
1.- (prueba ordinaria) Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x+3y+z=5 \end{cases}$

a) Calcula α de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + y - 7z = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

Resolución

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rg A = 2.

La matriz ampliada es $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ que contiene a A y sólo tiene dos filas. Luego, rg A* = 2

Como rg A = 2 = rg A* < nº de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + y - 7z = 1$ el nuevo sistema es $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x+3y+z=5 \\ \alpha x+y-7z=1 \end{cases}$

Las matrices de coeficientes y ampliada son $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & -7 \end{pmatrix}$ $B^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ \alpha & 1 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

Como el sistema debe tener las mismas soluciones que el inicial det B debe ser nulo porque si no lo fuese sería rg B = 3 = rg B* = nº de incógnitas y por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema sería compatible determinado.

det B = –21 + 2α – 6 + 9α – 1 + 28 = 11α = 0 ⇔ α = 0. Respuesta: α = 0

b) Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

Resolución

El nuevo sistema es $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x+3y+z=5 \\ x+y+z=4 \end{cases}$

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

det A = 3 + 2 – 6 + 9 – 4 – 1 = 3 ≠ 0, rg A = 3 = rg A* = nº de incógnitas.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

Vamos a usar esta vez la regla de Cramer para resolverlo:

$A_x = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A_y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $A_z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; det A_x = 9 + 8 – 15 + 36 – 10 – 3 = 25

det A_y = 5 + 3 – 24 + 15 – 6 – 4 = –11 det A_z = 12 + 10 + 6 – 9 – 16 – 5 = –2

Luego, la solución es $x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{25}{3}$ $y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{-11}{3}$ $z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{-2}{3}$

2.- (prueba ordinaria) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz X que verifica $AX + B = A^2$.

Resolución

Restando B en los dos miembros, $AX = A^2 - B$

Observemos que como $\det A = -1 \neq 0$, existe A^{-1}. Multiplicando por A^{-1}, por la izquierda, en los dos miembros: $A^{-1}AX = A^{-1}(A^2 - B)$; $IX = A^{-1}(A^2 - B)$; $X = A^{-1}(A^2 - B)$.

$$A^2 - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{\det A}(adj\ A)^t(A^2 - B) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

3.- (prueba extraordinaria) Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - y + mz = 0 \\ mx + 2y + z = 0 \\ -x + y + 2mz = 0 \end{cases}$

a) Halla los valores del parámetro m para los que el sistema tiene una única solución.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2m \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m & 0 \\ m & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2m & 0 \end{pmatrix}$

Para que el sistema tenga solución única, según el teorema de Rouché-Fröbenius, debe ser rg A = 3 = rg A* = nº de incógnitas. Luego det A debe ser no nulo.

$\det A = 4m + 1 + m^2 + 2m + 2m^2 - 1 = 3m^2 + 6m = 3m(m + 2) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ó $m = -2$.

Luego, para $m \neq 0$, $m \neq -2$ el sistema tiene una única solución, la solución nula (observa que es un sistema homogéneo).

b) Halla los valores del parámetro m para los que el sistema tiene alguna solución distinta de la solución nula.

Resolución

Usando el apartado anterior y dado que $\det A = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ó $m = -2$, para $m = 0$ ó $m = -2$ el sistema tiene infinitas soluciones, pues no puede ser incompatible.

Luego, la respuesta es $m = 0$ ó $m = -2$

c) Resuelve el sistema para m = −2.

Resolución

Para m = –2 sabemos que el sistema tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -f1 \\ f2+2f1 \\ f3+f1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

Eliminando la 3ª fila y dividiendo la 2ª fila entre –3 obtenemos: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

que corresponde al sistema $\begin{cases} -x+y+2z=0 \\ z=0 \end{cases}$. Despejando x en la 1ª ecuación, x = y + 2z = y + 2.0 = y

Llamando y = λ, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$, con λ ∈ R

4.- (prueba extraordinaria) Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

a) det(3A)

Resolución

Al ser A cuadrada de orden tres, det(3A) = 3^3.det A = 3^3.2 = 54

b) det(A^{-1})

Resolución

$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{2}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Resolución

