

1.-

a) Represente gráficamente la región factible definida por las siguientes restricciones:

$$4x + 2y \geq 5 \quad 2x + 5y \leq 10 \quad 2x + 2y \leq 6 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad \text{y calcule sus vértices.}$$

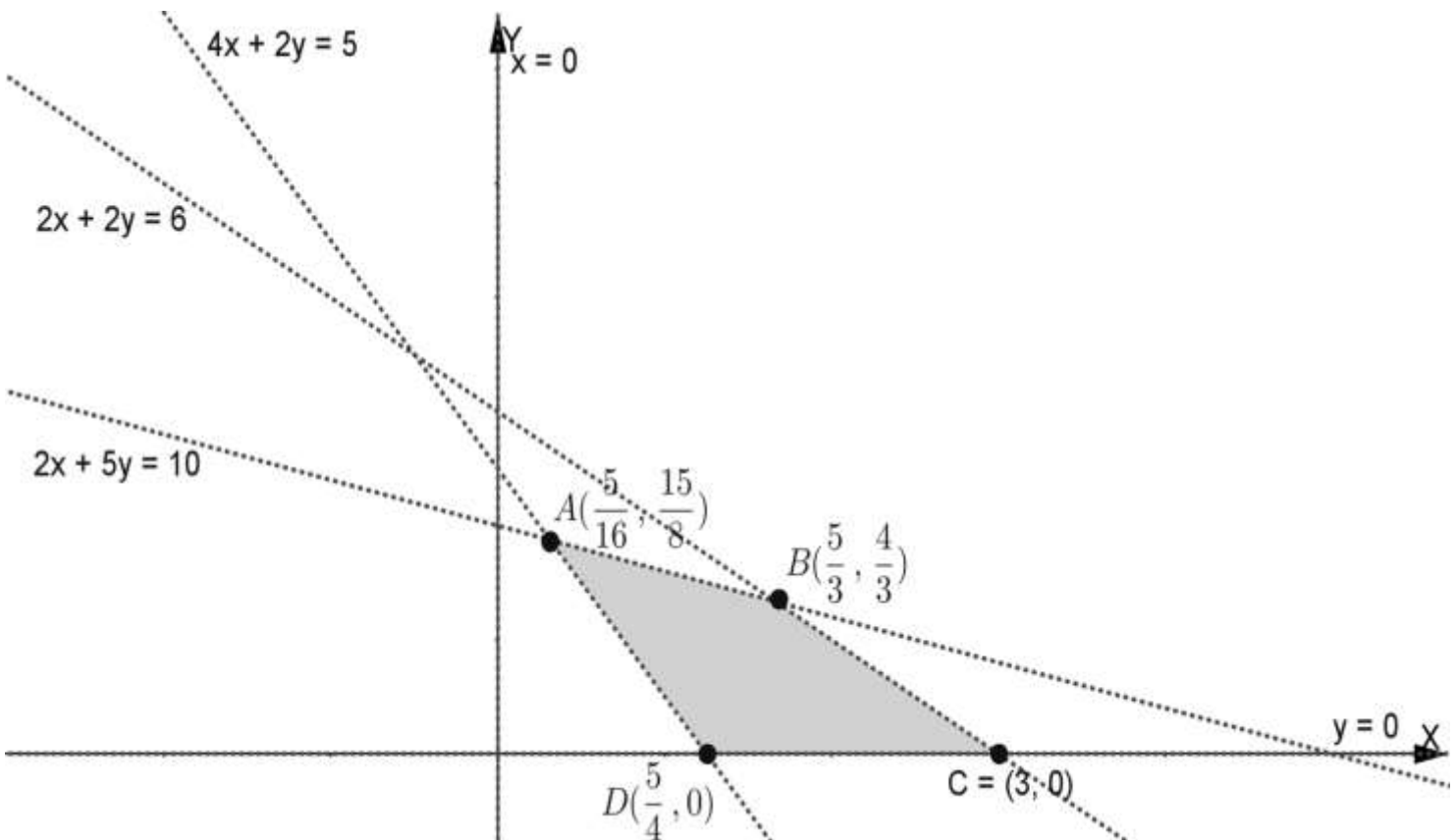
Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$4x + 2y \geq 5 \rightarrow \text{Recta: } 4x + 2y = 5$ $x = 0, 4 \cdot 0 + 2y = 5, y = 2,5$ $y = 0, 4x + 2 \cdot 0 = 5, x = 1,25$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>1,25</td></tr> <tr><td>y</td><td>2,5</td><td>0</td></tr> </table> <p>$(0, 0) \rightarrow 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \geq 5$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que no contiene al $(0, 0)$.</p>	x	0	1,25	y	2,5	0	$2x + 5y \leq 10 \rightarrow \text{Recta: } 2x + 5y = 10$ $x = 0, 2 \cdot 0 + 5y = 10, y = 2$ $y = 0, 2x + 5 \cdot 0 = 10, x = 5$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>2</td><td>0</td></tr> </table> <p>$(0, 0) \rightarrow 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \leq 10$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.</p>	x	0	5	y	2	0
x	0	1,25											
y	2,5	0											
x	0	5											
y	2	0											

$2x + 2y \leq 6 \xrightarrow{:2} x + y \leq 3 \rightarrow \text{Recta: } x + y = 3$ $x = 0, 0 + y = 3, y = 3$ $y = 0, x + 0 = 3, x = 3$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>3</td></tr> <tr><td>y</td><td>3</td><td>0</td></tr> </table> <p>$(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \leq 3$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.</p>	x	0	3	y	3	0	$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y) $(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(1, 0)$. <hr/> $y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X) $(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 1)$.
x	0	3					
y	3	0					

