1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que cumple $AX = (A^{-1}A^t + I)^2$, siendo A^t la matriz traspuesta de A e I la matriz identidad de orden 3.

Resolución

Observemos que como $\det A = 10 + 24 + 24 - 18 - 16 - 20 = 4 \neq 0$, existe A^{-1}.

Por otra parte, A es simétrica, luego $A^t = A$ y la ecuación matricial que nos queda es

$$AX = (A^{-1}A + I)^2 = (I + I)^2 = (2I)^2 = 4I$$

Multiplicando por A^{-1}, por la izquierda, $A^{-1}AX = IX = X = A^{-1}4I = 4A^{-1}I = 4\,A^{-1}$

Luego, $X = 4.\frac{1}{\det A}(adjA)^t = 4.\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

2.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + \lambda y + z = 4 \\ -\lambda x + y + z = 1 \\ x + y + z = \lambda + 3 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores de λ.

Resolución

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada, o matriz del sistema es $A^* = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$

Como $\det A = 1 + \lambda - \lambda - 1 + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 1$, resulta que $\det A = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ó $\lambda = -1$

– Si $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -1$, $\det A \neq 0$ y rg A = 3 = rg A* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si $\lambda = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $f3 = f1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, rg A = 2

Por otra parte, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $f3 = f1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, rg A* = 2

Luego, rg A = 2 = rg A* < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si $\lambda = -1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $f3 = f2$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, rg A = 2

Por otra parte, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 4 - 4 - 2 + 1 = -2 \neq 0$, rg A* = 3

Luego, rg A = 2 ≠ rg A* = 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible

(b) Resuelve el sistema, si es posible, para $\lambda = 1$.

Resolución

Para $\lambda = 1$, sabemos que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. La matriz del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $f_2 + f_1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2y + 2z = 5 \end{cases}$

Despejando y en la 2ª ecuación $y = \frac{5 - 2z}{2}$. Despejando x en la 1ª ecuación y sustituyendo, se tiene

$$x = 4 - y - z = 4 - \frac{5 - 2z}{2} - z = \frac{8 - 5 + 2z - 2z}{2} = \frac{3}{2}$$

Llamando z = k, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{5 - 2k}{2} \\ z = k \end{cases}$, con $k \in R$

3.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(a) Estudia el rango de A según los valores de m.

Resolución

Como $\det A = m + m - 1 - m - m(m-1) = -m^2 + 2m - 1$, resulta que

$$\det A = 0 \leftrightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 0}{-2} \Rightarrow m = 1$$

– Si $m \neq 1$, $\det A \neq 0$ y rg A = 3

– Si m = 1, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $f3 = f1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rg A = 2

(b) Sabiendo que para m = 1 el sistema dado por AX = B tiene solución, encuentra k y resuélvelo.

Resolución

Para m = 1, la matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada, o matriz del sistema es $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$. Sabemos que el sistema tiene solución y dado que rg A = 2, como ya se vió en el apartado anterior, por el teorema de Rouché-Fröbenius debe ser también rg A* = 2, obteniéndose así un sistema compatible indeterminado, con infinitas soluciones. Luego, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 1 - 1 - k = -k = 0$.

De donde k = 0

Para la resolución, la matriz del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $f3 = f1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$. Despejando x en la 1ª ecuación y sustituyendo el valor y = 1, se tiene

$x = -y - z = -1 - z$. Llamando z = k, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x = -1 - k \\ y = 1 \\ z = k \end{cases}$, con $k \in R$

4.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx + (m+1)z = m \\ my + z = m \\ y + mz = m \end{cases}$

(a) Discute el sistema según los valores de m.

Resolución

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} m & 0 & m+1 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada, o matriz del sistema es $A^* = \begin{pmatrix} m & 0 & m+1 & m \\ 0 & m & 1 & m \\ 0 & 1 & m & m \end{pmatrix}$.

Como $\det A = m^3 - m = m(m^2 - 1)$, resulta que $\det A = 0 \Leftrightarrow m = 0,\ m = 1$ ó $m = -1$

– Si $m \neq 0$; $m \neq 1$; $m \neq -1$, $\det A \neq 0$ y $\operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg} A^* =$ nº de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si $m = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $f2 = f1$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $\operatorname{rg} A = 2$.

