

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

➢ Responde en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen.

Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2,5 puntos.

➢ Indica en el pliego del examen la agrupación de preguntas que responderás: agrupaciones de

preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la anulación de la(s) ultima(s) pregunta(s)

seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1.- Sean las matrices , , y

a) [1 punto] Si , plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas

por x e y) en función del parámetro m.

**Resolución**

 .

Operando,

 . Igualando queda el sistema

b) [1,5 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es

siempre única? Resuelve el sistema para m = –2.

**Resolución**

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = 1 – m2 = 0 ⇔ m = –1 ó m = 1

– Si m ≠ 1 y m ≠ –1, rg A = 2 = rg A\* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si m = –1, la matriz del sistema es .

La 2ª fila corresponde a la ecuación 0 = 2, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

– Si m = 1, la matriz del sistema es , que corresponde a la

ecuación x + y = 1. Despejando, x = 1– y. Llamando y = k, las infinitas soluciones son , k ∈ R.

Conclusión: El sistema tiene solución para m ≠ –1. Si además m ≠ 1 la solución es única y, en cambio,

si m = 1 hay infinitas soluciones

Para m = 2, sabemos que el sistema es compatible determinado, tiene solución única. Resolvámoslo:

La matriz del sistema es ,

que corresponde al sistema ; x = 1 + 2y = 1 + 2(–1) = –1.

La solución es x = y = –1

Pregunta 2.- Los medios utilizados para realizar la publicidad al lanzar un nuevo producto, así como los

costes y la audiencia estimada por anuncio se muestra a continuación:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | TELEVISIÓN | RADIO |
| Audiencia por anuncio | 100000 | 18000 |
| Coste por anuncio | 2100 € | 300 € |

Para lograr un uso balanceado de los medios, los anuncios en radio deben ser al menos el 50% de los

anuncios totales y los anuncios en televisión deben ser al menos el 10% de los anuncios totales.

Por otro lado, se tiene que el presupuesto total para anuncios se ha limitado a 24000 €.

a) [1,75 puntos] ¿Cuantos anuncios de cada tipo se pueden hacer? Plantea el problema y representa

gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían hacerse 10 anuncios en televisión y 20 en radio?

b) [0,75 puntos] Si el objetivo es maximizar la audiencia total, ¿cuántos anuncios de cada tipo se deben

hacer? ¿Cuánta audiencia total habría en ese caso?

**Resolución**

a) Representamos en una tabla los datos del problema:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **nº de anuncios** | **nº de oyentes** | **coste (en €)** |
| **anuncios en TV** | x | 100000x | 2100x |
| **anuncios en radio** | y | 18000y | 300y |
| **total** | x + y | 100000x + 18000y | 2100x + 300y |

Las restricciones son

La función a optimizar (maximizar) es la audiencia f(x, y) = 100000x + 18000y

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x – y ≤ 0 → Recta: x – y = 0x = 0, 0 – y = 0, y = 0y = 10, x – 10 = 0, x = 10

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | 0 | 10 |
| y | 0 | 10 |

(1, 0) → 1 – 0 ≤ 0 (falso). La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al (0, 0). | 9x – y ≥ 0→ Recta: 9x – y = 0x = 0, 9.0 – y = 0, y = 0y = 45, 9x – 45 = 0, x = 5

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | 0 | 5 |
| y | 0 | 45 |

 (1, 0) → 9.1 – 0 ≥ 0 (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0). |
|

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 7x + y ≤ 80 → Recta: 7x + y = 80x = 0, 7.0 + y = 80, y = 80y = 10, 7x + 10 = 80, x = 10

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | 0 | 10 |
| y | 80 | 10 |

 (0, 0) → 7.0 + 0 ≤ 80 (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0). | x ≥ 0 → x = 0 (eje Y)(1, 0)→ 1 ≥ 0 (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0). |
| y ≥ 0 → y = 0 (eje X)(0, 1)→ 1 ≥ 0 (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1). |

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

 sumando,

sumando,

Veamos si podrían hacerse 10 anuncios de TV y 20 de radio, o sea, si x = 10, y = 20 está en la región

factible: ; como 7.10 + 20 = 90 ≤ 80 (falso), no se cumple la 3ª restricción.

Luego, no pueden hacerse 10 anuncios de TV y 20 de radio

b) Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo f(x, y) = 100000x + 18000y:

f(A) = f(0, 0) = 100000.0 + 18000.0 = 0 f(B) = f(10, 10) = 100000.10 + 18000.10 = 1 180 000

f(C) = f(5, 45) = 100000.5 + 18000.45 = 1 310 000

Luego, la audiencia máxima es 1 310 000 y se obtiene con 5 anuncios de TV y 45 anuncios de radio.

