
1.- (prueba ordinaria) Considera la recta r que pasa por los puntos A(1, 0, –1) y B(–1, 1, 0).
a) Halla la ecuación de la recta s paralela a r que pasa por C(–2, 3, 2).

Resolución

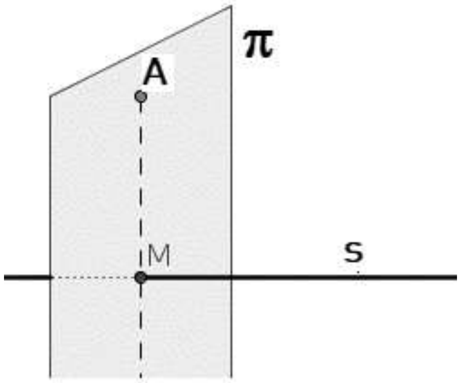
Al ser la recta s paralela a r, un vector director de s es $\overrightarrow{d_s} = \overrightarrow{AB} = (-2, 1, 1)$

Y como s pasa por el punto C(−2, 3, 2), $s: \begin{cases} x = -2 - 2k \\ y = 3 + k \\ z = 2 + k \end{cases}$, con k ∈ R

b) Calcula la distancia de r a s.

Resolución

Dado que r y s son paralelas, d(r, s) = d(A, s) = d(A, M)



El plano π es perpendicular a s, luego su vector normal es $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{d_s} = (-2, 1, 1)$

Y como π pasa por A(1, 0, –1) , entonces π: –2(x – 1) + 1(y – 0) + 1(z + 1) = 0,

de donde π: –2x + y + z + 3 = 0

Hallamos M como punto de intersección de s y π resolviendo el sistema: $\begin{cases} x = -2 - 2k \\ y = 3 + k \\ z = 2 + k \\ -2x + y + z + 3 = 0 \end{cases}$

–2(–2 – 2k) + 3 + k + 2 + k + 3 = 0 ; 6k + 12 = 0 ; k = –2.

Por tanto M(–2 – 2.(–2), 3 + (–2), 2 + (–2)) ⇒ M(2, 1, 0)

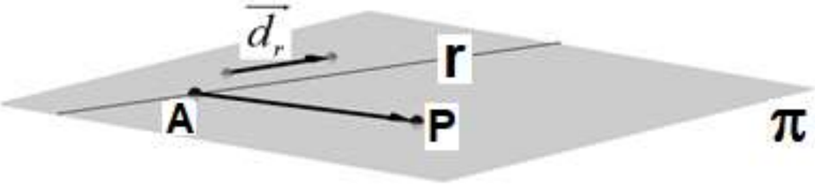
$d(r, s) = \left|\overrightarrow{AM}\right| = (1, 1, 1) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \cong 1{,}73\ u$

2.- (prueba ordinaria) Sea r la recta definida por $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

a) Determina la ecuación general del plano que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.

Resolución

Observamos que P(0, 0, 0) $\notin$ r porque no cumple sus ecuaciones.



Como r está dada como intersección de dos planos, un vector director de r es

$$\overrightarrow{d_r} = (1, 2, -1)\ x\ (2, -1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -3, -5)\ //\ (-1, 3, 5)$$

Hallemos un punto de r: si x = 0, $\begin{cases} 2y - z = 3 \\ -y + z = 1 \end{cases}$. Sumando, y = 4; –4 + z = 1, z = 5. Luego, A(0, 4, 5) ∈ r

El plano π que nos piden pasa por P(0, 0, 0) y tiene como vectores directores $\overrightarrow{d_r} = (-1, 3, 5)$ y $\overrightarrow{PA} = (0, 4, 5)$.

Luego, un vector normal de π es

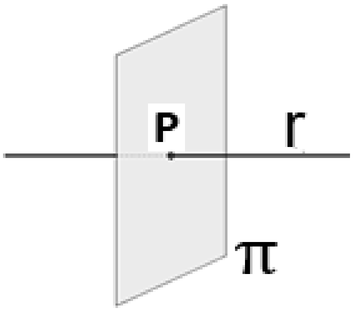
$$\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{d_r}\ x\ \overrightarrow{PA} = (-1, 3, 5)\ x\ (0, 4, 5) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (-5, 5, -4)\ //\ (5, -5, 4)$$

π: 5(x – 0) – 5(y – 0) + 4(z – 0) = 0 ⇒ π: 5x – 5y + 4z = 0

b) Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicularmente a r en el punto (1, 1, 0).

