1.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 5.

a) Calcula razonadamente el determinante de $2A^3$.

Resolución

$$\det(2A^3) \xrightarrow{(1)} 2^3.(\det A^3) \xrightarrow{(2)} 2^3[\det A]^3 \xrightarrow{(3)} 8\,.\,125 = 1000.$$

(1) $\det(kA) = k^n \det A$, siendo $k \in R$ y n el orden de la matriz A

(2) $\det(A^n) = [\det A]^n$, siendo n un natural. (3) Por el enunciado, $\det A = 5$

b) Calcula razonadamente los determinantes $\begin{vmatrix} 2a & -1 & 3 \\ 2b & \frac{1}{2} & 3 \\ 2c & \frac{-1}{2} & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+4 & b-2 & c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$

Resolución

$$\begin{vmatrix} 2a & -1 & 3 \\ 2b & \frac{1}{2} & 3 \\ 2c & \frac{-1}{2} & 3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{\Rightarrow} 2.3 \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ b & \frac{1}{2} & 1 \\ c & \frac{-1}{2} & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{\Rightarrow} 2.3.\frac{1}{-2} \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{\Rightarrow} -3.5 = -15$$

(1) Sacamos el factor 2 de la 1ª columna y el factor 3 de la última columna

(2) Multiplicamos por (–2) la 2ª columna y para que el valor no varíe multiplicamos por $\frac{1}{-2}$

(3) Por el enunciado sabemos que $\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+4 & b-2 & c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} a & a+4 & a+1 \\ b & b-2 & b+1 \\ c & c+2 & c+1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} a & a+4 & 1 \\ b & b-2 & 1 \\ c & c+2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ b & b & 1 \\ c & c & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ b & -2 & 1 \\ c & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} 0 + 2\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(5)}{\Rightarrow} 0 + 2.5 = 10$$

(1) El determinante de la matriz es igual que el de su traspuesta

(2) Sustituimos la 3ªc por 3ªc – 1ªc

(3) Descomponemos en suma de 2 determinantes, usando la 2ª columna

(4) El 1er sumando es nulo por ser iguales la 1ª y 2ª columnas y en el 2º sumando sacamos el factor 2 de la 2ª columna

(5) Por el enunciado sabemos que $\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$

2.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + my + mz = 1 \\ x + 2my + (m+1)z = 1 \\ 2x + my + mz = 2 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores de m.

Resolución

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 2m & m+1 \\ 2 & m & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada, o matriz del sistema es $A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & m & 1 \\ 1 & 2m & m+1 & 1 \\ 2 & m & m & 2 \end{pmatrix}$.

Como det A $= 2m^2 + 2m^2 + 2m + m^2 - 4m^2 - m^2 - m^2 - m = -m^2 + m =$

$= m(-m+1)$, resulta que det A $= 0 \Leftrightarrow m = 0$ ó $m = 1$

- Si $m \neq 0$; $m \neq 1$, det A $\neq 0$ y rg A $= 3 =$ rg A* $=$ nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

- Si $m = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $c2 = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rg A $= 2$.

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $c2 = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $f3 = f1 + f2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rg A* $= 2$.

Luego, rg A $= 2 =$ rg A* $<$ nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

- Si $m = 1$, det A $= 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rg A $= 2$.

Por otra parte, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rg A* $= 2$.

Luego, rg A $= 2 =$ rg A* $<$ nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema también es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b) Resuelve el sistema, si es posible, para m = 1.

Resolución

Para m = 1, sabemos del apartado anterior que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f2 - f1 \\ f3 - 2f1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $f3 = -f2$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

que corresponde al sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$.

Despejando y en la 2ª ecuación $y = -z$. Despejando x en la 1ª ecuación, se tiene $x = 1 - y - z = 1 - (-z) - z = 1$

Llamando z = k, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x = 1 \\ y = -k \\ z = k \end{cases}$, con k ∈ R

3.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & m & m \\ m & m+1 & m \\ m & m & m+2 \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de m existe la inversa de la matriz A? Razona la respuesta.

Resolución

Sabemos que A tiene inversa sólo cuando el determinante sea no nulo.

