
1.- Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule A^2, A^3, A^4 y deduzca la expresión de A^n, con n un número natural.

Resolución

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2-1} & 0 & 2^{2-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2-1} & 0 & 2^{2-1} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{3-1} & 0 & 2^{3-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{3-1} & 0 & 2^{3-1} \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{4-1} & 0 & 2^{4-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{4-1} & 0 & 2^{4-1} \end{pmatrix}$$

En general, $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$, siendo $n \in \mathbb{N}$.

b) Razone si existe la inversa de la matriz B.

Resolución

Sabemos que B tiene inversa sólo cuando su determinante sea no nulo.

$|B| = 0 + 0 + 2 - 4 - 0 + 1 = -1 \neq 0$. Luego, la matriz B tiene inversa

c) Razone si la ecuación matricial BX = C tiene solución y resuélvala en caso de que sea posible

Resolución

Sabemos que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene inversa pues $|B| = -1 \neq 0$.

Multiplicando por B^{-1}, por la izquierda, en los dos miembros, $B^{-1}BX = B^{-1}C$. Luego, $IX = X = B^{-1}C$

$$X = \frac{1}{\det B}(adjB)^t\, C = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -7 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2.- Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule el valor del parámetro a para que la matriz A no tenga inversa.

Resolución

Sabemos que A tiene inversa sólo cuando su determinante sea no nulo.

$|A| = 8a - 24 = 0 \leftrightarrow a = 3$. Luego, la matriz A NO tiene inversa si $a = 3$

---

b) Para a = 3, resuelva la ecuación matricial $XA - XB = C$.

Resolución

Para a = 3, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. También se tiene que $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

Sacando factor común X, por la izquierda, se tiene $X(A - B) = C$

Sea $D = A - B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Nos queda la ecuación $XD = C$.

Como $\det D = -1 \neq 0$, la matriz D tiene inversa.
Multiplicando por D^{-1}, por la derecha, en los dos miembros, $XDD^{-1} = CD^{-1} \to XI = X = CD^{-1}$

$$X = C\frac{1}{\det D}(adjD)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Para a = 3, compruebe que $A^2 = 11A$ y exprese A^8 en función de la matriz A.

Resolución

Para a = 3, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.11 & 4.11 \\ 6.11 & 8.11 \end{pmatrix} = 11\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = 11A$

Observa que $A^4 = (A^2)^2 = (11A)^2 = 11^2A^2 = 11^2 11A = 11^3A$

Luego, $A^8 = (A^4)^2 = (11^3A)^2 = 11^6A^2 = 11^6.11A = 11^7A = 19487171\ A$

3.- Se considera la ecuación matricial $(10I_3 - A)X = B$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y B es una matriz con tres filas y una columna.

a) Razone qué dimensión ha de tener la matriz X.

Resolución

Como $(I_3)_{3\,x\,3}$ entonces $(10I_3)_{3\,x\,3}$; $A_{3\,x\,3}$, luego $(10I_3 - A)_{3\,x\,3}$

Si $X_{m\,x\,n}$, entonces $(10I_3 - A)_{3\,x\,3}X_{m\,x\,n} = B_{3\,x\,1}$. Por tanto, m = 3 y n = 1. Luego, X es de orden 3 x 1

b) ¿Tiene solución la ecuación matricial anterior para cualquier matriz B de orden 3×1? ¿Por qué?

Resolución

$Sea\ C = 10I_3 - A = 10\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Nos queda la ecuación $CX = B$.

Como $\det C = 320 + 0 + 0 - 0 - 20 - 0 = 300 \neq 0$, la matriz C tiene inversa.

Multiplicando por C^{-1}, por la izquierda, en los dos miembros, $C^{-1}CX = C^{-1}B \Rightarrow IX = X = C^{-1}B$.

Luego la ecuación tiene solución

---

c) Resuelva dicha ecuación matricial si $B = (5 \quad 20 \quad -3)^t$.