Resolución

Observamos que (1, 1, 0) ∈ r porque cumple sus ecuaciones, $\begin{cases} 1 + 2.1 - 0 = 3 \\ 2.1 - 1 + 0 = 1 \end{cases}$



El plano π que se pide pasa por P(1, 1, 0) y, al ser perpendicular a r tiene de vector normal $\vec{n} = \overrightarrow{d_r} = (-1, 3, 5)$

Luego, π: –1(x – 1) + 3(y – 1) + 5(z – 0) = 0 ⇒ π: –x + 3y + 5z – 2 = 0

Llamando y = λ, z = μ, como x = 3y + 5z – 2, x = 3λ + 5μ – 2, π: $\begin{cases} x = -2 + 3\lambda + 5\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

3.- (prueba extraordinaria) Considera los puntos A(1, 1, 2) y B(1, –1, –2) y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$

a) Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a la recta que pasa por A y por B.

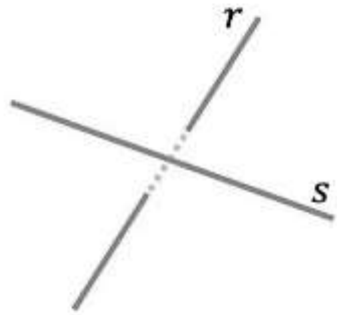
Resolución

Estudiemos primero la posición relativa de r y la recta s que pasa por A y B:

La recta r pasa por P(1, 0, 1) y un vector director es $\overrightarrow{d_r} = (2, 1, 0)$

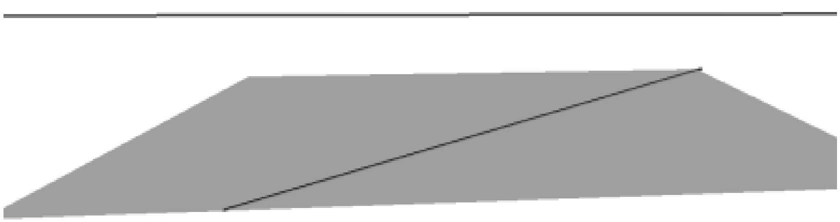
La recta s pasa por A(1, 1, 2) y tiene de vector director $\overrightarrow{d_s} = \overrightarrow{AB} = (0, -2, -4) \,//\, (0, 1, 2)$

Como $det\left(\overrightarrow{d_r}, \overrightarrow{d_s}, \overrightarrow{PA}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, los vectores $\overrightarrow{d_r}, \overrightarrow{d_s}$ y $\overrightarrow{PA}$ son linealmente independientes. Luego, r y s se cruzan



El plano que se pide, π, pasa por P(1, 0, 1) y tiene como vectores directores $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_s}$. Luego, un vector normal de π es $\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{d_r} \, x \, \overrightarrow{d_s} = (2, 1, 0) \, x \, (0, 1, 2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2, -4, 2) \,//\, (1, -2, 1)$

π: 1(x – 1) – 2(y – 0) + 1(z – 1) = 0 ⇒ π: x – 2y + z – 2 = 0



b) Halla el punto de la recta r que está a la misma distancia de A y de B.

Resolución

A(1, 1, 2) y B(1,–1,–2). El punto de r que se pide es de la forma P(1 + 2t, t, 1), con t ∈ R

$d(A, P) = d(B, P) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{BP}\right| \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BP}\right|^2 \Rightarrow |(2t, t-1, -1)|^2 = |(2t, t+1, 3)|^2$

$(2t)^2 + (t-1)^2 + (-1)^2 = (2t)^2 + (t+1)^2 + 3^2 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 + 1 = t^2 + 2t + 1 + 9 \Rightarrow -8 = 4t \Rightarrow t = -2$

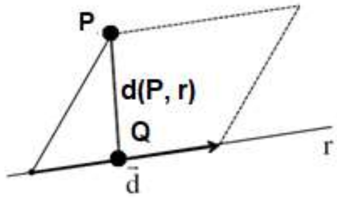
Luego, el punto es $P(1 + 2(-2), -2, 1) \Rightarrow P(-3, -2, 1)$

4.- (prueba extraordinaria) Sea r la recta que pasa por los puntos A(1, 0, −1) y B(2, −1, 3).
a) Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta r.