$\det A = m(m+1)(m+2) + m^3 + m^3 - m^2(m+1) - m^3 - m^3 - 2m^2 = m(m+1)(m+2-m) - 2m^2$

Operando y simplificando, $\det A = 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$. Luego, la matriz A tiene inversa para $m \neq 0$

b) Para m = 1, halla $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}$

Resolución

Para m = 1, sabemos que det A = 2.1 = 2. Por otra parte, $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Usando que $\det(kA) = k^n \det A$, siendo $k \in R$ y n el orden de una matriz A, se tiene que

$$det\left(\frac{1}{2}A\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \det A = \frac{1}{8}.2 = \frac{1}{4} \neq 0.$$

Luego, la matriz $\frac{1}{2}A$ tiene inversa y $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} A^{-1} = 2A^{-1}$

$$\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} = 2\frac{1}{\det A}(adjA)^t = 2\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.- En una cafetería, tres cafés, una tostada y dos zumos de naranja cuestan 7,50 €. Cuatro cafés, una tostada y un zumo de naranja cuestan 7,20 €.

a) Calcula, de forma razonada, el precio total de dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja.

Resolución

Sean x, y, z los precios por unidad del café, tostada y zumo, respectivamente.

Como 3 cafés, 1 tostada y 2 zumos de naranja cuestan 7,50 €, entonces $3x + 1y + 2z = 7{,}50$.

Como 4 cafés, 1 tostada y 1 zumo de naranja cuestan 7,20 €, entonces $4x + 1y + 1z = 7{,}20$.

Sea p el precio de 2 cafés, 1 tostada y 3 zumos de naranja. Entonces $2x + 1y + 3z = p$.

Nos queda el sistema $\begin{cases} 3x + y + 2z = 7{,}50 \\ 4x + y + z = 7{,}20 \\ 2x + y + 3z = p \end{cases}$

Matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; matriz ampliada, o del sistema: $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 7{,}50 \\ 4 & 1 & 1 & 7{,}20 \\ 2 & 1 & 3 & p \end{pmatrix}$.

Como $\det A = 9 + 2 + 8 - 4 - 12 - 3 = 0$ y $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rg A = 2, para poder calcular lo que se pide el sistema debe ser compatible.

Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius debe ser rg A* también 2.

Esto significa que, por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7{,}50 \\ 1 & 1 & 7{,}20 \\ 1 & 3 & p \end{vmatrix} = 0$ pues de lo contrario rg A* sería 3.

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7{,}50 \\ 1 & 1 & 7{,}20 \\ 1 & 3 & p \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7{,}50 \\ 0 & -1 & -0{,}30 \\ 0 & 1 & p - 7{,}50 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -0{,}30 \\ 1 & p - 7{,}50 \end{vmatrix} = -p + 7{,}50 + 0{,}30 = 7{,}80 - p$$

Resolviendo obtenemos p = 7,80. Conclusión: 2 cafés, 1 tostada y 3 zumos de naranja cuestan 7,80 €

---

b) ¿El precio de un zumo de naranja podría ser de 2 €? Razona la respuesta.

Resolución

Si el precio de un zumo de naranja fuese 2 € entonces z = 2.

Nos quedaría el sistema $\begin{cases} 3x + y + 2.2 = 7{,}50 \\ 4x + y + 2 = 7{,}20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + y = 3{,}50 \\ 4x + y = 5{,}20 \end{cases}$.

Restando las ecuaciones obtenemos x = 1,7.

Sustituyendo, por ejemplo en la 1ª ecuación se tiene 3.1,7 + y = 3,50 ; y = –1,6

Imposible, pues el precio de una tostada no puede ser negativo

Conclusión: El precio de un zumo de naranja NO puede ser de 2 €

5.- (prueba extraordinaria) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$.

Resolución

Multiplicando por A, por ejemplo, por la derecha, la igualdad que hay que comprobar es $A^3 = -A^{-1}A = -I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$. Así que queda probado.

b) Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica $A^4X + B = AC$.

Resolución

Restando B en los dos miembros de la ecuación, se tiene $A^4X = AC - B$.

Por otra parte, como según el apartado anterior $A^3 = -I$, entonces $A^4 = A^3A = -IA = -A$
Nos queda la ecuación $-AX = AC - B \Rightarrow AX = B - AC$

Multiplicando por A^{-1}, por la izquierda, $A^{-1}AX = IX = X = A^{-1}(B - AC)$

Como $A^{-1} = -A^2$, entonces $X = (-A^2)(B - AC) = -A^2B + A^3C = -A^2B - IC = -A^2B - C$

Luego, $X = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 19 \\ 2 & -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$

6.- (prueba extraordinaria) Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta.

Resolución

Sean x, y, z el nº de viajes semanales por las rutas A, B y C, respectivamente.

- El total de viajes es 70 → x + y + z = 70.

