
1.- Un fabricante elabora dos tipos de anillos a base de oro y plata. Cada anillo del primer tipo precisa 4 g de oro y 2 de plata, mientras que cada uno del segundo necesita 3 g de oro y 1 de plata. Sabiendo que dispone de 48 g de oro y 20 de plata y que los precios de venta de cada tipo de anillo son 150 euros el primero y 100 euros el segundo, ¿cuántos anillos de cada tipo tendría que producir para obtener los ingresos máximos? ¿A cuánto ascenderían estos ingresos?

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	número	**g de oro**	**g de plata**	**ingresos (en €)**
anillos del 1er tipo	x	4x	2x	150x
anillos del 2º tipo	y	3y	1y	100y
total		4x + 3y	2x + y	150x + 100y

Las restricciones son $\begin{cases} 4x+3y \leq 48 \\ 2x+y \leq 20 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$. La función a optimizar (maximizar) es f(x, y) = 150x + 100y

Obtención de la región factible (resolvemos el sistema de inecuaciones):

$4x + 3y \leq 48 \rightarrow$ Recta: $4x + 3y = 48$

$x = 0, \quad 4.0 + 3y = 48, \quad y = 16$
$y = 0, \quad 4x + 3.0 = 48, \quad x = 12$

x	0	12
y	16	0

$(0, 0) \rightarrow 4.0 + 3.0 \leq 48$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$2x + y \leq 20 \rightarrow$ Recta: $2x + y = 20$

$x = 0, \quad 2.0 + y = 20, \quad y = 20$
$y = 0, \quad 2x + 0 = 20, \quad x = 10$

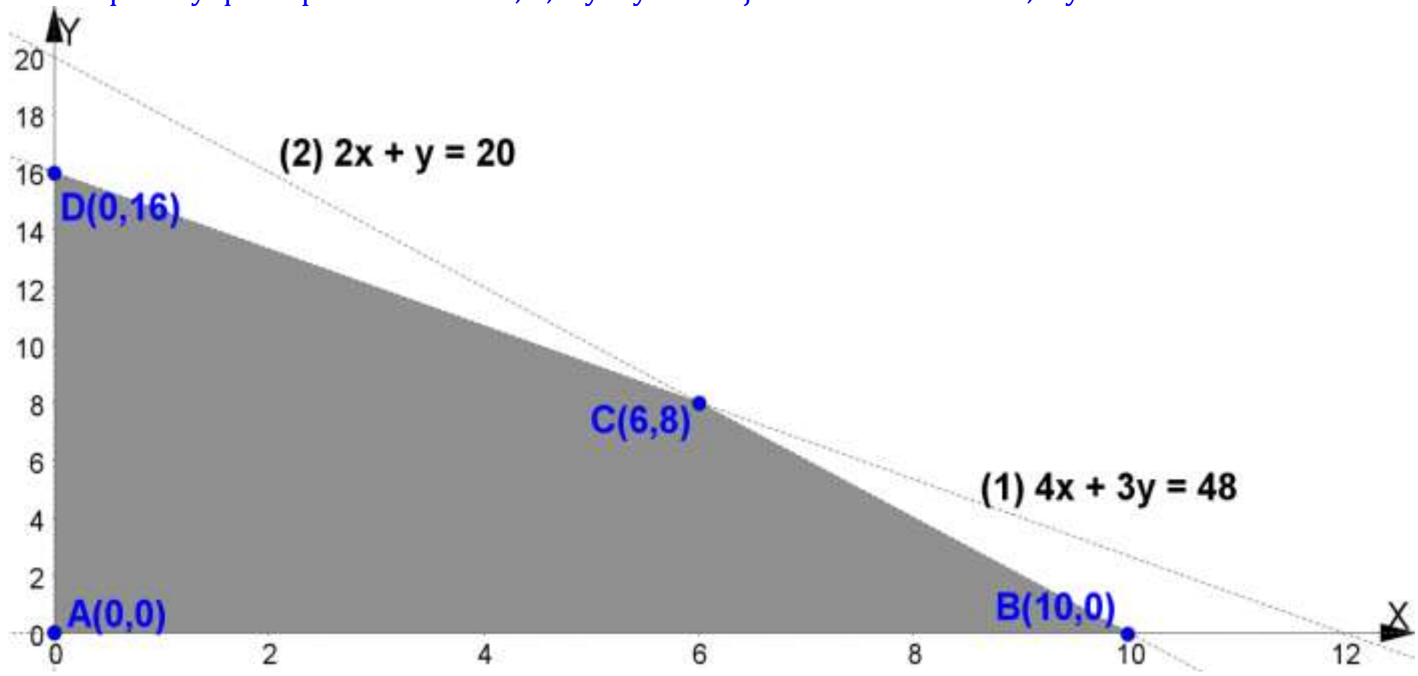
x	0	10
y	20	0

$(0, 0) \rightarrow 2.0 + 0 \leq 20$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)
$(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)
$(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 1, 3 y 4 y en el eje Y los valores son 0, 1 y 4



Obtención de los vértices:

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \to A(0,0)$ $\quad\quad$ $\begin{cases} 2x+y=20 \\ y=0 \end{cases}$; $2x+0=20,\ \ x=10\ \to B(10,0)$

$\begin{cases} 2x+y=20 \\ 4x+3y=48 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 3} \begin{cases} 6x+3y=60 \\ 4x+3y=48 \end{cases}$; restando, $2x=12,\ \ x=6;\ \ 2.6+y=20,\ \ y=8 \to C(6,8)$

$\begin{cases} 4x+3y=48 \\ x=0 \end{cases}$; $4.0+3y=48,\ \ y=16\ \to D(0,16)$

Veamos en qué vértices alcanza el valor mínimo f(x, y) = 150x + 100y:

f(A) = f(0, 0) = 150.0 + 100.0 = 0 $\quad\quad$ f(B) = f(10, 0) = 150.10 + 100.0 = 1500

f(C) = f(6, 8) = 150.6 + 100.8 = 1700 $\quad\quad$ f(D) = f(0, 16) = 150.0 + 100.16 = 1600

Los ingresos máximos son 1700 € y se obtienen produciendo 6 anillos del primer tipo y 8 del segundo

2.- En un problema de programación lineal, la región factible es la región acotada cuyos vértices son A(2, −1), B(−1, 2), C(1, 4) y D(5,0). La función objetivo es la función f(x, y) = 2x + 3y + k cuyo valor máximo, en dicha región, es igual a 19. Calcule el valor de k e indique dónde se alcanza el máximo y dónde el mínimo.

Resolución

f(A) = f(2, −1) = 2.2 + 3(−1) + k = 1 + k $\quad\quad$ f(B) = f(−1, 2) = 2(−1) + 3.2 + k = 4 + k

f(C) = f(1, 4) = 2.1 + 3.4 + k = 14 + k $\quad\quad$ f(D) = f(5, 0) = 2.5 + 3.0 + k = 10 + k

Como 1 + k < 4 + k < 10 + k < 14 + k, el valor máximo se alcanza en C y el mínimo en A.

Dado que el valor máximo es 19 entonces 14 + k = 19 ⇒ k = 5.

3.- (prueba extraordinaria) Sea R la región factible definida por las siguientes inecuaciones

$$x \geq 3y \quad , \quad x \leq 5 \quad , \quad y \geq 1$$

a) Razone si el punto (4,5 ; 1,55) pertenece a R.

Resolución

Hay que comprobar si cumple todas las restricciones, $\begin{cases} x \geq 3y \\ x \leq 5 \\ y \geq 1 \end{cases}$

Sustituyendo, $\begin{cases} 4{,}5 \geq 3.1{,}55 = 4{,}65\ \ (no) \\ 4{,}5 \leq 5\ \ (sí) \\ 1{,}55 \geq 1\ \ (sí) \end{cases}$. Luego, NO pertenece a R porque no cumple la 1ª inecuación.

b) Dada la función objetivo F(x, y) = 2x – 3y calcule sus valores extremos en R.

Resolución

Obtención de la región factible, R (resolvemos el sistema de inecuaciones):

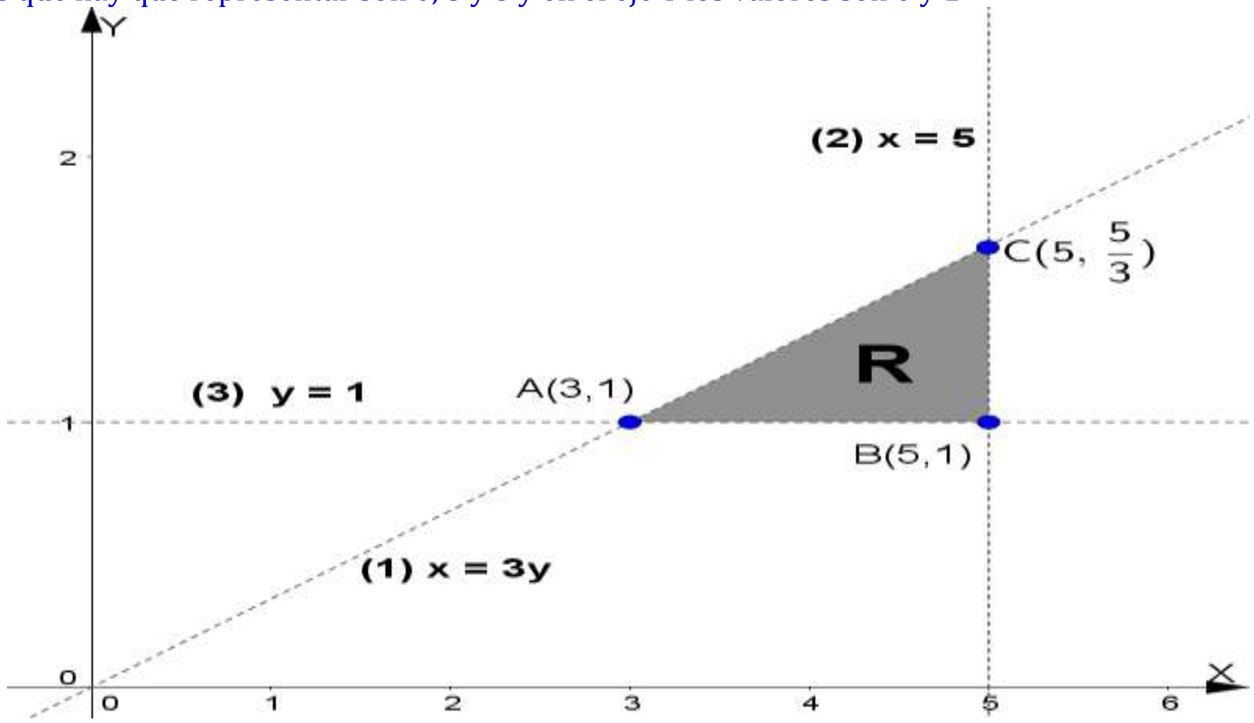
$x \geq 3y \rightarrow$ Recta: $x = 3y$; $x = 0$, $0 = 3y$, $y = 0$; $x = 3$, $3 = 3y$, $y = 1$