Por otra parte, $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $f2 = f1$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $\operatorname{rg} A^* = 2$.

Luego, $\operatorname{rg} A = 2 = \operatorname{rg} A^* <$ nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $f3 = f2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\operatorname{rg} A = 2$.

Por otra parte, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $f3 = f2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\operatorname{rg} A^* = 2$.

Luego, $\operatorname{rg} A = 2 = \operatorname{rg} A^* <$ nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema también es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si $m = -1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $f3 = -f2$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\operatorname{rg} A = 2$

Por otra parte, $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, $\operatorname{rg} A^* = 3$

Luego, $\operatorname{rg} A = 2 \neq \operatorname{rg} A^* = 3$. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible

(b) Resuélvelo, si es posible, para m = 1.

Resolución

Para m = 1, sabemos del apartado anterior que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $f3 = f2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

que corresponde al sistema $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$.

Despejando y en la 2ª ecuación $y = 1 - z$. Despejando x en la 1ª ecuación, se tiene $x = 1 - 2z$

Llamando z = k, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 1 - k \\ z = k \end{cases}$, con k ∈ R

5.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calcula los valores de m para los cuales A tiene inversa.

Resolución

Sabemos que A tiene inversa sólo cuando det A sea no nulo. Como det A = m + m – 1 – m – m(m – 1) =

$= -m^2 + 2m - 1$, resulta que det A = 0 ⇔ $m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 0}{-2} = 1$

Luego, A tiene inversa para m ≠ 1

(b) Para m = 2, encuentra la matriz X que cumple $AX - BB^t = I$, siendo B^t la matriz traspuesta de B e I la matriz identidad de orden 3.

Resolución

Según el apartado anterior, para m = 2, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, det A = $-2^2 + 2.2 - 1 = -1 \neq 0$, existe A^{-1}.

Sumando BB^t en los dos miembros de la ecuación, se tiene $AX = I + BB^t$.

Multiplicando por A^{-1}, por la izquierda, $A^{-1}AX = IX = X = A^{-1}(I + BB^t)$

Luego, $X = \frac{1}{\det A}(adjA)^t(I + BB^t) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

$$X = -\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

6.- Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx - y + 13z = 0 \\ 2x - my + 4z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \end{cases}$

(a) Encuentra los valores de m para los que el sistema tiene infinitas soluciones.

Resolución

Para que tenga infinitas soluciones debe ser cero el determinante de la matriz de coeficientes,

$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 13 \\ 2 & -m & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, puesto que si fuera det A ≠ 0, el rango de A sería 3 y el de la matriz ampliada, A*,

también sería 3, por ser un sistema homogéneo. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius,

al ser rg A = rg A* = nº de incógnitas, el sistema tendría entonces solución única.

Por tanto, det A = $-7m^2 - 4 + 26 + 13m + 14 - 4m = -7m^2 + 9m + 36 = 0$

$$m = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4(-7).36}}{2(-7)} = \frac{-9 \pm 33}{-14}\text{. Obtenemos, } m = \frac{24}{-14} = \frac{-12}{7} \quad m = 3$$

(b) Resuelve el sistema para m = 3. En este caso, ¿hay alguna solución en la que x = 10? Razona tu respuesta.

Resolución

Según el apartado anterior, para m = 3, el sistema tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 13 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3f3 - f1 \\ 2f3 - f2 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f1 : 4 \\ f2 : 5 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \; f1 = f2 \; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix},$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rg A* = 2. La matriz A* corresponde al sistema $\begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \end{cases}$.

Despejando y en la 1ª ecuación, $y = -2z$.

Despejando x en la 2ª ecuación, se tiene $x = -y - 7z = -(-2z) - 7z = -5z$

Llamando z = k, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x = -5k \\ y = -2k \\ z = k \end{cases}$, con k ∈ R

Para la 2ª parte, si en una solución fuese x = 10, entonces 10 = –5k, de donde k = –2.

De este modo, la solución del sistema sería $\begin{cases} x = 10 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$

7.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ de la que se sabe que tiene determinante 5.