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0; 1,25; 3 y 5 y en el eje Y los valores son 0; 2; 2,5 y 3



Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 2x + 5y = 10 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 4x + 10y = 20 \end{cases}; \text{restando, } 8y = 15, y = \frac{15}{8}$$

$$4x + 2 \cdot \frac{15}{8} = 5, 4x + \frac{15}{4} = 5 \xrightarrow{\cdot 4}, 16x + 15 = 20, x = \frac{5}{16} \rightarrow A\left(\frac{5}{16}, \frac{15}{8}\right)$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 5y = 10 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ 2x + 5y = 10 \end{cases}; \text{restando, } 3y = 4, y = \frac{4}{3}; x + \frac{4}{3} = 3, x = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \rightarrow B\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x + 0 = 3, x = 3 \rightarrow C(3, 0) \quad \begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 4x + 2 \cdot 0 = 5, x = \frac{5}{4} \rightarrow D\left(\frac{5}{4}, 0\right)$$

b) Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x, y) = x + 2y$ en la región anterior y los puntos donde se alcanzan.

Resolución

Los puntos en los que alcanza los valores extremos la función F deben estar en los vértices del recinto:

$$F(A) = F\left(\frac{5}{16}, \frac{15}{8}\right) = \frac{5}{16} + 2 \cdot \frac{15}{8} = \frac{65}{16} = 4,0625 \quad F(B) = F\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{13}{3} \cong 4,3333$$

$$F(C) = F(3, 0) = 3 + 2 \cdot 0 = 3 \quad F(D) = F\left(\frac{5}{4}, 0\right) = \frac{5}{4} + 2 \cdot 0 = \frac{5}{4} = 1,25$$

Valor máximo es $\frac{13}{3} \cong 4,3333$ y se alcanza en $B\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$ y el mínimo es $\frac{5}{4} = 1,25$ y se alcanza en $D\left(\frac{5}{4}, 0\right)$

2.- Un supermercado tiene almacenados 600 kg de manzanas y 400 kg de naranjas. Para incentivar su venta elabora dos tipos de bolsas: A y B. Las bolsas de tipo A contienen 3 kg de manzanas y 1 kg de naranjas; las bolsas de tipo B incluyen 2 kg de cada uno de los productos. El precio de venta de la bolsa A es de 4 € y de 3 € el de la bolsa de tipo B.

Suponiendo que vende todas las bolsas preparadas, ¿cuántas bolsas de cada tipo debe haber elaborado para maximizar los ingresos? ¿A cuánto asciende el ingreso máximo?

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

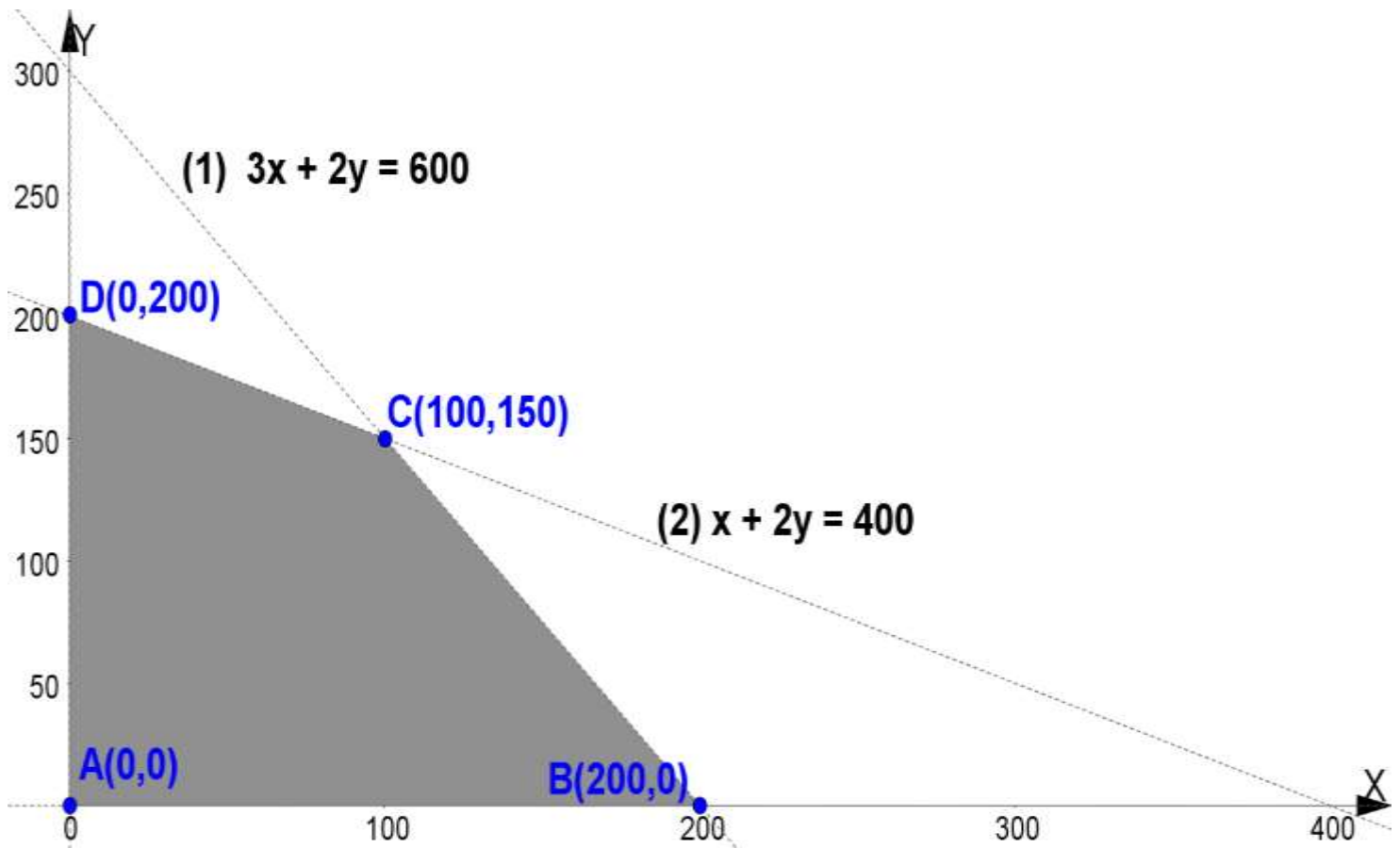
	nº de bolsas	kg de manzanas	kg de naranjas	ingresos (en €)
tipo A	x	3x	1x	4x
tipo B	y	2y	2y	3y
total		3x + 2y	x + 2y	4x + 3y