x	0	3
y	0	1

$(1, 0) \rightarrow 1 \geq 3.0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

$x \leq 5 \rightarrow$ Recta: $x = 5$ Es la recta vertical que pasa por (5, 0). $(0, 0) \rightarrow 0 \leq 5$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).	$y \geq 1 \rightarrow$ Recta: $y = 1$ Es la recta horizontal que pasa por (0, 1). $(0, 0) \rightarrow 0 \geq 1$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al (0, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 3 y 5 y en el eje Y los valores son 0 y 1



Obtención de los vértices:

$\begin{cases} x = 3y \\ y = 1 \end{cases}$; $x = 3.1$, $x = 3 \rightarrow A(3,1)$ $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow B(5,1)$ $\begin{cases} x = 3y \\ x = 5 \end{cases}$; $5 = 3y$, $y = \frac{5}{3} \rightarrow C\left(5, \frac{5}{3}\right)$

Veamos en qué vértices alcanza los valores extremos F(x, y) = 2x – 3y:

$F(A) = F(3, 1) = 2.3 - 3.1 = 3$ $F(B) = F(5, 1) = 2.5 - 3.1 = 7$ $F(C) = F\left(5, \frac{5}{3}\right) = 2.5 - 3.\frac{5}{3} = 5$

Luego, el mínimo es 3 y se alcanza en A; el máximo es 7 y se alcanza en B

c) Razone si hay algún punto de R donde la función F valga 3,5 ¿Y 7,5?

Resolución

Como el valor mínimo es 3 y el máximo 7 entonces $3 \leq F(x, y) \leq 7$.

Como 3,5 está entre 3 y 7, por continuidad la respuesta a la 1ª pregunta es sí.

Como 7,5 NO está entre 3 y 7, la respuesta a la 2ª pregunta es no.

4.- Se considera el recinto R del plano determinado por las siguientes inecuaciones:

$$5x - 4y \leq 20 \quad , \quad x + 8y \leq 48 \quad , x \geq 2 \ , \ y \geq 0$$

a) Represente gráficamente el recinto R y calcule sus vértices.

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$5x - 4y \leq 20 \rightarrow$ Recta: $5x - 4y = 20$

$x = 0, \quad 5.0 - 4y = 20, \quad y = -5$
$y = 0, \quad 5x - 4.0 = 20, \quad x = 4$

x	0	4
y	−5	0

$(0, 0) \rightarrow 5.0 - 4.0 \leq 20$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x + 8y \leq 48 \rightarrow$ Recta: $x + 8y = 48$

$x = 0, \quad 0 + 8y = 48, \quad y = 6$
$y = 0, \quad x + 8.0 = 48, \quad x = 48$