(a) Calcula, indicando las propiedades que utilices, los determinantes de las matrices siguientes:

$$3\mathrm{A} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2a & d+3a & g \\ 2b & e+3b & h \\ 2c & f+3c & i \end{pmatrix}$$

Resolución

Para la primera matriz, por ser A una matriz cuadrada de orden 3, det (3A) = 3^3. det A = 27 . 5 = 135

Para la 2ª matriz, $\begin{vmatrix} 2a & d+3a & g \\ 2b & e+3b & h \\ 2c & f+3c & i \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{descomponiendo en suma de 2 determinantes}} \begin{vmatrix} 2a & d & g \\ 2b & e & h \\ 2c & f & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 3a & g \\ 2b & 3b & h \\ 2c & 3c & i \end{vmatrix}$

En el primer determinante, sacamos el factor 2 de la primera columna y el 2º determinante vale 0 por ser proporcionales las 2 primeras columnas. Se tiene, entonces:

$$2.\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{como el determinante de una matriz esigual al de su traspuesta}} 2.\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2\,.\,5 = 10$$

(b) Si B es otra matriz cuadrada de orden 3 y tiene determinante 4, calcula, indicando también las propiedades que utilices, el determinante de la matriz BA^{-1}.

Resolución

$$\det(BA^{-1}) = \det B \,.\, \det\,(A^{-1}) = \det B \;.\frac{1}{\det A} = 4\,.\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Hemos usado que el determinante del producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices y que el determinante de la matriz inversa es el inverso del determinante de la matriz.

8.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(a) Encuentra los valores de a para los que el sistema dado por AX = 2X tiene infinitas soluciones.

Resolución

Restando 2X en los dos miembros de la ecuación, se tiene AX – 2X = 0 → AX – 2IX = O.

Sacando factor común X, por la derecha, se tiene (A – 2I)X = O

Como queremos que la ecuación tenga infinitas soluciones, debe ser det(A – 2I) = 0. Porque si fuese distinto de cero entonces (A – 2I) sería invertible y la ecuación tendría una única solución, que sería X = $(\mathrm{A} - 2\mathrm{I})^{-1}$.0 = 0:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 & 1 & 1 \\ 1 & a-2 & 1 \\ 1 & 1 & a-2 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}) = (a-2)^3 + 1 + 1 - (a-2) - (a-2) - (a-2) = (a^2 - 4a + 4)(a-2) - 3a + 8 =$

$= a^3 - 2a^2 - 4a^2 + 8a + 4a - 8 - 3a + 8 = a^3 - 6a^2 + 9a = a(a^2 - 6a + 9) = a(a-3)^2 = 0 \leftrightarrow a = 0, a = 3$

(b) Para a = 0, si es posible, resuelve AX = 2X.

Resolución

Para a = 0 se tiene (A – 2I)X = O y sabemos que la ecuación matricial, o lo que es lo mismo, el sistema tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f1+2f3 \\ f3-f2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f1:3 \\ f2=f1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rg A* = 2. La matriz A* corresponde al sistema $\begin{cases} y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

Despejando y en la 1ª ecuación, $y = z$.

Despejando x en la 2ª ecuación, se tiene $x = 2y - z = 2z - z = z$

Llamando z = k, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = k \end{cases}$, con k ∈ R

9.- (prueba ordinaria) Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que a + d = 1, tienen determinante 1 y cumplen AX = XA, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Resolución

De AX = XA, sustituyendo queda $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$

Nos queda, –c = b, –d = –a . Luego, a = d, b = – c. Como a + d = 1, se tiene d + d = 1. Luego, $d = a = \frac{1}{2}$

Resulta entonces la matriz $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -c \\ c & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Ahora, puesto que det X = 1, se tiene $\frac{1}{4} + c^2 = 1$

$$c = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego, hay 2 matrices: $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

10.- (prueba extraordinaria) Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ (m+2)x+y-z=m \\ 3x+(m+2)y+z=m \end{cases}$$

(a) Discute el sistema según los valores de m.

Resolución

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada, o matriz del sistema es $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m+2 & 1 & -1 & m \\ 3 & m+2 & 1 & m \end{pmatrix}$. Como $\det A = 1-3+2(m+2)^2-6-(m+2)+(m+2)=$

$=2(m^2+4m+4)-8=2m^2+8m=2m(m+4)$, resulta que $\det A=0 \leftrightarrow m=0$ ó $m=-4$

– Si $m \neq 0\,;-4$, $\det A \neq 0$ y rg $A=3=$ rg $A^*=$ nº de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si $m=0$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene determinante nulo y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, rg $A=2$.