Resolución

Un vector director de r es $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (1, -1, 4)$ y A(1, 0, −1) ∈ r, $r: \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -k \\ z = -1 + 4k \end{cases}$, con k ∈ R

El origen de coordenadas P(0, 0, 0) ∉ r porque no cumple sus ecuaciones, $r: \begin{cases} 0 = 1 + k \\ 0 = -k \\ 0 = -1 + 4k \end{cases}$ (absurdo)



Hallemos el punto Q de r de forma que $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{d}$. Una vez calculado, $d(P, r) = d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$.

Un punto Q de r es de la forma Q(1 + k, −k, −1 + 4k) ; $\overrightarrow{PQ} = (1 + k, -k, -1 + 4k)$

Como debe ser $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{d} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}.\vec{d} = 0$. Luego, 1.(1 + k) + (−1)(−k) + 4(−1 + 4k) = 0

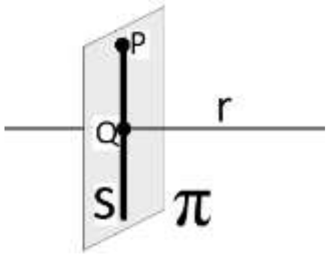
1 + k + k − 4 + 16k = 0 ; 18k − 3 = 0; $k = \frac{1}{6} \Rightarrow$ Luego, $\overrightarrow{PQ} = (1 + \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -1 + 4\frac{1}{6}) = \left(\frac{7}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{-2}{6}\right)$

$d(P, r) = |\overrightarrow{PQ}| = \left|\left(\frac{7}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{-2}{6}\right)\right| = \frac{1}{6}|(7, -1, -2)| = \frac{1}{6}\sqrt{7^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \frac{\sqrt{54}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} \cong 1{,}225\, u$

b) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el origen de coordenadas.

Resolución

Hallamos el plano π que pasa por P y es perpendicular a r. Después, calculamos el punto de corte, Q, entre r y π. La recta s que nos piden es la que pasa por P y Q



Un vector normal de π es un vector director de r:

$\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{d_r} = (1, -1, 4)$; $P(0, 0, 0) \in \pi \Rightarrow \pi: 1(x - 0) - 1(y - 0) + 4(z - 0) = 0 \Rightarrow \pi: x - y + 4z = 0$

Hallemos Q = r ∩ π : $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -k \\ z = -1 + 4k \\ x - y + 4z = 0 \end{cases}$; 1 + k + k + 4(−1 + 4k) = 0 ; 18k − 3 = 0 ; $k = \frac{1}{6}$

Por tanto, $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{6} \\ y = -\frac{1}{6} \\ z = -1 + 4\frac{1}{6} \end{cases}$. $Q\left(\frac{7}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{-2}{6}\right)$. Hallemos unas ecuaciones paramétricas de la recta, s, que nos piden: Como s pasa por P y $\overrightarrow{d_s} = \overrightarrow{PQ} = Q\left(\frac{7}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{-2}{6}\right) // (-7, 1, 2)$, $s: \begin{cases} x = -7k \\ y = k \\ z = 2k \end{cases}$, con k ∈ R

5.- Sea r la recta definida por $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y s la recta dada por $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

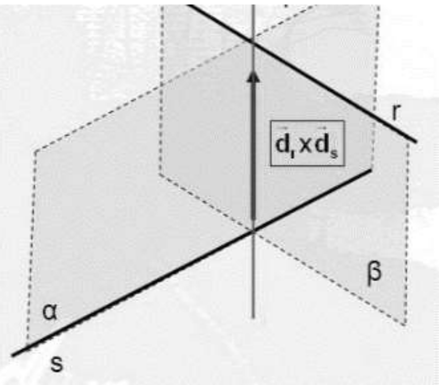
Resolución

Estudiemos primero la posición relativa de r y s:

La recta r pasa por A(1, 1, 0) y tiene de vector director $\overrightarrow{d_r} = (1,1,1)$

La recta s pasa por B(1, 0, 1) y tiene de vector director $\overrightarrow{d_s} = (-2,1,-2) \,//\, (2,-1,2)$