x	0	48
y	6	0

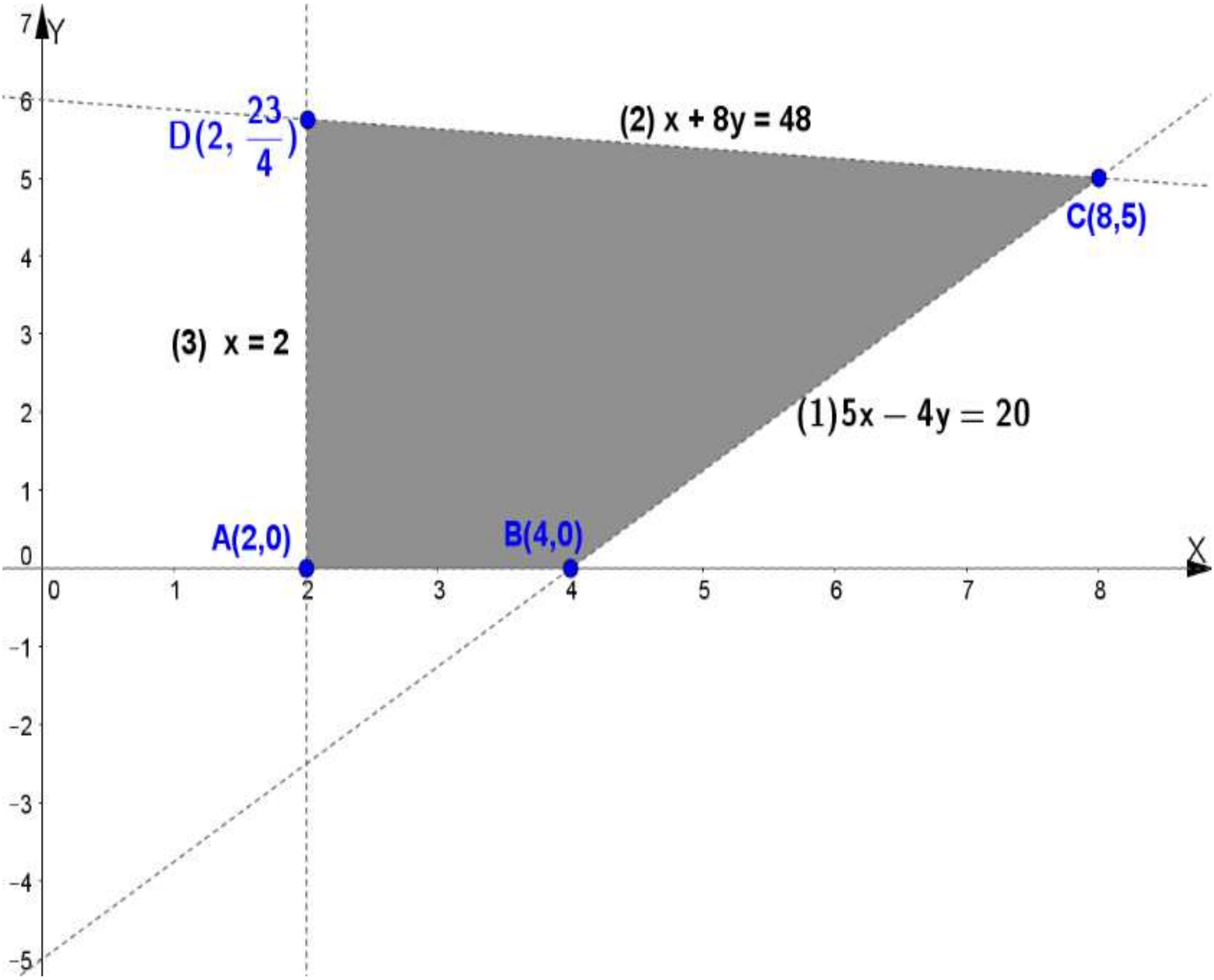
$(0, 0) \rightarrow 0 + 8.0 \leq 48$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \geq 2 \rightarrow$ Recta: $x = 2$, recta vertical que pasa por (2, 0)

$(0, 0) \rightarrow 0 \geq 2$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al (0, 0).

$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X)
$(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A(2,0)$; $\begin{cases} 5x - 4y = 20 \\ y = 0 \end{cases}$; $5x - 4.0 = 20,\ \ x = 4 \rightarrow B(4,0)$

$\begin{cases} x + 8y = 48 \\ 5x - 4y = 20 \end{cases} .2$ $\begin{cases} x + 8y = 48 \\ 10x - 8y = 40 \end{cases}$; sumando, $11x = 88,\ \ x = 8$; $8 + 8y = 48,\ \ y = 5 \rightarrow C(8,5)$

$\begin{cases} x + 8y = 48 \\ x = 2 \end{cases}$; $2 + 8y = 48,\ \ y = \frac{23}{4} \rightarrow D\left(2, \frac{23}{4}\right)$

b) Halle los valores máximo y mínimo que alcanza la función F(x, y) = 2x + 12y en este recinto e indique dónde se alcanzan.

Resolución

Los puntos en los que alcanza los valores máximo y mínimo la función F deben estar en los vértices del recinto:

$F(A) = F(2, 0) = 2.2 + 12.0 = 4$ $F(B) = F(4, 0) = 2.4 + 12.0 = 8$

$F(C) = F(8, 5) = 2.8 + 12.5 = 76$ $F(D) = F\left(2, \frac{23}{4}\right) = 2.2 + 12\ \frac{23}{4} = 73$

Valor mínimo 4 y se alcanza en A(2, 0) y el máximo es 76 y se alcanza en C(8, 5).

c) Razone si existen valores (x, y) pertenecientes al recinto para los que F(x, y)=100

Resolución

No, porque 100 no está comprendido entre el valor mínimo de F, que es 4, y el máximo, que es 76

5.- Se desea maximizar la función F(x, y)= 14x + 8y en el recinto dado por:

$y + 3x \geq 9$, $y \leq -\frac{4}{7}x + 14$, $5x - 2y \leq 15$, $x \geq 0$

a) Represente la región factible del problema.

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$y + 3x \geq 9 \rightarrow$ Recta: $y + 3x = 9$

$x = 0,\ \ y + 3.0 = 9,\ \ y = 9$
$y = 0,\ \ 0 + 3x = 9,\ \ x = 3$

x	0	3
y	9	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 3.0 \geq 9$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al (0, 0).