- El nº de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C ⇒ y = x + z.

- El doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70 ⇒ 2(x + z) = 70

Nos queda el sistema $\begin{cases} x+y+z=70 \\ y=x+z \\ 2(x+z)=70 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=70 \\ x-y+z=0 \\ x+z=35 \end{cases}$

Matriz de coeficientes: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; Matriz ampliada, o del sistema: $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 35 \end{pmatrix}$

Como det A = –1 + 1 + 1 – 1 = 0 y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, rg A = 2.

$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 35 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2-f_1 \\ f_3-f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -2 & 0 & -70 \\ 0 & -1 & 0 & -35 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2=2f_1 \\ -3f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 0 & 35 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rg A* = 2.

Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Por tanto, al haber infinitas soluciones NO podemos deducir el número de viajes por cada ruta

b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta?

Resolución

El doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5 ⇒ 2z = y – 5

Nos queda el sistema $\begin{cases} x+y+z=70 \\ y=x+z \\ 2z=y-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=70 \\ x-y+z=0 \\ y-2z=5 \end{cases}$

Matriz de coeficientes: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; Matriz ampliada, o del sistema: $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Como det A = 2 + 1 + 2 – 1 = 4 ≠ 0 , rg A = 3 y como A* contiene a A y sólo tiene 3 filas, rg A* = 3.
Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

Matriz del sistema: $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} f_2-f_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -2 & 0 & -70 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} f_2:(-2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

que corresponde al sistema $\begin{cases} x+y+z=70 \\ y=35 \\ y-2z=5 \end{cases}$.

Resolviendo, 35 – 2z = 5, de donde z = 15 ; x + 35 + 15 = 70, de donde x = 20

Respuesta: hace 20 viajes semanales por la ruta A, 35 por la ruta B y 15 por la C

7.- Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 3x-y-2z=0 \\ -x+2y+mz=0 \end{cases}$

a) Calcula m para que el sistema tenga infinitas soluciones y hállalas.

Resolución

Matriz de coeficientes: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & m \end{pmatrix}$; Matriz ampliada o del sistema: $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & m & 0 \end{pmatrix}$

Como queremos que tenga infinitas soluciones debe ser det A = 0 porque de lo contrario rg A sería 3 y al ser un sistema homogéneo rg A* = 3 = nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema sería compatible determinado, con solución única.

det A = –m + 2 + 12 – 2 + 4 – 3m = –4m + 16 = 0 ⇔ m = 4.

Luego, para m = 4 el sistema tiene infinitas soluciones. En este caso la matriz del sistema es

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2-3f_1 \\ f_3+f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2:(-4) \\ f_3:3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} f_3=f_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

que corresponde al sistema $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$.

Despejando: $y=-2z$; $x=-y-2z=-(-2z)-2z=0$

Llamando z = k, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x=0 \\ y=-2k \\ z=k \end{cases}$, con k ∈ R

b) Para m = 2, ¿existe alguna solución tal que z = 1? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Resolución

Al ser un sistema homogéneo y ser m = 2 ≠ 4 el sistema es compatible determinado y su única solución es la solución trivial, x = 0, y = 0, z = 0. Por tanto, la respuesta es negativa

8.- Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 2.

a) Calcula razonadamente $\left|\frac{1}{3}A^{-1}A^t\right|$.

Resolución

$$\left|\frac{1}{3}A^{-1}A^t\right|=\left(\frac{1}{3}\right)^3|A^{-1}||A^t|=\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{|A|}|A|=\frac{1}{27}$$

Hemos usado:

- |kX| = k^n|X|, siendo k ∈ R y n el orden de la matriz X

- |XY| = |X| |Y|, siendo X e Y matrices cuadradas del mismo orden.

- $|X^{-1}|=\frac{1}{|X|}$, siendo X una matriz invertible

- $|X^t|$ = |X|, siendo X una matriz cuadrada

---

b) Calcula razonadamente los determinantes $\begin{vmatrix} 6c & 2b & 2a \\ 3f & e & d \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

Resolución

$$\begin{vmatrix} 6c & 2b & 2a \\ 3f & e & d \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{\Rightarrow} - \begin{vmatrix} 2a & 2b & 6c \\ d & e & 3f \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} \overset{(2)}{\Rightarrow} -2.3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{(3)}{\Rightarrow} -2.3.2 = -12$$