Por otra parte, $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; c4=0 \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=A$. O sea, rg $A^*=$ rg $A=2$.

Nótese que en este caso el sistema es homogéneo. Luego, rg $A=2=$ rg $A^*<$ nº de incógnitas.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si $m=-4$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene determinante nulo y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0$, rg $A=2$.

Por otra parte, $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}=8\neq 0$, rg $A^*=3$

Luego, rg $A=2\neq$ rg $A^*=3$. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible

(b) Resuelve el sistema, si es posible, para $m=0$.

Resolución

Para $m=0$, sabemos del apartado anterior que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Observa:\, f_3=f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; 2f_1-f_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

que corresponde al sistema $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ y+5z=0 \end{cases}$. Despejando y en la 2ª ecuación $y=-5z$.

Despejando x en la 1ª ecuación, se tiene $x=-y-2z=-(-5z)-2z=3z$

Llamando $z=k$, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x=3k \\ y=-5k \\ z=k \end{cases}$, con $k\in R$

11.- (prueba extraordinaria) Calcula, en grados, los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Resolución

Sean x, y, z los ángulos del triángulo, ordenados de mayor a menor.

Como los tres ángulos suman 180º, $x + y + z = 180$.

Según el enunciado, $z = \frac{x}{2}$, de donde $x - 2z = 0$ y $z + x = 2y$, de donde $x - 2y + z = 0$.

Nos queda el sistema $\begin{cases} x + y + z = 180 \\ x - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada, o matriz del sistema es $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Como $\det A = -2 - 2 - 1 - 4 = -9 \neq 0$, rg $A = 3$ y como A^* contiene a A y sólo tiene 3 filas, rg $A^* = 3$.

Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

Matriz del sistema: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & -1 & -3 & -180 \\ 0 & -3 & 0 & -180 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -f2 \\ f_3 : (-3) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 1 & 3 & 180 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \end{pmatrix}$

que corresponde al sistema $\begin{cases} x + y + z = 180 \\ y + 3z = 180 \\ y = 60 \end{cases}$.

Como $y = 60$, entonces $60 + 3z = 180$, de donde $z = 40$.

Por tanto, $x + 60 + 40 = 180$, $x = 80$.

Los ángulos son 80º, 60º y 40º

12.- (prueba ordinaria) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$, considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^tA = B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m.

Resolución

El sistema $X^tA = B^t$ equivale a $(X^tA)^t = (B^t)^t \to A^t(X^t)^t = B \to A^tX = B$

Matriz de coeficientes: $A^t = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $(A^t)^* = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m & 2m^2-1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 2m-1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $\det A^t = 2m - m^2 + 2m - 1 + m - 2m^3 + m^2 - 2 + m - 1 = -2m^3 + 6m - 4$, resulta que $\det A = 0 \leftrightarrow 2m^3 - 6m + 4 = 0$. Resolviendo obtenemos $m = 1$ ó $m = -2$

– Si $m \neq 1$; $m \neq -2$, $\det A^t \neq 0$ y $\text{rg } A^t = 3 = \text{rg } (A^t)^* =$ nº de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si $m = 1$, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $f3 = f2 = f1 \;\; (1 \quad 1 \quad 1)$. Luego, $\text{rg } A^t = 1$.

Por otra parte, $(A^t)^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $f3 = f2 = f1 \;\; (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$. O sea, $\text{rg } (A^t)^* = 1$.

Luego, $\text{rg } A^t = 1 = \text{rg } (A^t)^* <$ nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si $m = -2$, $A^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene determinante nulo y como $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, rg A = 2.

Por otra parte, $(A^t)^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Y como $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -54 \neq 0$, $\text{rg } (A^t)^* = 3$

Luego, $\text{rg } A^t = 2 \neq \text{rg } (A^t)^* = 3$. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible

Si lo planteamos tal y como viene dado, sería $(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2m^2-1 \quad m \quad 1)$

O sea, $((2-m)x + y + mz \quad x + my + z \quad (2m-1)x + y + z) = (2m^2-1 \quad m \quad 1)$

Que correspondería con $\begin{cases} (2-m)x + y + mz = 2m^2 - 1 \\ x + my + z = m \\ (2m-1)x + y + z = 1 \end{cases}$, que es el mismo sistema que hemos discutido antes.