$y \leq -\frac{4}{7}x + 14$; $4x + 7y \leq 14 \rightarrow$ r: $4x + 7y = 98$

$x = 0,\ \ 4.0 + 7y = 98,\ \ y = 14$
$y = 0,\ \ 4x + 7.0 = 98,\ \ x = 24{,}5$

x	0	24,5
y	14	0

$(0, 0) \rightarrow 4.0 + 7.0 \leq 98$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$5x - 2y \leq 15 \rightarrow$ Recta: $5x - 2y = 15$
$x = 1,\ \ 5.1 - 2y = 15,\ \ y = -5$
$y = 0,\ \ 5x - 2.0 = 15,\ \ x = 3$

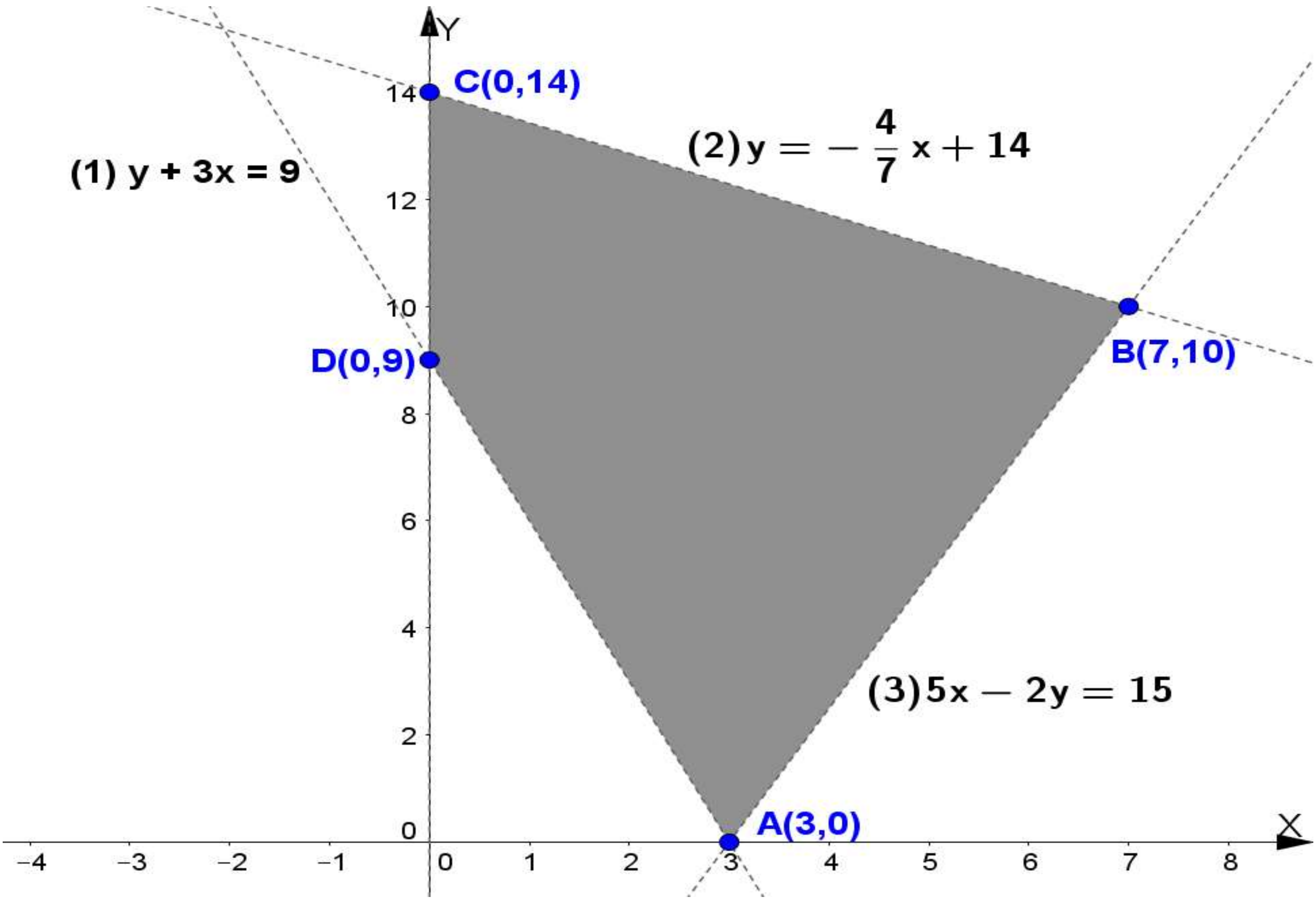
x	1	3
y	–5	0

$(0, 0) \rightarrow 5.0 - 2.0 \leq 15$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)
$(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).