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{\Rightarrow} -\begin{vmatrix} 3x & 2y & z \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{\Rightarrow} -3.2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{(3)}{\Rightarrow} -3.2.2 = -12$$

(1) Cambiamos de orden las 2 primeras filas y el determinante cambia de signo

(2) Sacamos el factor 3 de la 1ª columna y 2 de la 2ª columna

(3) Por el enunciado sabemos que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Resolución

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{\Rightarrow} - \begin{vmatrix} x+2 & y+4 & z+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$- \begin{vmatrix} x+2 & y+4 & z+6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{(4)}{\Rightarrow} - \left\{ \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right\} \overset{(5)}{\Rightarrow} -(2+0) = -2$$

(1) Cambiamos de orden las dos primeras filas y el determinante cambia de signo

(2) Cambiamos de orden las dos últimas filas y el determinante cambia de signo

(3) Cambiamos de signo la 2ª fila, o sea la multiplicamos por –1

(4) Descomponemos como suma de dos determinantes

(5) Por el enunciado $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$ y el 2º determinante vale cero por ser proporcionales la 1ª y 3ª filas

5.- Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ es 3, halla los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

a) $\det(A^3)$, $\det(A^{-1})$, $\det(A + A^t)$ (A^t indica la traspuesta de A).

Resolución

$\det(A^3) = [\det A]^3 = 3^3 = 27$; $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{3}$

Observamos que $A = A^t$, luego $\det(A + A^t) = \det(2A)$

Al ser A cuadrada de orden tres, $\det(2A) = 2^3.\det A = 2^3.3 = 24$

b) $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{pmatrix}$

Resolución

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix} \overset{(1)}{\Rightarrow} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2b & 2d & 2e \\ c & e & f \end{vmatrix} \overset{(2)}{\Rightarrow} -2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} \overset{(3)}{\Rightarrow} -2.3 = -6$$

(1) Cambiamos de orden las dos últimas filas y el determinante cambia de signo

(2) Sacamos el factor 2 de la 2ª fila

(3) Por el enunciado sabemos que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = 3$

c) $\det\begin{pmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{pmatrix}$

Resolución

$$\begin{vmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{vmatrix} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} a & b & 4a \\ b & d & 4b \\ c & e & 4c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} \overset{(2)}{\Rightarrow} 0-3=-3$$

(1) Descomponemos como resta de dos determinantes

(2) El primer determinante vale cero por ser proporcionales la 1ª y 3ª columnas y $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = 3$

6.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} mx-2y+z=1 \\ x-2my+z=-2 \\ x-2y+mz=1 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro m.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A=\begin{pmatrix} m & -2 & 1 \\ 1 & -2m & 1 \\ 1 & -2 & m \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} m & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2m & 1 & -2 \\ 1 & -2 & m & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = -2m^3 - 2 - 2 + 2m + 2m + 2m = -2m^3 + 6m - 4 = 0 \Leftrightarrow m^3 - 3m + 2 = 0$

Factoricemos haciendo uso de la regla de Ruffini:

$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & \downarrow & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$. Nos queda $(m-1)(m^2+m-2)=0$, de donde $m=1$ ó $m^2+m-2=0$

$$m=\frac{-1\pm\sqrt{1-4.1(-2)}}{2.1}=\frac{-1\pm 3}{2}, \begin{matrix} m=1 \\ m=-2 \end{matrix}$$

– Si $m \neq 1$; $m \neq -2$, $\det A \neq 0$ y rg A = 3 = rg A* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si m = 1, $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, rg A = 1.

Por otra parte, $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, rg A* = 2.

Luego, rg A = 1 ≠2= rg A*. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible, no tiene solución.

– Si m = –2, det A = 0 y $A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$, rg A = 2.

$$A^*=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f1+2f3 \\ f2-f3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f1=-f2 \\ f2:3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

y como $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, rg A* = 2.

Luego, rg A = 2 = rg A* < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

---

b) Si es posible, resuelve el sistema para m = −2.

Resolución

Para m = −2 sabemos que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ que corresponde al sistema $\begin{cases} 2y + z = -1 \\ x - 2y - 2z = 1 \end{cases}$. Despejando z en la 1ª ecuación, $z = -1 - 2y$.