El vector $\overrightarrow{AB} = (0,-1,1)$. Como $det\left(\overrightarrow{d_r}, \overrightarrow{d_s}, \overrightarrow{AB}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, los vectores $\overrightarrow{d_r}$, $\overrightarrow{d_s}$ y $\overrightarrow{AB}$ son linealmente independientes. Luego, r y s se cruzan



Sea t la recta que se pide. Como t debe ser perpendicular a r y a s, tendrá de vector director

$$\overrightarrow{d_t} = \overrightarrow{d_r} \ x \ \overrightarrow{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (3,0,-3) \,//\, (1,0,-1)$$

- Hallamos el plano, α, perpendicular a r y que contiene a s:

Al tener como vectores directores $\overrightarrow{d_s}$ y $\overrightarrow{d_t}$, un vector normal de α es

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{d_s} \ x \ \overrightarrow{d_t} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1,4,1)$$

Y como α pasa por B(1, 0, 1), entonces α: 1(x – 1) + 4(y – 0) + 1(z – 1) = 0 ; α: x + 4y + z – 2 = 0

- Hallamos el plano, β, perpendicular a s y que contiene a r:

Al tener como vectores directores $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_t}$, un vector normal de β es

$$\overrightarrow{n_\beta} = \overrightarrow{d_r} \ x \ \overrightarrow{d_t} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1,2,-1) \,//\, (1,-2,1)$$

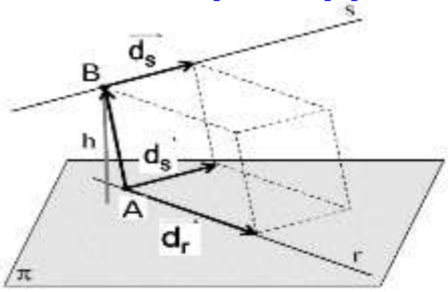
Y como β pasa por A(1, 1, 0), entonces β: 1(x – 1) – 2(y – 1) + 1(z – 0) = 0 ; β: x – 2y + z + 1 = 0

La recta perpendicular común es $t = \alpha \cap \beta$, o sea $t: \begin{cases} x+4y+z-2=0 \\ x-2y+z+1=0 \end{cases}$

b) Calcula la distancia entre r y s.

Resolución

Podemos hallarla usando la fórmula de la altura del paralelepípedo,



$$V_{paralel} = A_{base}.h \;\rightarrow\; h = d(r,s) = \frac{V_{paralel}}{A_{base}} = \frac{|det(\vec{d_r}\,,\ \vec{d_s}\,,\ \vec{AB}\,)|}{|\vec{d_r}\ x\ \vec{d_s}\,|}$$

$$det(\vec{d_r}\,, \vec{d_s}\,, \vec{AB}\,) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\,;\ \vec{d_r}\ x\ \vec{d_s} = (3, 0, -3)$$

Luego, $d(r,s) = \frac{|-3|}{\sqrt{(-3)^2+0^2+(-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{3\sqrt{18}}{18} = \frac{9\sqrt{2}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}71\ u$

6.- Considera el plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$, y la recta r de ecuación $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$

a) Determina la posición relativa de π y r.

Resolución

Un vector normal de π es $\vec{n_\pi} = (2, 1, -1)$; un vector director de r es $\vec{d} = (-2, 1, -3)\ //\ (2, -1, 3)$

$\vec{d}\,.\,\vec{n_\pi} = (2, -1, 3).(2, 1, -1) = 4 - 1 - 3 = 0$. Entonces r ⊂ π ó r // π

A(5, 0, 6) ∈ r pero A ∉ π porque no cumple su ecuación: $2.5 + 0 - 6 + 2 = 6 \neq 0$. Por tanto, r // π

b) Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

Resolución

Sea α el plano que se pide. Los vectores $\vec{n_\pi} = (2, 1, -1)$ y $\vec{d} = (2, -1, 3)$ son vectores directores de α

Luego, un vector normal de α es $\vec{n_\alpha} = \vec{n_\pi}\ x\ \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (2, -8, -4)\ //\ (-1, 4, 2)$

Como α pasa por A(5, 0, 6), entonces α : $-1(x - 5) + 4(y - 0) + 2(z - 6) = 0$; α: $-x + 4y + 2z - 7 = 0$

c) Halla las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a π que contiene a r.