La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

$\begin{cases}3x+y=9\\5x-2y=15\end{cases}\xrightarrow{\cdot 2}\begin{cases}6x+2y=18\\5x-2y=15\end{cases}$; sumando, $11x=33,\ \ x=3;\ \ 3.3+y=9,\ y=0\to A(3,0)$

$\begin{cases}4x+7y=98\xrightarrow{\cdot 2}\\5x-2y=15\xrightarrow{\cdot 7}\end{cases}\begin{cases}8x+14y=196\\35x-14y=105\end{cases}$; $43x=301,\ \ x=7\ \ ;\ \ 5.7-2y=15,\ y=10\to B(7,10)$

$\begin{cases}4x+7y=98\\x=0\end{cases}$; $4.0+7y=98,\ \ y=14\ \to C(0,14)$ $\begin{cases}3x+y=9\\x=0\end{cases}$; $3.0+y=9,\ \ y=9\ \to D(0,9)$

b) ¿Cuál es el valor máximo de F y la solución óptima del problema?

Resolución

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo F(x, y)= 14x + 8y:

F(A) = F(3, 0)= 14.3 + 8.0 = 42 F(B) = F(7, 10)= 14.7 + 8.110 = 178

F(C) = F(0, 14)= 14.0 + 8.14 = 112 F(D) = F(0, 9)= 14.0 + 8.9 = 72

El valor máximo es 178 y se alcanza en B, es decir para x = 7, y = 10..

c) Obtenga un punto de la región factible que no sea el óptimo.

Resolución Por ejemplo, el punto C(0, 14)

6.- Plantee, sin resolver, el siguiente problema: "Un barco puede transportar vehículos de dos tipos: coches y motos. Las condiciones de la nave obligan a que el número de motos no pueda ser inferior a la cuarta parte del de coches ni superior a su doble; además, la suma del número de motos más el doble del número de coches no puede ser mayor que 100. ¿Cuántos vehículos, como máximo, puede transportar este barco?"

Resolución

Sea nº de coches: x nº de motos: y. Las restricciones son $\begin{cases} y \geq \frac{x}{4} \\ y \leq 2x \\ y + 2x \leq 100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 4y \\ y \leq 2x \\ y + 2x \leq 100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$.

La función a optimizar (maximizar) es el nº de vehículos f(x, y) = x + y

7.- Dado el recinto limitado por las inecuaciones $y \geq 30$, $3x - y \geq 150$, $6x + 7y \leq 840$ halle en qué puntos de ese recinto la función $F(x, y) = 4x - 3y + 8$ alcanza su valor mínimo.

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$3x - y \geq 150 \rightarrow$ Recta: $3x - y = 150$

$x = 0$, $3.0 - y = 150$, $y = -150$
$y = 0$, $3x - 0 = 150$, $x = 50$

x	−150	50
y	1	0

$(0, 0) \rightarrow 3.0 - 0 \geq 150$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al (0, 0).

$6x + 7y \leq 840 \rightarrow$ Recta: $6x + 7y = 840$

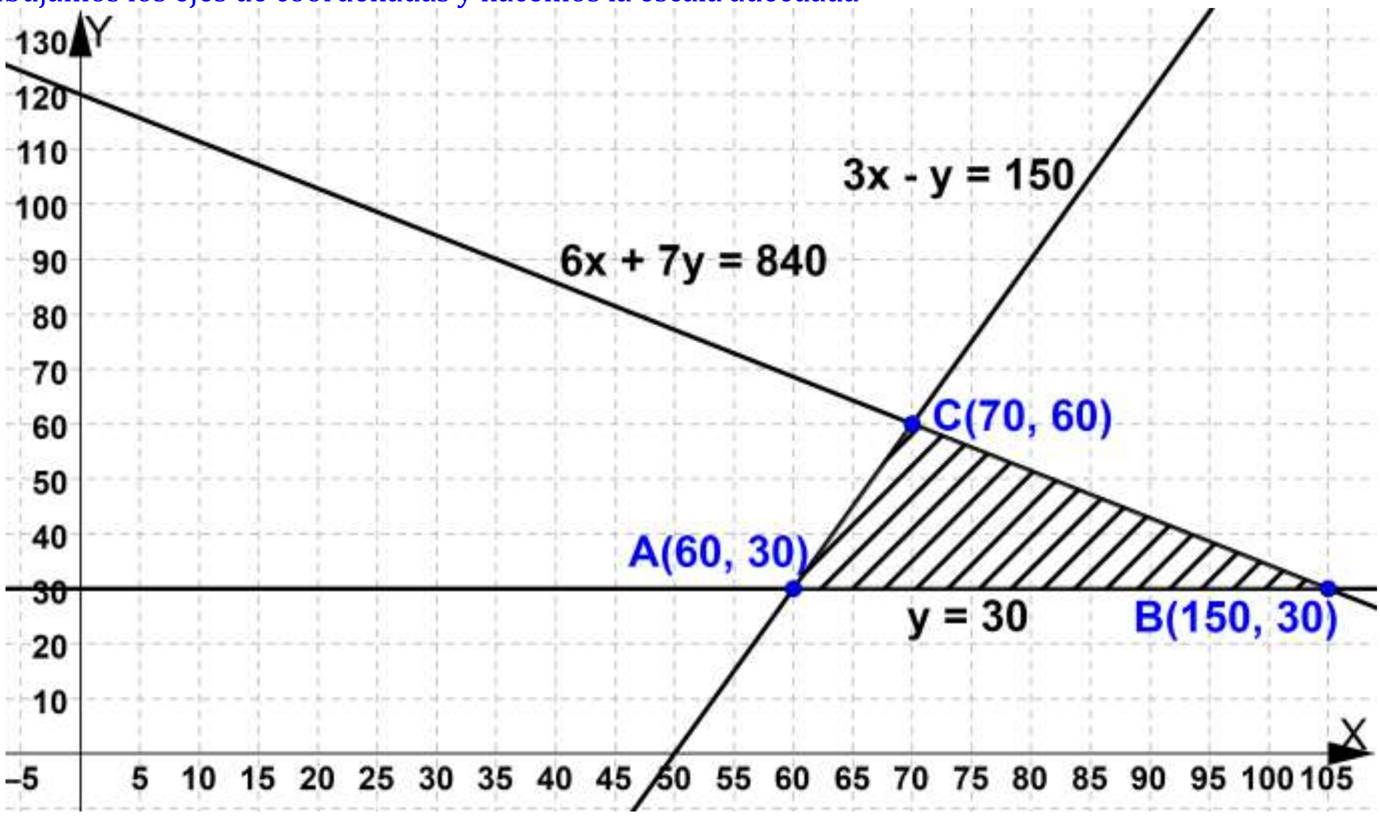
$x = 0$, $6.0 + 7y = 840$, $y = 120$
$y = 0$, $6x + 7.0 = 840$, $x = 140$