Despejando x en la 2ª ecuación, se tiene $x = 1 + 2y + 2z = 1 + 2y + 2(-1 - 2y) = -1 - 2y$

Llamando y = k, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x = -1 - 2k \\ y = k \\ z = -1 - 2k \end{cases}$, con k ∈ R

7.- Se sabe que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es −3. Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) det(−2A) y det(A^{-1}).

Resolución

Al ser A cuadrada de orden tres, det(−2A) = $(-2)^3$.det A = $(-2)^3$.(−3) = 24

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{-3} = \frac{-1}{3}$$

b) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + 2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + 2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} + 2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

Resolución

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} \overset{(1)}{\Rightarrow} - \begin{vmatrix} 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} \overset{(2)}{\Rightarrow} - 7.2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{(3)}{\Rightarrow} - 7.2.(-3) = 42$$

(1) Cambiamos de orden las 2 primeras filas y el determinante cambia de signo

(2) Sacamos el factor 3 de la 1ª columna y 2 de la 2ª columna

(3) Por el enunciado sabemos que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + 2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + 2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} + 2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & 5a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & 2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & 2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} \overset{(2)}{\Rightarrow} 5.(-3) + 0 = -15$$

(1) Descomponemos como suma de dos determinantes

(2) El primer determinante es 5 por el determinante de la traspuesta de la matriz del enunciado, que vale −3 y el 2º determinante vale cero por ser proporcionales la 2ª y 3ª columnas

8.- Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1}.

Resolución

como det A = 6 – 4 – 3 = –1 ≠ 0, existe A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adj\ A)^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Halla la matriz X que verifica que $A^t X + B = I$

Resolución

Restando B en los dos miembros, $A^tX = I - B$

Observemos que como $\det A^t = \det A = -1 \neq 0$, existe $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. Multiplicando por $(A^t)^{-1}$, por la izquierda, en los dos miembros: $(A^t)^{-1}A^tX = (A^t)^{-1}(I - B)$; $IX = (A^t)^{-1}(I - B)$; $X = (A^{-1})^t(I - B)$.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -3 & 14 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

9.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + (m+1)y + 2z = -1 \\ mx + y + z = m \\ (1-m)x + 2y + z = -m - 1 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro m.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 & m \\ 1-m & 2 & 1 & -m-1 \end{pmatrix}$

$\det A = 1 + 1 - m^2 + 4m - 2 + 2m - m^2 - m - 2 = -2m^2 + 5m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 0$

$$m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.2.2}}{2.2} = \frac{5 \pm 3}{4}\ ; \begin{matrix} m = 2 \\ m = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

– Si $m \neq 2$; $m \neq \frac{1}{2}$, $\det A \neq 0$ y rg A = 3 = rg A* = nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si m = 2, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, rg A = 2.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f2 - 2f1 \\ f3 + f1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix} f2 = -f3 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

y como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, rg A* = 2.

Luego, rg A = 2 = rg A*< nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

- Si $m=\frac{1}{2}$, det A = 0 y $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & 2\\ \frac{1}{2} & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & 2 & 1\end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, rg A = 2.

$$A^*=\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & 2 & -1\\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & \frac{-3}{2}\end{pmatrix}\begin{matrix}2.f1\\2.f2\\2.f3\end{matrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & -2\\ 1 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{matrix}f1-2f3\\f2-f3\\ \end{matrix}\begin{pmatrix}0 & -5 & 0 & 4\\ 0 & -2 & 0 & 4\\ 1 & 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

que corresponde al sistema $\begin{cases}-5y=4\\-2y=4\\x+4y+2z=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{-4}{5}\\y=-2\\x+4y+2z=-3\end{cases}$

Como las dos primeras ecuaciones son contradictorias el sistema es incompatible, no tiene solución.

b) Resuélvelo para m = 2. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que z = 2.

Resolución

Para m = 2 sabemos que el sistema tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\ 0 & 5 & 3 & -4\end{pmatrix}$, que corresponde al sistema $\begin{cases}x+3y+2z=-1\\5y+3z=-4\end{cases}$.