Las restricciones son $\begin{cases} 3x + 2y \leq 600 \\ x + 2y \leq 400 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$; función a optimizar (maximizar), ingresos: $F(x, y) = 4x + 3y$

Obtención de la región factible (resolvemos el sistema de inecuaciones):

$3x + 2y \leq 600 \rightarrow$ Recta: $3x + 2y = 600$ $x = 0, 3 \cdot 0 + 2y = 600, y = 300$ $y = 0, 3x + 2 \cdot 0 = 600, x = 200$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>200</td></tr> <tr><td>y</td><td>300</td><td>0</td></tr> </table> $(0, 0) \rightarrow 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 600$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.	x	0	200	y	300	0	$x + 2y \leq 400 \rightarrow$ Recta: $x + 2y = 400$ $x = 0, 0 + 2y = 400, y = 200$ $y = 0, x + 2 \cdot 0 = 400, x = 400$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>400</td></tr> <tr><td>y</td><td>200</td><td>0</td></tr> </table> $(0, 0) \rightarrow 0 + 2 \cdot 0 \leq 400$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.	x	0	400	y	200	0	$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y) $(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(1, 0)$. <hr/> $y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X) $(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 1)$.
x	0	200												
y	300	0												
x	0	400												
y	200	0												

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 200 y 400 y en el eje Y los valores son 0, 200 y 300



Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A(0, 0) \quad \begin{cases} 3x + 2y = 600 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 3x + 2 \cdot 0 = 600, x = 200 \rightarrow B(200, 0)$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 600 \\ x + 2y = 400 \end{cases}; \text{ restando, } 2x = 200, x = 100; 100 + 2y = 400, y = 150 \rightarrow C(100, 150)$$

$$\begin{cases} x + 2y = 400 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow 0 + 2y = 400, y = 200 \rightarrow D(0, 200)$$

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $F(x, y) = 4x + 3y$:

$$F(A) = F(0, 0) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \quad F(B) = F(200, 0) = 4 \cdot 200 + 3 \cdot 0 = 800$$

$$F(C) = F(100, 150) = 4 \cdot 100 + 3 \cdot 150 = 850 \quad F(D) = F(0, 200) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 200 = 600$$

Luego, los ingresos máximos que se pueden obtener son 850 € y se alcanza para $x = 100, y = 150$.

Es decir, tendría que elaborar 100 bolsas del tipo A y 150 del B

3.- (prueba ordinaria) Se dispone de 160 m de tejido de pana y 240 m de tejido de lana para hacer trajes y abrigos. Se usa 1 m de pana y 2 m de lana para cada traje, y 2 m de pana y 2 m de lana para cada abrigo. Cada traje se vende a 250 € y cada abrigo a 350 €.

a) ¿Cuántos trajes y abrigos se deben confeccionar para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de prendas	metros de pana	metros de lana	beneficio (en €)
trajes	x	1x	2x	250x
abrigos	y	2y	2y	350y
total		x + 2y	2x + 2y	250x + 350y