x	0	140
y	120	0

$(0, 0) \rightarrow 6.0 + 7.0 \leq 840$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$y \geq 30 \rightarrow$ Recta: $y = 30$, recta horizontal que pasa por (0, 30) ; $(0, 0) \rightarrow 0 \geq 30$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al (0, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

$\begin{cases} 3x - y = 150 \\ y = 30 \end{cases}$; $3x - 30 = 150,\ x = 60 \ \rightarrow A(60, 30)$

$\begin{cases} 6x + 7y = 840 \\ y = 30 \end{cases}$; $6x + 7.30 = 840,\ 6x = 630,\ x = 105 \ \rightarrow B(105, 30)$

$\begin{cases} 3x - y = 150 \\ 6x + 7y = 840 \end{cases} \xrightarrow{.\,2} \begin{cases} 6x - 2y = 300 \\ 6x + 7y = 840 \end{cases}$; $9y = 540,\ y = 60$; $3x - 60 = 150,\ x = 70 \rightarrow C(70, 60)$

Veamos en qué vértices alcanza el valor mínimo F(x, y) = 4x – 3y + 8:

F(A) = F(60, 30) = 4.60 – 3.30 + 8 = 158 F(B) = F(105, 30) = 4.105 – 3.30 + 8 = 338

F(C) = F(70, 60) = 4.70 – 3.60 + 8 = 108.

El valor mínimo de F es 108 y se alcanza en el punto C, es decir para x = 70, y = 60.

8.- (prueba ordinaria) Un fabricante de tapices dispone de 500 kg de hilo de seda, 400 kg de hilo de plata y 225 kg de hilo de oro. Desea fabricar dos tipos de tapices: A y B.
Para los del tipo A se necesita 1 kg de hilo de seda y 2 kg de hilo de plata, y para los del tipo B, 2 kg de hilo de seda, 1 kg de hilo de plata y 1 kg de hilo de oro.
Cada tapiz del tipo A se vende a 2000 euros y cada tapiz del tipo B a 3000 euros. Si se vende todo lo que se fabrica,
a) ¿Cuántos tapices de cada tipo ha de fabricar para que el beneficio sea máximo y cuál es ese beneficio?

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	número	kg de hilo de seda	kg de hilo de plata	kg de hilo de oro	beneficio (en €)
tapices tipo A	x	1x	2x	0x	2000x
tapices tipo B	y	2y	1y	1y	3000y
total		x + 2y	2x + y	y	2000x + 3000y

Las restricciones son $\begin{cases} x + 2y \le 500 \\ 2x + y \le 400 \\ y \le 225 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$. La función a optimizar (maximizar) es f(x, y) = 2000x + 3000y