Resolución

Un vector normal del plano β que nos piden es $\vec{n_\beta} = \vec{n_\pi} = (2, 1, -1)$, pues es paralelo a π.

Como β pasa por A(5, 0, 6), entonces β : $2(x - 5) + 1(y - 0) - 1(z - 6) = 0$; β: $2x + y - z - 4 = 0$

Llamando $x = \lambda$, $y = \mu$, como $z = 2x + y - 4$, $z = 2\lambda + \mu - 4$, π: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -4 + 2\lambda + \mu \end{cases}$

7.- Considera los vectores $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ y $\vec{w} = (\lambda, 1, 0)$
a) Calcula los valores de λ que hacen que u y w sean ortogonales.

Resolución

Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u} \Rightarrow \vec{u}.\vec{w} = 0$. De donde, $1.\lambda - 1.1 + 3.0 = 0 \to \lambda = 1$

b) Calcula los valores de λ que hacen que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.

Resolución

Si los vectores son l.i., $det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \to \lambda + 3 + 1 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -4$

c) Para λ = 1 escribe el vector $\vec{r} = (3, 0, 2)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Resolución

Para λ = 1, se tiene que $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ y $\vec{w} = (1, 1, 0)$

Si $\vec{r}$ es combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ entonces $\vec{r} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

Luego, $(3, 0, 2) = a(1, -1, 3) + b(1, 0, -1) + c(1, 1, 0) \Rightarrow$ Igualando componentes $\begin{cases} 3 = a + b + c \\ 0 = -a + c \\ 2 = 3a - b \end{cases}$.

Despejando en la 2ª ecuación, c = a. Sustituyendo en la primera, $\begin{cases} 3 = 2a + b \\ 2 = 3a - b \end{cases}$

Sumando las ecuaciones se tiene 5 = 5a, con lo que a = 1. Sustituyendo, 3 = 2.1 + b ⇒ b = 1.

Por tanto, a = b = c = 1 y $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

8.- Sea r la recta dada por $\frac{x+2}{2} = y + 1 = \frac{z-1}{-3}$ y sea s la recta dada por $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3y - z + 6 = 0 \end{cases}$
a) Estudia la posición relativa de r y s.

Resolución

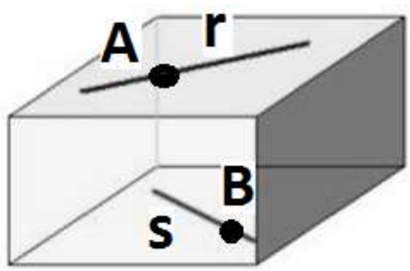
$A(-2, -1, 1) \in r$, $\vec{d_r} = (2, 1, -3)$ es un vector director de r

Para hallar un punto de s hacemos y = 0, de donde $\begin{cases} x - 0 - 3 = 0 \\ 3.0 - z + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ z = 6 \end{matrix}$. Luego, $B(3, 0, 6) \in s$

Un vector director de s se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que definen a la recta s.

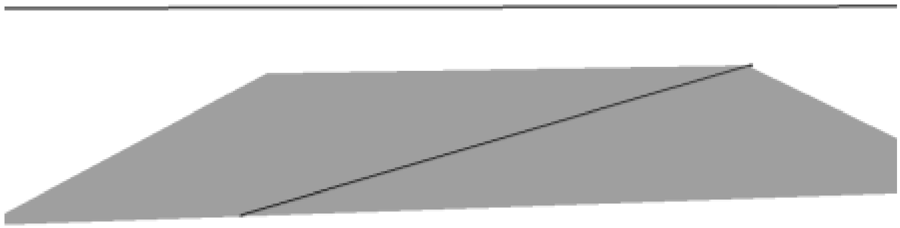
$\vec{d_s} = (1, -1, 0) \times (0, 3, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 3)$ es un vector director de s

$\vec{AB} = (5, 1, 5)$; $det(\vec{AB}, \vec{d_r}, \vec{d_s}) = det\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 26 \neq 0 \Rightarrow$ Los vectores son l.i. ⇒ r y s se cruzan.



b) Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Resolución



El plano que se pide, π, pasa por A(−2, −1, 1) y tiene como vectores directores $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_s}$. Luego, un vector normal de π es $\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{d_r}\ x\ \overrightarrow{d_s} = (2,1,-3)\ x\ (1,1,3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (6,-9,1)$

π: 6(x + 2) – 9(y + 1) + 1(z – 1) = 0 ⇒ π: 6x – 9y + z + 2 = 0

9.- Considera los vectores $\vec{u} = (1,-1,0)$, $\vec{v} = (0,1,2)$ y $\vec{w} = (1+\alpha, 2\alpha, 2-3\alpha)$.
Halla los valores de α en cada uno de los siguientes casos:
a) $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ están en el mismo plano.

Resolución

Como los vectores son coplanarios, serán l.d. Luego $det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1+\alpha & 2\alpha & 2-3\alpha \end{vmatrix} = 0.$

De donde, 2 – 3α – 2 – 2α – 4α = 0 ⇒ −9α = 0 ⇒ α = 0

b) $\vec{w}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

Resolución

Si $\vec{w}$ es perpendicular a $\vec{u}$ entonces $\vec{u}.\vec{w} = 0$. Luego, 1 + α – 2α = 0 ⇒ α = 1

Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{v}$ entonces $\vec{v}.\vec{w} = 0$. Luego, 2α + 4 – 6α = 0 ⇒ 4 – 4α = 0 ⇒ α = 1

c) El volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es $\frac{1}{6}$.

Resolución

$\frac{1}{6} = V_{tetraedro} = \frac{1}{6}V_{paralelepípedo}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \frac{1}{6}|det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})| = \frac{1}{6}|-9\alpha|.$

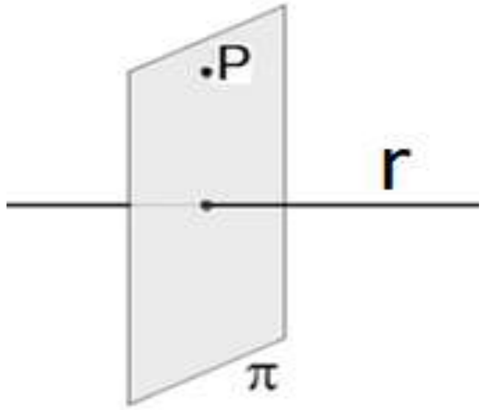
Luego, 9α = 1 ó 9α = −1 ; $\alpha = \frac{1}{9}$ ó ; $\alpha = \frac{-1}{9}$

10.- Considera el punto P(2, –2, 0) y la recta r dada por $\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a r.

Resolución

Observamos que P(2, –2, 0) $\notin$ r porque no cumple sus ecuaciones.



Un vector normal al plano es el vector director de r, $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{d_r}$. Como r está dada como intersección de dos planos, un vector director de r es $\overrightarrow{d_r} = (1,0,1)\ x\ (0,1,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,1)\ //\ (1,1,-1)$

Como el plano pasa por P(2, –2, 0), la ecuación normal del plano

es π: 1(x – 2) + 1(y + 2) – 1(z – 0) = 0. Operando, π: x + y – z = 0

b) Calcula la distancia de P a r.

Resolución

Hallamos M, punto de intersección de r y π: $\begin{cases} x+z=2 \\ y+z=1 \\ x+y-z=0 \end{cases}$; Usamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} f3-f1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} f3-f2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Llegamos al sistema $\begin{cases} x+z=2 \\ y+z=1 \\ -3z=-3 \end{cases}$. Resolviendo: z = 1 ; y + 1 = 1, y = 0 ; x + 1 = 2, x = 1 ⇒ M(1, 0, 1)

$$d(P,r) = \left|\overrightarrow{PM}\right| = (-1,2,1) = \sqrt{(-1)^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}\ \ u$$

11.- Sean A(−3, 4, 0), B(3, 6, 3) y C(−1, 2, 1) los vértices de un triángulo.
a) Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.

Resolución

Los vectores $\overrightarrow{AB} = (6, 2, 3)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, -2, 1)$ son vectores directores del plano π que buscamos.