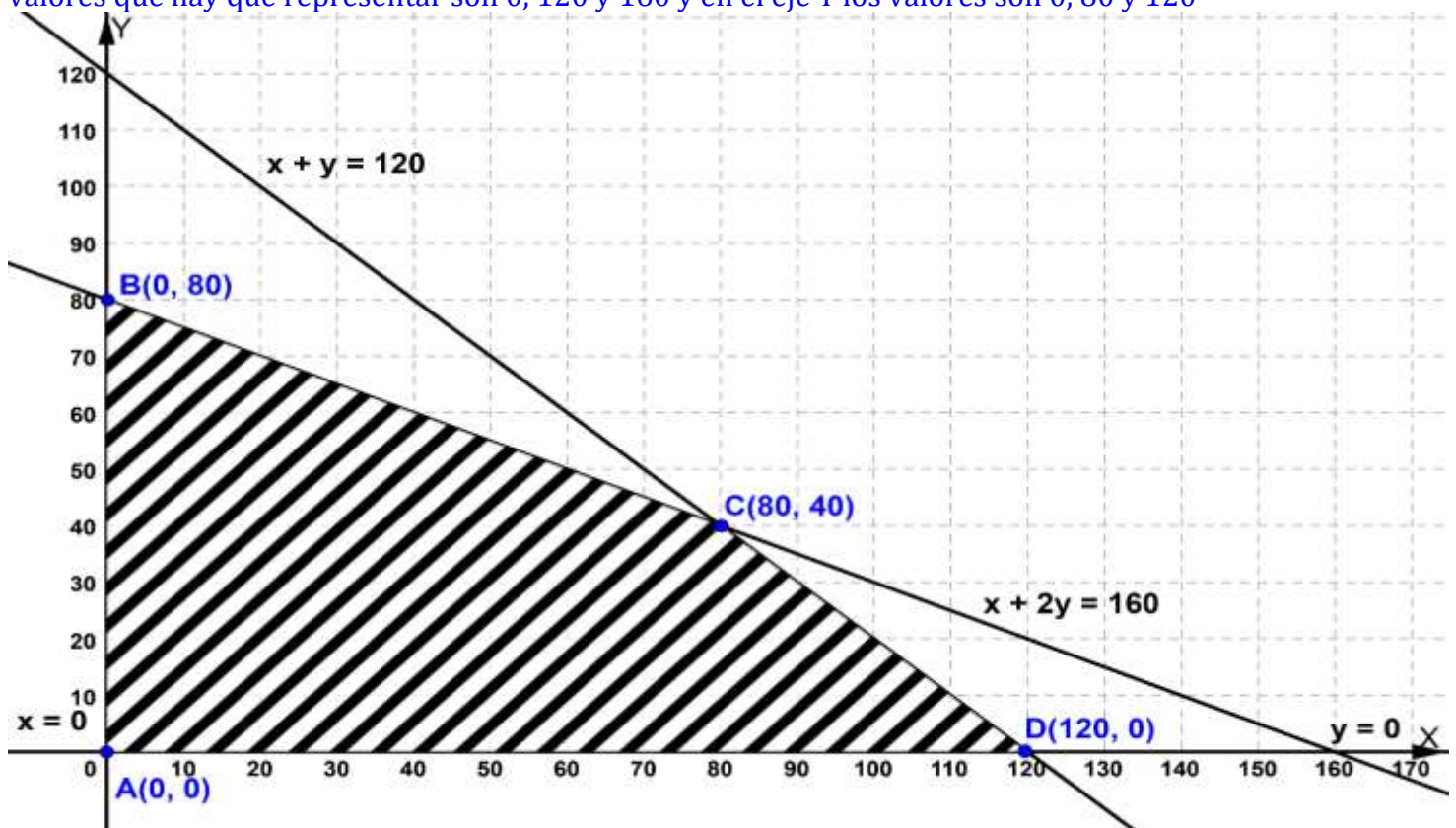
Las restricciones son $\begin{cases} x + 2y \leq 160 \\ 2x + 2y \leq 240 \xrightarrow{:2} x + y \leq 120 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

La función a optimizar (maximizar) es el beneficio: $f(x, y) = 250x + 350y$

Obtención de la región factible (resolvemos el sistema de inecuaciones):

$x + 2y \leq 160 \rightarrow$ Recta: $x + 2y = 160$ $x = 0, 0 + 2y = 160, y = 80$ $y = 0, x + 2 \cdot 0 = 160, x = 160$ <table border="1"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>160</td></tr> <tr><td>y</td><td>80</td><td>0</td></tr> </table> $(0, 0) \rightarrow 0 + 2 \cdot 0 \leq 160$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.	x	0	160	y	80	0	$x + y \leq 120 \rightarrow$ Recta: $x + y = 120$ $x = 0, 0 + y = 120, y = 120$ $y = 0, x + 0 = 120, x = 120$ <table border="1"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>120</td></tr> <tr><td>y</td><td>120</td><td>0</td></tr> </table> $(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \leq 120$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.	x	0	120	y	120	0	$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y) $(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(1, 0)$. $y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X) $(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 1)$.
x	0	160												
y	80	0												
x	0	120												
y	120	0												

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 120 y 160 y en el eje Y los valores son 0, 80 y 120



Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A(0, 0) \qquad \begin{cases} x + 2y = 160 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow 0 + 2y = 160, y = 80 \rightarrow B(0, 80)$$

$$\begin{cases} x + 2y = 160 \\ x + y = 120 \end{cases} ; \text{restando, } y = 40; x + 40 = 120, x = 80 \rightarrow C(80, 40)$$

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x + 0 = 120, x = 120 \rightarrow D(120, 0)$$

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $f(x, y) = 250x + 350y$:

$$f(A) = f(0, 0) = 250 \cdot 0 + 350 \cdot 0 = 0$$

$$f(B) = f(0, 80) = 250 \cdot 0 + 350 \cdot 80 = 28000$$

$$f(C) = f(80, 40) = 250 \cdot 80 + 350 \cdot 40 = 34000$$

$$f(D) = f(120, 0) = 250 \cdot 120 + 350 \cdot 0 = 30000$$

Luego, el beneficio máximo es 34000 € y se alcanza para $x = 80, y = 40$.

Tendría que confeccionar 80 trajes y 40 abrigos para obtener un beneficio máximo de 34000 €

b) ¿Pueden hacerse 60 trajes y 50 abrigos con esas cantidades de tejido?

En caso afirmativo, ¿obtendría el máximo beneficio al venderlo todo?

Resolución

Para que se pueda se deben cumplir todas las restricciones, $\begin{cases} x + 2y \leq 160 \\ x + y \leq 120 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Sustituyendo (60, 50) tenemos $\begin{cases} 60 + 2 \cdot 50 \leq 160 \text{ (sí)} \\ 60 + 50 \leq 120 \text{ (sí)} \\ 60 \geq 0, 50 \geq 0 \text{ (sí)} \end{cases}$.