(1) Intercambiamos las columnas C1 y C3 y el determinante cambia de signo

(2) Sacamos el factor 2 de la 1ª fila y el factor 3 de la última columna

(3) Por el enunciado sabemos que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$

$$\begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ 2-4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 2a & c & b \\ 2d & f & e \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2b & c & b \\ 2e & f & e \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{(3)}{\Rightarrow} 2 \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} - 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} -2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{(5)}{\Rightarrow} -2.2 = -4$$

(1) Expresamos –2 = 2 – 4

(2) Descomponemos en resta de 2 determinantes, usando la 1ª columna

(3) En el 1er determinante sacamos el factor 2 de la 1ª columna; el 2º determinante es nulo por ser proporcionales la 1ª y 3ª columnas

(4) Intercambiamos las columnas C2 y C3 y el determinante cambia de signo

(5) Por el enunciado sabemos que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$

9.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Estudia, según los valores de λ, el rango de la matriz A − λI, siendo I la matriz identidad de orden tres.

Resolución

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}.$$

$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2(4-\lambda) - 2 - (2-\lambda) = (2-\lambda)^2(4-\lambda) - 4 + \lambda = (4 - 4\lambda + \lambda^2)(4-\lambda) - 4 + \lambda =$

$= 16 - 4\lambda - 16\lambda + 4\lambda^2 + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 4 + \lambda = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0$

Factoricemos haciendo uso de la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 8 & -19 & 12 \\ 1 & \downarrow & -1 & 7 & -12 \\ \hline & -1 & 7 & -12 & 0 \end{array}$$

. Nos queda $(\lambda - 1)(-\lambda^2 + 7\lambda - 12) = 0$, de donde $\lambda = 1$ ó $-\lambda^2 + 7\lambda - 12 = 0$

$$\lambda = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4.(-1)(-12)}}{2.(-1)} = \frac{-7 \pm 1}{-2} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = 3 \\ \lambda = 4 \end{matrix}$$

- Si $\lambda \neq 1, \lambda \neq 3, \lambda \neq 4$, $\det(A - \lambda I) \neq 0$ y $rg(A - \lambda I) = 3$

- Si $\lambda = 1$, $\det(A - \lambda I) = 0$ y $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $rg(A - \lambda I) = 2$

- Si $\lambda = 3$, $\det(A - \lambda I) = 0$ y $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $rg(A - \lambda I) = 2$

- Si $\lambda = 4$, $\det(A - \lambda I) = 0$ y $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, $rg(A - \lambda I) = 2$

b) Resuelve el sistema $(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y halla, si existe, una solución en la que x = 2.

Resolución

En este caso, λ = 1. Al ser 2 el rango de la matriz de coeficientes y ser un sistema homogéneo hay infinitas soluciones.

La matriz del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{f_2 + f_1}{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{f_3 = f_2}{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

que corresponde al sistema $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$.

Despejando y en la 2ª ecuación $y = -3z$; despejando x en la 1ª ecuación, se tiene $x = -2z$

Llamando z = k, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x = -2k \\ y = -3k \\ z = k \end{cases}$, con $k \in R$

10.- Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & m & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\\ m & -1\end{pmatrix}$.

a) Calcula m para que AB no tenga inversa.

Resolución

Sabemos que AB tiene inversa sólo cuando el determinante sea no nulo.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & m & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\\ m & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ m+1 & 2m\end{pmatrix}$$

det (AB) = 2m + m + 1 = 3m + 1 = 0 $\Leftrightarrow m=\frac{-1}{3}$. Luego, la matriz AB NO tiene inversa para $m=\frac{-1}{3}$

b) Estudia el rango de la matriz BA según los valores de m.

Resolución

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\\ m & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & m & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & m-1 & 1\\ 2 & 2m & 2\\ m-1 & -2m & -1\end{pmatrix}.$$

Como det (BA) = –4m + 2(m – 1)^2 – 4m – 2m(m – 1) + 8m + 2(m – 1) =

= –4m + 2(m^2 – 2m + 1) – 4m – 2m^2 + 2m + 8m + 2m – 2 = 0, rg (BA) < 3.

Como el menor $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$ resulta que rg (BA) = 2 independientemente de los valores de m

11.- (prueba ordinaria) Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx+2y-z=1\\ 5x-4y+2z=0\\ x+3my+mz=m+\frac{2}{5}\end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores de m.