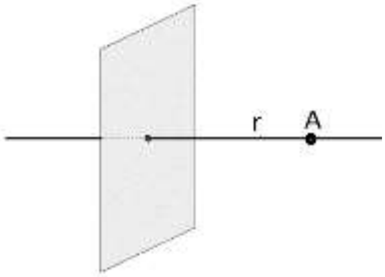
Luego, un vector normal de π es $\vec{n} = \overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (8, 0, -16)\ //\ (1, 0, -2)$

Y como π pasa por C(−1, 2, 1), entonces π : 1(x + 1) + 0(y – 0) – 2(z – 1) = 0 ⇒ π: x – 2z + 3 = 0

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.

Resolución

Observamos que A(0, 0, 0) ∉ π porque no cumple su ecuación.



Dado que la recta es perpendicular al plano π: x – 2z – 5 = 0, un vector director de la recta es un vector normal del plano $\overrightarrow{n_\pi} = (1, 0, -2)$. Y como la recta r pasa por A(0, 0, 0), $r: \begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = -2k \end{cases}$, con k ∈ R

c) Calcula el área del triángulo ABC.

Resolución

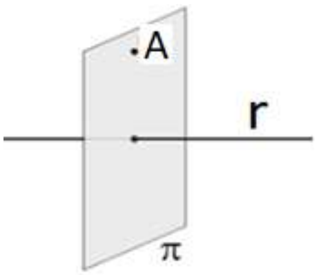
Sabemos que el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo generado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. O sea, $A(triángulo) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AC}\right|$; $\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AC} = (8, 0, -16)$

$A(triángulo) = \frac{1}{2}|(8, 0, -16)| = \frac{1}{2}.8|(1, 0, -2)| = 4\sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} = 4\sqrt{5} \cong 8{,}94\ u^2$

12.- Considera el punto A(8, −1, 3) y la recta r dada por $\frac{x+1}{2} = y - 2 = \frac{z-1}{3}$
a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.

Resolución

Observamos que A(8, −1, 3) ∉ r porque no cumple su ecuación: $\frac{8+1}{2} \neq -1 - 2 \neq \frac{3-1}{3}$.



Un vector normal al plano es el vector director de r, $\vec{n} = \overrightarrow{d_r} = (2, 1, 3)$

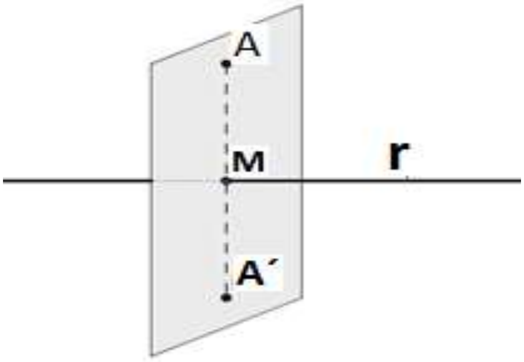
Como el plano pasa por A(8, −1, 3), la ecuación normal del plano es π: 2(x – 8) + 1(y + 1) + 3(z – 3) = 0.

Operando, π: 2x + y + 3z – 24 = 0

---

b) Halla el punto simétrico de A respecto de r.

Resolución



El punto simétrico de A respecto de la recta r sería el punto A´(a, b, c) del dibujo.

Vamos a hallarlo:

- Hallamos M, punto de corte de r y el plano π: 2x + y + 3z – 24 = 0, hallado en el apartado anterior.

Para ello resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

La forma paramétrica de r es $r: \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 2 + k \\ z = 1 + 3k \end{cases}$, con k ∈ R.

Sustituyendo en la ecuación del plano se tiene

2(–1 + 2k) + (2 + k) + 3(1 +3k) – 24 = 0 → 14k – 21 = 0 ; $k = \frac{3}{2}$

Luego $\begin{cases} x = -1 + 2\frac{3}{2} \\ y = 2 + \frac{3}{2} \\ z = 1 + 3\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{7}{2} \\ z = \frac{11}{2} \end{cases}$. El punto de corte es $M\left(2, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$

- Hallamos el simétrico A´(a, b, c) de A(8, –1, 3) usando que M es el punto medio del segmento AA´:

$\begin{cases} \frac{a+8}{2} = 2 \Rightarrow a = -4 \\ \frac{b-1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow b = 8 \\ \frac{c+3}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow c = 8 \end{cases}$. El punto simétrico que se pide es $A´(-4, 8, 8)$