Luego, sí pueden hacerse y el beneficio sería $f(60, 50) = 250 \cdot 60 + 350 \cdot 50 = 32000$ €, que no es el beneficio máximo, pues el máximo beneficio es 34000 €

4.- (prueba ordinaria) Con motivo de su inauguración, una heladería quiere repartir dos tipos de tarrinas de helados.

El primer tipo de tarrina está compuesto por 100 g de helado de chocolate, 200 g de helado de straciatella y 1 barquillo. El segundo tipo llevará 150 g de helado de chocolate, 150 g de helado de straciatella y 2 barquillos. Sólo se dispone de 8 kg de helado de chocolate, 10 kg de helado de straciatella y 100 barquillos. ¿Cuántas tarrinas de cada tipo se deben preparar para repartir el máximo número posible de tarrinas?

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	número	g de helado de chocolate	g de helado de straciatella	nº de barquillos
tarrina tipo I	x	100x	200x	1x
tarrina tipo II	y	150y	150y	2y
total	x + y	100x + 150y	200x + 150y	x + 2y

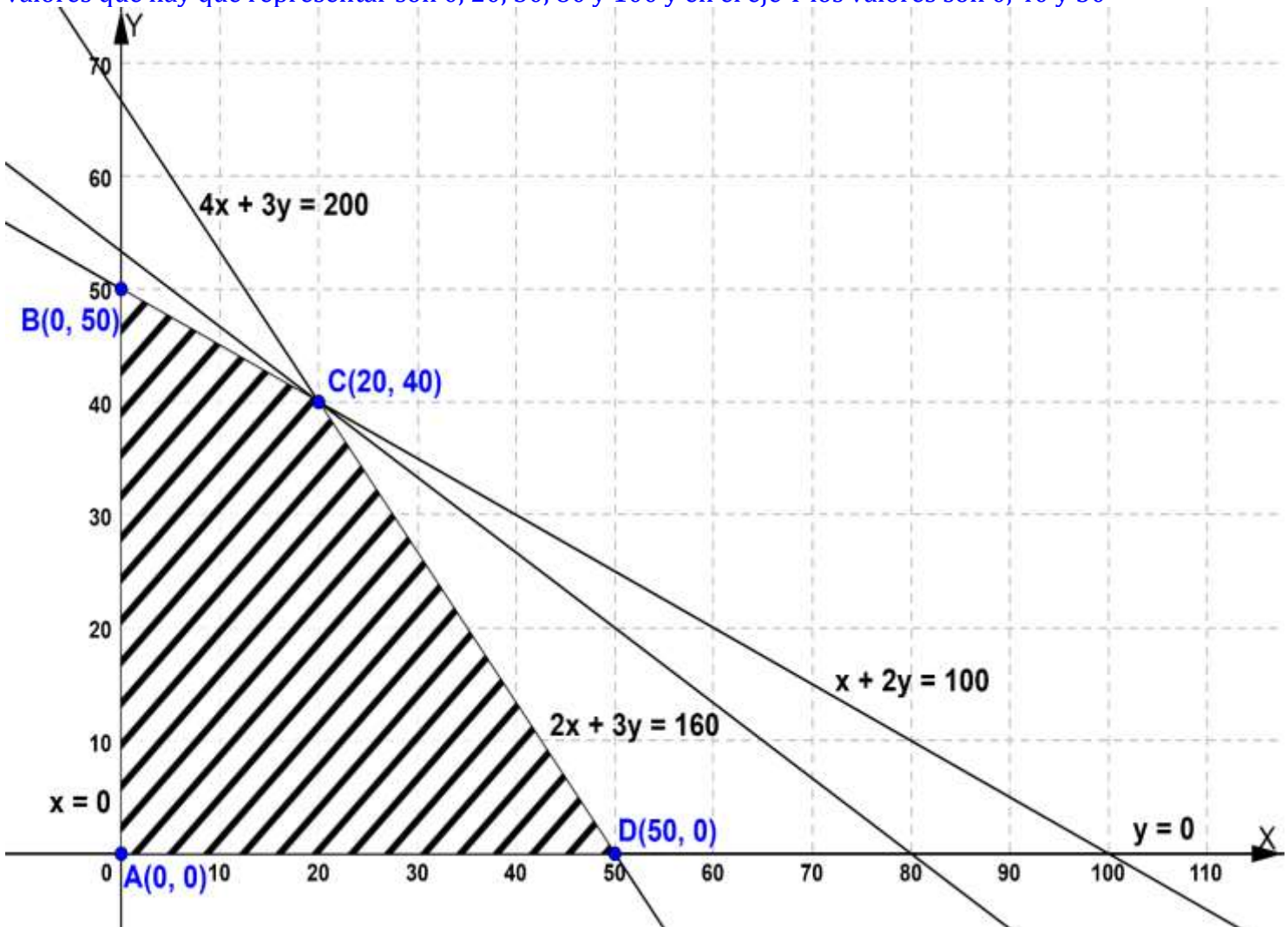
Las restricciones son $\begin{cases} 100x + 150y \leq 8000 \xrightarrow{:50} 2x + 3y \leq 160 \\ 200x + 150y \leq 10000 \xrightarrow{:50} 4x + 3y \leq 200 \\ x + 2y \leq 100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

La función a optimizar (maximizar) es el total de tarrinas: $f(x, y) = x + y$

Obtención de la región factible (resolvemos el sistema de inecuaciones):