Despejando z en la 2ª ecuación, $z=\frac{-4-5y}{3}$

Despejando x en la 1ª ecuación, $x=-1-3y-2z=-1-3y-2\frac{-4-5y}{3}=\frac{-3-9y+8+10y}{3}=\frac{y+5}{3}$

Llamando y = k, las infinitas soluciones son $\begin{cases}x=\frac{k+5}{3}\\y=k\\z=\frac{-4-5k}{3}\end{cases}$, con $\lambda\in R$

Para que haya una solución con z = 2 debe ser $\frac{-4-5k}{3}=2$, $-4-5k=6$, $k=-2$

Luego, sí existe esa solución y es $\begin{cases}x=\frac{-2+5}{3}\\y=-2\\z=\frac{-4-5(-2)}{3}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\\z=2\end{cases}$

10.- Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m se verifica que $A^2=2A+I$?

Resolución

$$A^2=2A+I\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Operando, $\begin{pmatrix}m^2+2m+2 & 2\\ 2 & m^2-2m+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2m+3 & 2\\ 2 & 3-2m\end{pmatrix}$

Igualando los elementos correspondientes, $\begin{cases}m^2+2m+2=2m+3\\m^2-2m+2=3-2m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m^2=1\\m^2=1\end{cases}\Rightarrow m=1$ ó $m=-1$

---

b) Para m = 1, calcula A^{-1} y la matriz X que satisface $AX - B = AB$.

Resolución

Para m = 1, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\det A = -1 \neq 0$, existe A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adj\ A)^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Resolvamos ahora la ecuación $AX - B = AB$:

Sumando B en los dos miembros, $AX = AB + B$. Multiplicando por A^{-1}, por la izquierda, en los dos miembros: $A^{-1}AX = A^{-1}(AB + B)$; $IX = A^{-1}(AB + B)$; $X = A^{-1}(AB + B) = A^{-1}AB + A^{-1}B = B + A^{-1}B$.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

11.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones con incógnitas x, y, z, $\begin{cases} \lambda y + (\lambda+1)z = \lambda \\ \lambda x + z = \lambda \\ x + \lambda z = \lambda \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro λ.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$

$\det A = \lambda - \lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda(1 - \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = -1, \lambda = 1$

– Si $\lambda \neq 0, \lambda \neq -1, \lambda \neq 1$, $\det A \neq 0$ y rg A = 3 = rg A* = nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si $\lambda = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, det A = 0 y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rg A = 2.

$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} f2 = f1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rg A* = 2.

Luego, rg A = 2 = rg A*< nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si $\lambda = -1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, det A = 0 y como $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rg A = 2.

$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} f2 + f3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y como la 2ª fila corresponde a la ecuación 0 = –2,

que es incompatible, el sistema es incompatible, no tiene solución.

– Si $\lambda = 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, det A = 0 y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rg A = 2.

$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} f2 = f3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rg A* = 2.

Luego, rg A = 2 = rg A*< nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b) Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

Resolución

Para $\lambda = 1$ sabemos que el sistema tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema $\begin{cases} y + 2z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$.

Despejando z en la 2ª ecuación, $z = 1 - x$

Despejando y en la 1ª ecuación, $y = 1 - 2z = 1 - 2(1 - x) = -1 + 2x$

Llamando x = k, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x = k \\ y = -1 + 2\mathrm{k} \\ z = 1 - k \end{cases}$, con $k \in R$

c) Para $\lambda = 0$, si es posible, da tres soluciones distintas.

Resolución

Para $\lambda = 0$ sabemos que el sistema tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema $\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$.

Llamando y = k, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x = 0 \\ y = \mathrm{k} \\ z = 0 \end{cases}$, con $k \in R$

Luego, tres soluciones distintas son, por ejemplo, (0, 1, 0) , (0, 2, 0) y (0, 3, 0)

12.- Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Halla la matriz X que verifica $A^{-1}XA = B - A$.

Resolución

Observemos que como det A = –1 ≠ 0, existe A^{-1}. Multiplicando por A, por la izquierda y por A^{-1}, por la derecha, en los dos miembros: $AA^{-1}XA\,A^{-1} = A(B - A)A^{-1}$; $IX = A(B - A)A^{-1}$; $X = A(B - A)A^{-1}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adj\ A)^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & 18 & -7 \\ -2 & 45 & -18 \end{pmatrix}$$