

1.- Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) Razone si se pueden efectuar las siguientes operaciones y realice las que sean posibles:

$$CA, A+B, C^t B^t.$$

Resolución

$C_{3 \times 1}, A_{3 \times 3} \Rightarrow$ No se puede efectuar CA porque el nº de columnas de C no coincide con el nº de filas de A

$A_{3 \times 3}, B_{3 \times 3} \Rightarrow$ Se puede efectuar $A+B$ por tener el mismo orden A y B .

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_{1 \times 3}^t, B_{3 \times 3}^t \Rightarrow$ Se puede efectuar $C^t B^t$ porque el nº de columnas de C^t coincide con el nº de filas de B^t .

$$C^t B^t = (3 \quad -7 \quad -2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (8 \quad 6 \quad 8)$$

b) Resuelva la ecuación matricial $AX = BX + C$.

Resolución

Trasponiendo términos, $AX - BX = C$. Sacando factor común X , por la derecha, $(A - B)X = C$.

Llamamos $D = A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y queda $DX = C$

Como $\det D = 2 \neq 0$, existe D^{-1} . Multiplicando por D^{-1} , por la izquierda, $D^{-1}DX = D^{-1}C$, $X = D^{-1}C$

$$X = \frac{1}{\det D} (\text{adj} D^t) C = \frac{1}{2} \left[\text{adj} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -23 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-23}{2} \\ 3 \\ \frac{-7}{2} \end{pmatrix}.$$

2.- Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

a) Resuelva la siguiente ecuación matricial $A^t - XA = 3I_3$.

Resolución

Trasponiendo términos, $XA = A^t - 3I_3$. Como $\det A = -28 + 120 - 10 - 72 = 10 \neq 0$, existe A^{-1} .

Multiplicando por A^{-1} , por la derecha, $XAA^{-1} = (A^t - 3I_3)A^{-1}$, $X = (A^t - 3I_3)A^{-1}$.

$$X = \left[\begin{pmatrix} 7 & 3 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{\det A} (\text{adj} A^t) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \text{adj} \begin{pmatrix} 7 & 3 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -24 & -22 \\ -8 & -18 & -34 \\ 5 & 30 & 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -65 & -300 & -315 \\ 40 & 180 & 200 \\ -59 & -234 & -267 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-13}{2} & -30 & \frac{-63}{2} \\ 4 & 18 & 20 \\ \frac{-59}{10} & \frac{-117}{5} & \frac{-267}{10} \end{pmatrix}$$

b) ¿Existe algún valor del parámetro a para el que se verifique $C^t D = B$? En caso afirmativo, calcule dicho valor.

Resolución

Sabemos que $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

$$C^t D = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 2 & 2 & -1 - 2a \\ 2a^2 - 3 & 3 & -2 - 3a \\ -a^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando los términos correspondientes, $\begin{cases} a^2 - 2 = 2 \\ -1 - 2a = 3 \\ 2a^2 - 3 = 5 \\ -2 - 3a = 4 \\ -a^2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ a = -2 \\ a^2 = 4 \\ a = -2 \\ a^2 = -4 \end{cases}$. Por tanto, si existe y es $a = -2$.

3.- Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -a-1 \\ -1 & a & a+1 \\ 1 & -3 & -a \end{pmatrix}$ donde a es un número real. Determine de manera justificada:

a) Los valores de a para los que la matriz A tiene inversa.

Resolución

$$\det A = -2a^2 - 3a - 3 - 3a - 3 + a^2 + a + 6a + 6 + 3a = -a^2 + 4a = a(4 - a) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ó } a = 4.$$

Luego, para $a \neq 0$ y $a \neq 4$ la matriz A tiene inversa.

b) Las matrices A^2 , A^3 y A^{2022} para $a = 4$.

Resolución

Para $a = 4$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A$

$$A^3 = A^2 A = A A = A^2 = A. \text{ En general, } A^n = A. \text{ Luego, } A^{2022} = A$$

c) La matriz X que verifica que $XA = I_3$ para $a = 3$.