$2x + 3y \leq 160 \rightarrow$ Recta: $2x + 3y = 160$ $x = 20, \quad 2 \cdot 20 + 3y = 160, \quad y = 40$ $y = 0, \quad 2x + 3 \cdot 0 = 160, \quad x = 80$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>x</td><td>20</td><td>80</td></tr> <tr><td>y</td><td>40</td><td>0</td></tr> </table> <p>$(0, 0) \rightarrow 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 160$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.</p>	x	20	80	y	40	0	$4x + 3y \leq 200 \rightarrow$ Recta: $4x + 3y = 200$ $x = 20, \quad 4 \cdot 20 + 3y = 200, \quad y = 40$ $y = 0, \quad 4x + 3 \cdot 0 = 200, \quad x = 50$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>x</td><td>20</td><td>50</td></tr> <tr><td>y</td><td>40</td><td>0</td></tr> </table> <p>$(0, 0) \rightarrow 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 200$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.</p>	x	20	50	y	40	0
x	20	80											
y	40	0											
x	20	50											
y	40	0											
$x + 2y \leq 100 \rightarrow$ Recta: $x + 2y = 100$ $x = 0, \quad 0 + 2y = 100, \quad y = 50$ $y = 0, \quad x + 2 \cdot 0 = 100, \quad x = 100$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>100</td></tr> <tr><td>y</td><td>50</td><td>0</td></tr> </table> <p>$(0, 0) \rightarrow 0 + 2 \cdot 0 \leq 100$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.</p>	x	0	100	y	50	0	$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y) $(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(1, 0)$. $y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X) $(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 1)$.						
x	0	100											
y	50	0											

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 20, 50, 80 y 100 y en el eje Y los valores son 0, 40 y 50



Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A(0, 0) \qquad \begin{cases} x + 2y = 100 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow 0 + 2y = 100, y = 50 \rightarrow B(0, 50)$$

$$\begin{cases} x + 2y = 100 \\ 2x + 3y = 160 \\ 4x + 3y = 200 \end{cases}; \text{ restando las ecuaciones } 2^a \text{ y } 3^a, 2x = 40, x = 20; 20 + 2y = 100, y = 40 \rightarrow C(20, 40)$$

Se puede comprobar que $x = 20, y = 40$ cumple todas las ecuaciones, $\begin{cases} 20 + 2 \cdot 40 = 100 \text{ (sí)} \\ 2 \cdot 20 + 3 \cdot 40 = 160 \text{ (sí)} \\ 4 \cdot 20 + 3 \cdot 40 = 200 \text{ (sí)} \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 200 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 4x + 3 \cdot 0 = 200, x = 50 \rightarrow D(50, 0)$$

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $f(x, y) = x + y$:

$$f(A) = f(0, 0) = 0 + 0 = 0 \qquad f(B) = f(0, 50) = 0 + 50 = 50$$

$$f(C) = f(20, 40) = 20 + 40 = 60 \qquad f(D) = f(50, 0) = 50 + 0 = 50$$

Luego, el valor máximo es 60 y se alcanza para $x = 20, y = 40$.

El máximo número máximo de tarrinas es 60 y se obtiene haciendo 20 del primer tipo y 40 del segundo

5.- Sea el siguiente conjunto de inecuaciones: $x - 3y \leq 8$, $3x + 2y \geq 15$, $x + 3y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
 a) Dibuje el recinto del plano determinado por estas inecuaciones.

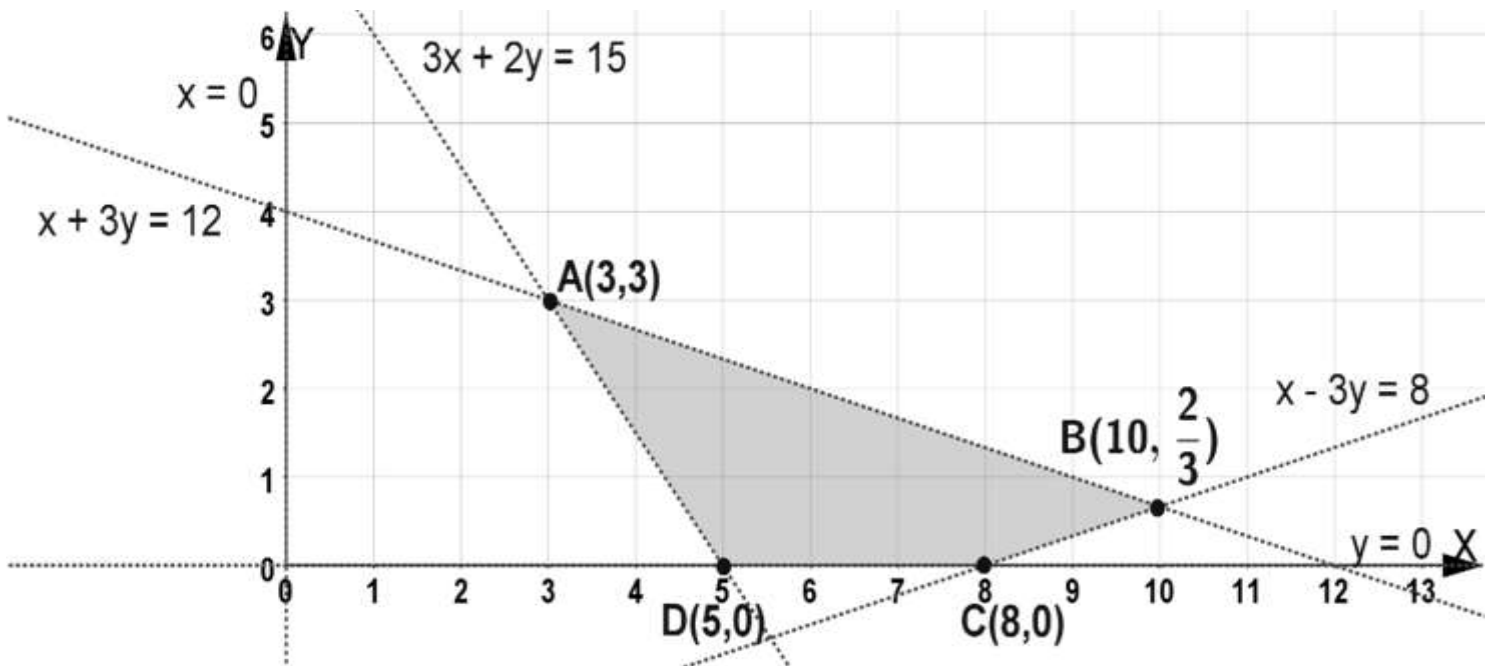
Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$x - 3y \leq 8 \rightarrow$ Recta: $x - 3y = 8$ $x = -1, -1 - 3y = 8, y = -3$ $y = 0, x - 3 \cdot 0 = 8, x = 8$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>x</td><td>-1</td><td>8</td></tr> <tr><td>y</td><td>-3</td><td>0</td></tr> </table> <p>$(0, 0) \rightarrow 0 - 3 \cdot 0 \leq 8$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.</p>	x	-1	8	y	-3	0	$3x + 2y \geq 15 \rightarrow$ Recta: $3x + 2y = 15$ $x = 1, 3 \cdot 1 + 2y = 15, y = 6$ $y = 0, 3x + 2 \cdot 0 = 15, x = 5$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>6</td><td>0</td></tr> </table> <p>$(0, 0) \rightarrow 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \geq 15$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que no contiene al $(0, 0)$.</p>	x	1	5	y	6	0
x	-1	8											
y	-3	0											
x	1	5											
y	6	0											