Resolución

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}m & 2 & -1\\ 5 & -4 & 2\\ 1 & 3m & m\end{pmatrix}$ Matriz ampliada o del sistema $A^*=\begin{pmatrix}m & 2 & -1 & 1\\ 5 & -4 & 2 & 0\\ 1 & 3m & m & m+\frac{2}{5}\end{pmatrix}$

Como det A = –4m^2 + 4 – 15m – 4 – 10m – 6m^2 = –10m^2 – 25m = m(–10m – 25), resulta que det A = 0 $\Leftrightarrow$ m = 0 ó $m=\frac{-5}{2}$

- Si m ≠ 0 ; $m\neq\frac{-5}{2}$, det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A* = nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

- Si m = 0, det A = 0 y $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 5 & -4 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix}0 & 2\\ 5 & -4\end{vmatrix}=-10\neq 0$, rg A = 2.

$$A^*=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1 & 1\\ 5 & -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5}\end{pmatrix}5f_3\begin{pmatrix}0 & 2 & -1 & 1\\ 5 & -4 & 2 & 0\\ 5 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}c_2=-2f_1\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 5 & 2 & 0\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix}f_2-f_3\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

que es una matriz de determinante nulo y como el menor $\begin{vmatrix}0 & 2\\ 5 & 0\end{vmatrix}=-10\neq 0$, rg A* = 2.

Luego, rg A = 2 = rg A* < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

- Si $m = \frac{-5}{2}$, det A = 0, $A = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & \frac{-15}{2} & \frac{-5}{2} \end{pmatrix}$, que como $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ \frac{-15}{2} & \frac{-5}{2} \end{vmatrix} = 25 \neq 0$, rg A = 2.

$$A^* = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & \frac{-15}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-21}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} 2f_1 \\ \\ 2f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -15 & -5 & -21 \end{pmatrix} f_2 + f_1 \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -15 & -5 & -21 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -15 & -5 & -21 \end{vmatrix} = 100 \neq 0$, rg A* = 3.

Luego, rg A = 2 ≠ 3 rg A*. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible, no tiene solución.

b) Resuelve el sistema para m = 0. ¿Hay alguna solución en la que x = 0? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Resolución

Para m = 0, sabemos del apartado anterior que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} 5f_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 - f_3 \\ 2f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} f_2 = -2f_1 \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que corresponde al sistema $\begin{cases} 2y - z = 1 \\ 5x = 2 \end{cases}$.

Despejando z en la 1ª ecuación $z = 2y - 1$ y despejando x en la 2ª ecuación, $x = \frac{2}{5}$

Llamando y = k, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = k \\ z = 2k - 1 \end{cases}$, con k ∈ R.

Como $x = \frac{2}{5}$ en ninguna solución la x = 0

12.- (prueba ordinaria) En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas.
Por último, se sabe que, por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. ¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

Resolución

Sean x, y, z el nº de botellas, garrafas y bidones que se producen cada hora, respectivamente.

- La cantidad de materia prima es 10 kg = 10000 g, por hora ⇒ 50x + 100y + 1000z = 10000.

- Se debe producir el doble de botellas que de garrafas, por hora ⇒ x = 2y.

- Se producen en total 52 productos, por hora ⇒ x + y + z = 52

Nos queda el sistema $\begin{cases} 50x + 100y + 1000z = 10000 \\ x = 2y \\ x + y + z = 52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 20z = 200 \\ x - 2y = 0 \\ x + y + z = 52 \end{cases}$

Matriz de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 20 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; Matriz ampliada o del sistema: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 20 & 200 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 52 \end{pmatrix}$

Se tiene que det A = –2 + 0 + 20 + 40 – 2 – 0 = 56 ≠ 0. Luego, rg A = 3 = rg A* = nº de incógnitas.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 20 & 200 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 52 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 20 & 200 \\ 0 & -4 & -20 & -200 \\ 0 & -1 & -19 & -148 \end{pmatrix}$$

Dividimos la 2ª fila entre –4 y la 3ª entre –1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 20 & 200 \\ 0 & 1 & 5 & 50 \\ 0 & 1 & 19 & 148 \end{pmatrix} f_3 - f_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 20 & 200 \\ 0 & 1 & 5 & 50 \\ 0 & 0 & 14 & 98 \end{pmatrix}$

que corresponde al sistema $\begin{cases} x + 2y + 20z = 200 \\ y + 5z = 50 \\ 14z = 98 \end{cases}$.

Resolviendo: z = 98:14 = 7 ; y + 5.7 = 50, de donde y = 15 ; x + 2.15 + 20.7 = 200, de donde x = 30

Respuesta: se producen cada hora 30 botellas, 15 garrafas y 7 bidones