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

x + 2y ≤ 500 → Recta: x + 2y = 500

x = 0, 0 + 2y = 500, y = 250
y = 0, x + 2.0 = 500, x = 500

x	0	500
y	250	0

(0, 0) → 0 + 2.0 ≤ 500 (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

2x + y ≤ 400 → Recta: 2x + y = 400

x = 0, 2.0 + y = 400, y = 400
y = 0, 2x + 0 = 400, x = 200

x	0	200
y	400	0

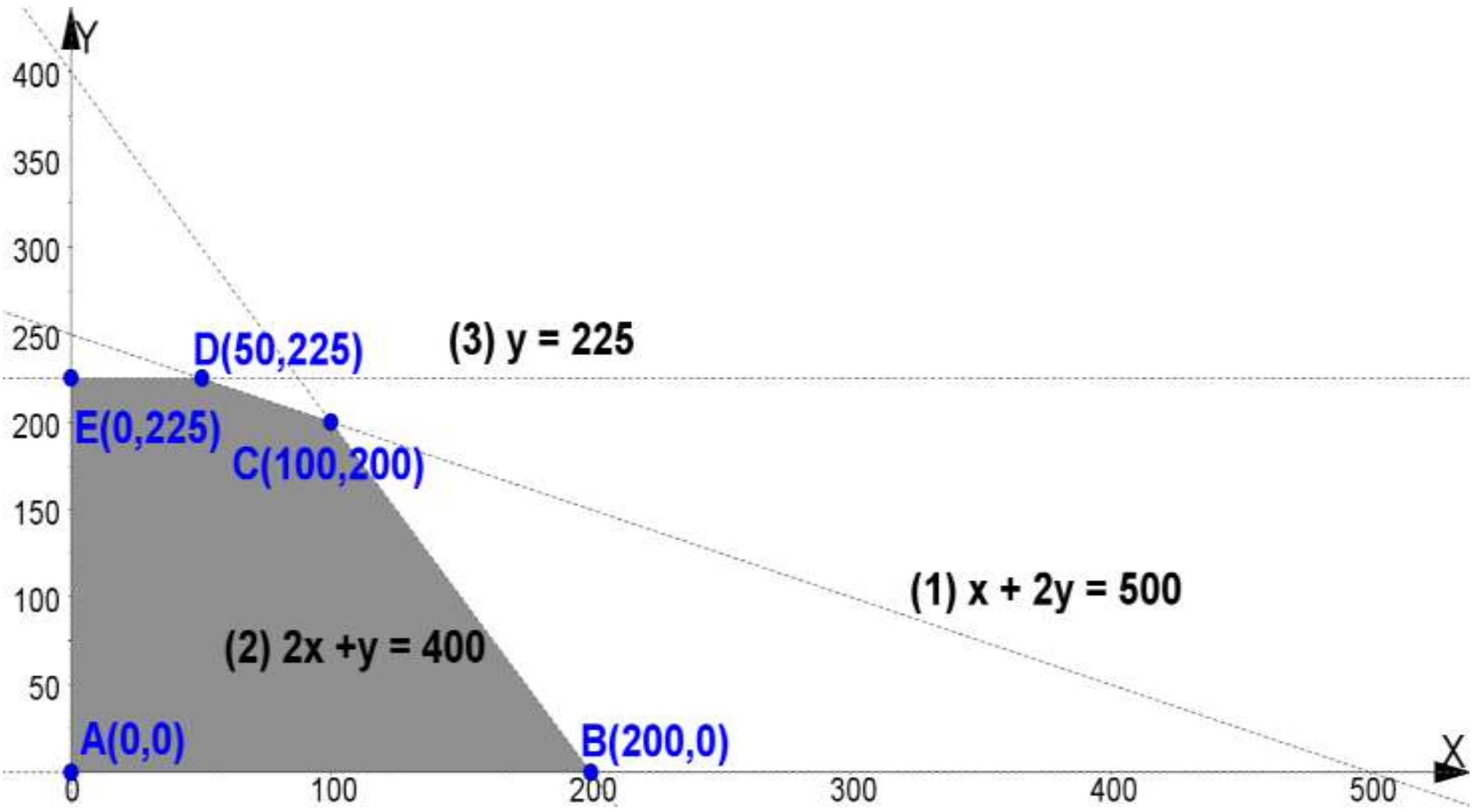
(0, 0) → 2.0 + 0 ≤ 400 (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

y ≤ 225 → Recta: y = 225, recta horizontal que pasa por (0, 225) ; (0, 0)→ 0 ≤ 225 (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

x ≥ 0 → x = 0 (eje Y)
(1, 0)→ 1 ≥ 0 (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

y ≥ 0 → y = 0 (eje X)
(0, 1)→ 1 ≥ 0 (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $f(x, y) = 2000x + 3000y$:

$f(A) = f(0, 0) = 2000.0 + 3000.0 = 0$ $\qquad$ $f(B) = f(200, 0) = 2000.200 + 3000.0 = 400000$

$f(C) = f(100, 200) = 2000.100 + 3000.200 = 800000$

$f(D) = f(50, 225) = 2000.50 + 3000.225 = 775000$ $\qquad$ $f(E) = f(0, 225) = 2000.0 + 3000.225 = 675000$

Luego, el beneficio máximo es 800000 € y se obtiene para 100 tapices del tipo A y 200 del tipo B.

b) ¿Qué cantidad de hilo de cada clase quedará cuando se fabrique el número de tapices que proporciona el máximo beneficio?

Resolución

100 tapices de tipo A equivalen a $1\cdot100 = 100$ kg de hilo de seda

$2\cdot100 = 200$ kg de hilo de plata.

200 tapices de tipo B equivalen a $2\cdot200 = 400$ kg de hilo de seda

$1\cdot200 = 200$ kg de hilo de plata y $1\cdot200 = 200$ kg de hilo de oro.

Hilo de seda gastado $= 100 + 400 = 500$. Quedan $500 - 500 = 0$ kg de hilo de seda.

Hilo de plata gastado $= 200 + 200 = 400$. Quedan $400 - 400 = 0$ kg de hilo de plata.

Hilo de oro gastado $= 200$. Quedan $225 - 200 = 25$ kg de hilo de oro.