$x + 3y \leq 12 \rightarrow$ Recta: $x + 3y = 12$ $x = 0, 0 + 3y = 12, y = 4$ $y = 0, x + 3 \cdot 0 = 12, x = 12$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>12</td></tr> <tr><td>y</td><td>4</td><td>0</td></tr> </table> <p>$(0, 0) \rightarrow 0 + 3 \cdot 0 \leq 12$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.</p>	x	0	12	y	4	0	$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y) $(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(1, 0)$. <hr/> $y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X) $(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 1)$.
x	0	12					
y	4	0					

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son -1, 0, 1, 5, 8 y 12 y en el eje Y los valores son -3, 0, 4 y 6



b) Determine los vértices de este recinto.

Resolución

Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} x + 3y = 12 \\ 3x + 2y = 15 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 3} \begin{cases} 3x + 9y = 36 \\ 3x + 2y = 15 \end{cases}; \text{restando, } 7y = 21, y = 3; x + 3 \cdot 3 = 12, x = 3 \rightarrow A(3, 3)$$

$$\begin{cases} x + 3y = 12 \\ x - 3y = 8 \end{cases}; \text{restando, } 6y = 4, y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; x + 3 \cdot \frac{2}{3} = 12, x = 10 \rightarrow B\left(10, \frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x - 3y = 8 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x - 3 \cdot 0 = 8, x = 8 \rightarrow C(8, 0)$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 15 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 3x + 2 \cdot 0 = 15, x = 5 \rightarrow D(5, 0)$$

c) Maximice la función $F(x, y) = 5x + 9y$ en este recinto, indicando el punto o puntos donde se alcanza ese máximo.

Resolución

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $F(x, y) = 5x + 9y$:

$$F(A) = F(3, 3) = 5 \cdot 3 + 9 \cdot 3 = 42 \qquad F(B) = F\left(10, \frac{2}{3}\right) = 5 \cdot 10 + 9 \cdot \frac{2}{3} = 56$$

$$F(C) = F(8, 0) = 5 \cdot 8 + 9 \cdot 0 = 40 \qquad F(D) = F(5, 0) = 5 \cdot 5 + 9 \cdot 0 = 25$$

Luego, el valor máximo es 56 y se alcanza para $x = 10, y = \frac{2}{3}$

6.- Se desea invertir 100000 € en dos productos financieros A y B que tienen una rentabilidad del 2% y del 2,5% respectivamente. Se sabe que el producto B exige una inversión mínima de 10000 € y, por cuestiones de riesgo, no se desea que la inversión en B supere el triple de lo invertido en A. ¿Cuánto se debe invertir en cada producto para que el beneficio sea máximo y cuál sería dicho beneficio?