Resolución

Para $a = 3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; $\det A = 3(4 - 3) = 3 \neq 0$, existe A^{-1} .

Multiplicando por A^{-1} por la derecha, $XAA^{-1} = I_3 A^{-1}$

$$X = A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj} A^t) = \frac{1}{3} \text{adj} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.- Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 8 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) Determine los valores de a para que la matriz A sea no invertible.

Resolución

Desarrollando por la última columna, $\det A = a(a^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow a = 0, a = 4 \text{ ó } a = -4$.

Luego, para $a = 0, a = 4 \text{ ó } a = -4$ la matriz A es no invertible.

b) Para $a = 5$, calcule la inversa de la matriz A .

Resolución

Para $a = 5$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $\det A = 5(5^2 - 16) = 45 \neq 0$, existe A^{-1} .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj} A^t) = \frac{1}{45} \text{adj} \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 25 & -10 & 0 \\ -40 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} & 0 \\ \frac{-8}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

c) Para $a = 5$, resuelva la ecuación matricial $AX = B$.

Resolución

Multiplicando por A^{-1} por la izquierda, $X = A^{-1}AX = A^{-1}B = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 25 & -10 & 0 \\ -40 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 45 \\ -90 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

5.- (prueba ordinaria) Se considera las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) Halle los valores del parámetro a para que la matriz A tenga inversa.

Resolución

$\det A = a^2 + 3 - 4a = a^2 - 4a + 3 = 0$; $a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$, $a = 3 \text{ ó } a = 1$.

Luego, para $a \neq 3$ y $a \neq 1$ la matriz A tiene inversa.

b) (0,75 puntos) Para $a = 2$, calcule la matriz inversa de A .

Resolución

Para $a = 2$, sabemos que A tiene inversa. Además, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\det A = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj} A^t) = \frac{1}{-1} \text{adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

c) Para $a = 2$, resuelva la ecuación matricial $XA + I_3 = B^tC$.

Resolución

Restando I_3 se tiene $XA = B^tC - I_3$. Multiplicando por A^{-1} , por la derecha, $XAA^{-1} = X = (B^tC - I_3)A^{-1}$

$$\text{Luego, } X = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \quad 3 \quad -1) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -28 & -21 & 19 \\ 16 & 12 & -11 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.- (prueba extraordinaria) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Determine la matriz X que verifica $AX + B = A^2C$.

Resolución

De $AX + B = A^2C$, resulta $AX = A^2C - B$. Como $\det A = 4 - 2 + 1 = 3 \neq 0$, existe A^{-1} y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj} A^t) = \frac{1}{3} \text{adj} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por A^{-1} , por la izquierda, $A^{-1}AX = A^{-1}(A^2C - B)$, $X = A^{-1}(A^2C - B)$

$$A^2C - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 11 & -16 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -17 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto, } X = A^{-1}(A^2C - B) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -17 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & 19 \\ -13 & 10 \\ 10 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{3} & \frac{19}{3} \\ \frac{-13}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{-13}{3} \end{pmatrix}$$

b) Determine las dimensiones de dos matrices P y Q sabiendo que $AP^t + C = C(QB)$.

Resolución

$A_{3 \times 3}$, $P_{m \times n}$; $(P^t)_{n \times m} \Rightarrow$ para poder hacer el producto AP^t debe ser $n = 3$ y quedaría $(AP^t)_{3 \times m}$

Por otra parte, como $C_{3 \times 2}$ para poder hacer la suma $AP^t + C$ debe ser $m = 2$. Por tanto, $P_{2 \times 3}$

Nos quedaría entonces $(AP^t + C)_{2 \times 3}$.

En el 2º miembro, $C_{3 \times 2}$, $Q_{p \times q}$, $B_{3 \times 2}$. Para poder hacer los productos debe ser $p = 2$, $q = 3 \Rightarrow Q_{2 \times 3}$

Y el orden del producto del 2º miembro sería $[C(QB)]_{3 \times 2}$ con lo que los dos miembros tienen igual orden.

Conclusión: $P_{2 \times 3}$ y $Q_{2 \times 3}$.