Resolución

Como según b) $X = C^{-1}B$, se tiene que $X = \frac{1}{\det C}(adjC)^t B = \frac{1}{300}\begin{pmatrix} 40 & 20 & 24 \\ 5 & 40 & 18 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix}^t (5 \quad 20 \quad -3)^t$

$X = \frac{1}{300}\begin{pmatrix} 40 & 5 & 0 \\ 20 & 40 & 0 \\ 24 & 18 & 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{300}\begin{pmatrix} 200+100+0 \\ 100+800+0 \\ 120+360-180 \end{pmatrix} = \frac{1}{300}\begin{pmatrix} 300 \\ 900 \\ 300 \end{pmatrix}$. Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.- Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^{40} y $(A^t)^{30}$.

Resolución

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

En general, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$, siendo $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, $A^{40} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -40 & 1 \end{pmatrix}$, $(A^t)^{30} = (A^{30})^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -30 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -30 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Calcule $(A^{-1} + A)^2$.

Resolución

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adjA)^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2I$.

Luego, $(A^{-1} + A)^2 = (2I)^2 = 4I^2 = 4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

c) Resuelva la ecuación matricial $(A^t + I_2)X = A^t - I_2$.

Resolución

$B = A^t + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $C = A^t - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nos queda $BX = C$. Como $\det B = 4 \neq 0$, existe B^{-1}.

Multiplicando por B^{-1}, por la izquierda, en los dos miembros, $B^{-1}BX = B^{-1}C \Rightarrow IX = X = B^{-1}C$

$X = \frac{1}{\det B}(adjB)^t C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5.- (prueba ordinaria) Se consideran la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con m un parámetro real.

a) ¿Para qué valores del parámetro m existe la matriz inversa de A?

Resolución

Para que exista la inversa el determinante debe ser no nulo.

det A = $2 + 3m - 2m^2 + 3 = -2m^2 + 3m + 5 = 0$, $m = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4.(-2).5}}{2.(-2)} = \frac{-3 \pm 7}{-4} \Rightarrow \begin{matrix} m = -1 \\ m = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \end{matrix}$

Luego, para $m \neq -1, m \neq \frac{5}{2}$ la matriz A tiene inversa

b) (1,8 puntos) Para m = 2, resuelva la ecuación matricial $XA - A^2 = I_3$.

Resolución

Para m = 2, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; det A = $2 + 6 - 8 + 3 = 3 \neq 0$. Luego, existe A^{-1}.

Como $XA - A^2 = I_3$, sumando A^2 en los dos miembros, $XA = A^2 + I_3$.

Multiplicando por A^{-1} por la derecha:

$XAA^{-1} = (A^2 + I_3).A^{-1} \Rightarrow X.I_3 = (A^2 + I_3).A^{-1} \Rightarrow X = AA\,A^{-1} + I_3\,A^{-1} = A\,I_3 + I_3\,A^{-1} = A + A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A}(adjA)^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -6 & -4 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{5}{3} & 0 & 2 - \frac{1}{3} \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 - \frac{4}{3} & 0 & 1 + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ -2 & 1 & -2 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

6.- (prueba extraordinaria) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$

a) Determine para qué valores del parámetro a, la matriz A tiene inversa.

Resolución

Sabemos que A tiene inversa sólo cuando su determinante sea no nulo.

$|A| = 0 + 0 + 0 - 0 - a - 8 = -a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = -8$. Luego, la matriz A tiene inversa si $a \neq -8$

b) Para a = 1, calcule la inversa de A.

Resolución

Sabemos que A tiene inversa, porque $a \neq -8$. Además, para a = 1, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y det A = $-1 - 8 = -9$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adjA)^t = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}^t = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{-2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

---

c) Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $AX = B^t$, siendo $B = (0\ \ 1\ \ -1)$.

Resolución

Para $a = 1$ sabemos que A tiene inversa. Multiplicando por $A^{-1} = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, por la izquierda,

en los dos miembros, $A^{-1}AX = A^{-1}B^t$ Luego, $IX = X = A^{-1}B^t = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$X = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} 0-1-2 \\ 0+2+4 \\ 0-4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$