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	cantidad invertida (en €)	beneficio o rentabilidad (en €)
producto A	x	0,02x
producto B	y	0,025y
total	x + y	0,02x + 0,025y

Las restricciones son $\begin{cases} x + y \leq 100000 \\ y \geq 10000 \\ y \leq 3x \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

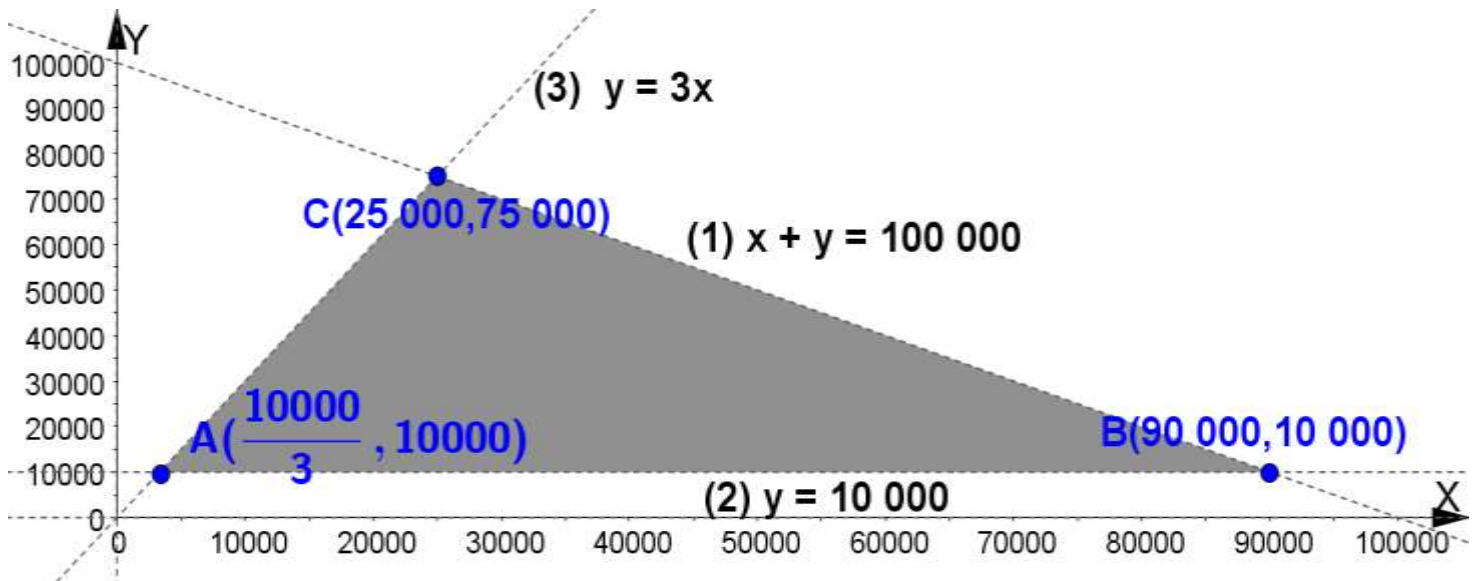
La función a optimizar (maximizar) es el beneficio: $f(x, y) = 0,02x + 0,025y$

Obtención de la región factible (resolvemos el sistema de inecuaciones):

<p>$x + y \leq 100000 \rightarrow$ Recta: $x + y = 100000$ $x = 0, 0 + y = 100000, y = 100000$ $y = 0, x + 0 = 100000, x = 100000$</p> <table border="1"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>100000</td></tr> <tr><td>y</td><td>100000</td><td>0</td></tr> </table> <p>$(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \leq 100000$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 0)$.</p>	x	0	100000	y	100000	0	<p>$y \geq 10000 \rightarrow$ Recta: $y = 10000$ Es la recta horizontal que pasa por $(0, 10000)$.</p> <table border="1"> <tr><td>x</td><td>0</td></tr> <tr><td>y</td><td>10000</td></tr> </table> <p>$(0, 0) \rightarrow 0 \geq 10000$ (falso). La solución es el semiplano cerrado que no contiene al $(0, 0)$.</p>	x	0	y	10000
x	0	100000									
y	100000	0									
x	0										
y	10000										

<p>$y \leq 3x \rightarrow$ Recta: $y = 3x$ $x = 0, y = 3 \cdot 0, y = 0$ $y = 30000, 30000 = 3x, x = 10000$</p> <table border="1"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>10000</td></tr> <tr><td>y</td><td>0</td><td>30000</td></tr> </table> <p>$(1, 0) \rightarrow 0 \leq 3 \cdot 1$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(1, 0)$.</p>	x	0	10000	y	0	30000	<p>$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y) $(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(1, 0)$.</p> <hr/> <p>$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X) $(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al $(0, 1)$.</p>
x	0	10000					
y	0	30000					

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada teniendo en cuenta que en el eje X los valores que hay que representar son 0, 10000 y 100000 y en el eje Y los valores son 0, 10000, 30000 y 100000



Obtención de los vértices:

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = 10000 \end{cases}; 3x = 10000, x = \frac{10000}{3} \rightarrow A\left(\frac{10000}{3}, 10000\right)$$

$$\begin{cases} x + y = 100000 \\ y = 10000 \end{cases}; x + 10000 = 100000, x = 90000 \rightarrow B(90000, 10000)$$

$$\begin{cases} x + y = 100000 \\ y = 3x \end{cases}; x + 3x = 100000, x = 25000; Y = 3 \cdot 25000 = 75000 \rightarrow C(25000, 75000)$$

Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo $f(x, y) = 0,02x + 0,025y$:

$$F(A) = F\left(\frac{10000}{3}, 10000\right) = 0,02 \frac{10000}{3} + 0,025 \cdot 10000 = \frac{200}{3} + 250 = \frac{950}{3} \cong 316,67$$

$$f(B) = f(90000, 10000) = 0,02 \cdot 90000 + 0,025 \cdot 10000 = 2050$$

$$f(C) = f(25000, 75000) = 0,02 \cdot 25000 + 0,025 \cdot 75000 = 2375$$

Luego, el valor máximo es 2375 y se alcanza para $x = 25000, y = 75000$

Debe invertir 25000 € en A y 75000 € en B, obteniendo entonces un beneficio máximo de 2375 €.