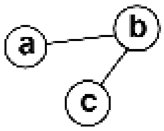
De $2X - CD = (I + D)C = C + DC$ resulta $2X = C + DC + CD$.

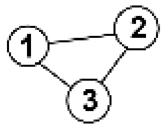
Multiplicando los dos miembros por $\frac{1}{2}$ se tiene $X = \frac{1}{2}(C + DC + CD)$

$$X = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$X = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si las matrices C y D son las matrices de adyacencia de dos grafos de vértices a, b, c y 1, 2, 3, respectivamente, haga la representación gráfica de dichos grafos

Resolución Grafo asociado a la matriz C: 

Grafo asociado a la matriz D: 

4.- (prueba extraordinaria) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Efectúe, si es posible, los siguientes productos: AA^t ; A^tA ; AB

Resolución

Como $A_{2\times 3}$ y $(A^t)_{3\times 2}$ entonces sí se pueden multiplicar porque el nº de columnas de la primera coincide con el nº de filas de la segunda: $AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Como $(A^t)_{3\times 2}$ y $A_{2\times 3}$ entonces sí se pueden multiplicar porque el nº de columnas de la primera coincide con el nº de filas de la segunda: $A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Como $A_{2\times 3}$ y $B_{2\times 2}$ entonces no se pueden multiplicar porque el nº de columnas de la primera no coincide con el nº de filas de la segunda

b) Resuelva la siguiente ecuación matricial $AA^tX = B$.

Resolución

Llamando $C = AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ queda la ecuación $CX = B$. Como $\det C = 2 \neq 0$, existe C^{-1} y

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}(adj C^t) = \frac{1}{2} adj \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por C^{-1}, por la izquierda, $C^{-1}CX = C^{-1}B$, $X = C^{-1}B$

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

5.-

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $(I_3 - A)^3$.

Resolución

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I - A)^3 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

b) Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$, determine a y b de manera que BC – D = O, siendo O la matriz nula.

Resolución

$$BC - D = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - 1 \\ 9 - b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - 6 \\ -b - 1 \end{pmatrix}.$$

Como tiene que ser igual a la matriz nula, $3a - 6 = 0$, $a = 2$ y $-b - 1 = 0$, $b = -1$

6.-

a) De una matriz cuadrada, A, de orden 3 se conocen los siguientes elementos $a_{12} = a_{21} = -2$, $a_{13} = a_{31} = 0$, $a_{23} = a_{32} = 1$. Determine los demás elementos de la matriz A sabiendo que debe cumplirse la ecuación $AB = C^t$, donde $B^t = (1 \quad -1 \quad 1)$ y $C = (-4 \quad 2 \quad -1)$

Resolución

La matriz A será de la forma $A = \begin{pmatrix} x & -2 & 0 \\ -2 & y & 1 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}$.

$$AB = C^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -2 & 0 \\ -2 & y & 1 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + 2 \\ -y - 1 \\ z - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Igualando los términos, $x + 2 = -4$, $x = -6$; $-y - 1 = 2$, $y = -3$; $z - 1 = -1$, $z = 0$.

Luego, la matriz es $A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Calcule $2D^2$, siendo $D = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

Resolución $2D^2 = 2\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -14 & 20 \\ -12 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & 40 \\ -24 & 20 \end{pmatrix}$