Pregunta 3.- La producción diaria de una determinada empresa oscila entre 1 y 10 toneladas.

El beneficio diario (f), en miles de euros, depende de la producción (x) y su relación puede expresarse como sigue:

a) [0,75 puntos] Determina las constantes a y b si se sabe que los días en los que se producen 3 toneladas

el beneficio es de 112 miles de euros y que la función f es continua en todo su dominio.

b) [1,75 puntos] Considerando los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, estudia y

representa gráficamente la función f en el intervalo [1, 10]. Si un día el beneficio ha sido de 100 miles de

euros, ¿cuánto se ha producido ese día? ¿Cuál es el beneficio mínimo un día cualquiera? ¿Y el beneficio

máximo?

**Resolución**

a) Como si se producen 3 toneladas el beneficio es de 112 miles de euros, entonces f(3) = 112.

Luego, 22 + a.3 = 112 ; a = 30 y

Como f debe ser continua en x = 3:

 .

Conclusión: debe ser a = 30, b = –2 y

b) La gráfica está formada por un trozo de recta y otro de parábola.

Para , (f decreciente)

Por otra parte, ;

La gráfica en el intervalo [1, 10] sería



Si el beneficio ha sido de 100 mil euros, entonces

Despejando, ⇒ se han producido 2,6 ó 5 toneladas

El beneficio mínimo es 0 € (produciendo 10 toneladas) y el máximo 112000 € (produciendo 3 toneladas)

Pregunta 4. Dada la función f(x) = –x2 + 4x, se pide:

a) [0,5 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que F(1) = 2.

**Resolución**

Si F es una primitiva de f, entonces

F(1) = 2 ⇒. Luego, la primitiva es

b) [2 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre x = –1 y x = 3.

**Resolución**

 ;

Además, y

Luego, entre –1 y 3 la gráfica de f es un trozo de parábola cóncava con vértice (2, 4) que corta al eje X

en (0, 0), empieza en (–1, –5) y termina en (3, 3).

El recinto cuya área se pide sería



El área que se pide es .

Una primitiva de es . Por la regla de Barrow,

.

Pregunta 5.- Según cierto estudio, se sabe que el 80% de los hogares de un determinado país tiene

contratado el acceso a internet y que el 40% tiene contratado algún canal de televisión de pago. Además,

se sabe que el 25% de los hogares disponen de ambos servicios. Si se selecciona un hogar al azar:

a) [1,25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que tenga contratada televisión de pago, pero no internet?

b) [1,25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

**Resolución**

Sean los sucesos I = el hogar tiene contratado el acceso a internet

T = el hogar tiene contratado algún canal de televisión de pago

Según el enunciado, p(I) = 0,8 p(T) = 0,4 y p(I ∩ T) = 0,25

a) Se pide p(T ∩ Ic) = p(T) – p(I ∩ T) = 0,4 – 0,25 = 0,15 = 15%

b) Observa primero que p(I ∪ T) = p(I) + p(T) – p(I ∩ T) = 0,8 + 0,4 – 0,25 = 0,95. Se pide p(Ac ∩ Bc).

Por una de las leyes de Morgan, p(Ac ∩ Bc) = p[(A ∪ B)c] = 1 – p(A ∪ B) = 1 – 0,95 = 0,05 = 5%

Pregunta 6.- En una determinada población, el 5% de los individuos han contraído un virus. Para estudiar

dicha enfermedad se somete a los individuos a un cribado consistente en una prueba que determina que

tiene virus el 90% de las veces si el individuo está infectado y determina que no tiene virus el 95% de las

veces si no está infectado. Se pide:

a) [1,25 puntos] Si la prueba determina que un individuo tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que

realmente no lo tenga?

b) [1,25 puntos] Si la prueba determina que un individuo no tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que

realmente lo tenga?

**Resolución**

Sean los sucesos V = el individuo tiene el virus A = el diagnóstico es correcto

Según el enunciado, p(V) = 0,05 [luego, p(Vc) = 0,95] p(A/V) = 0,9 y p(A/Vc) = 0,95

Por el teorema de probabilidad total,

p(A) = p(V ∩ A) + p(Vc ∩ A) = p(V) . p(A/V) + p(Vc) . p(A/Vc) = 0,05 . 0,9 + 0,95 . 0,95 = 0,9475

a) Se pide

b) Se pide

Pregunta 7.- Se supone que la duración de un aparato electrónico, en años, sigue aproximadamente una

distribución normal con desviación típica 0,5 años.

a) [1,5 puntos] Para estimar la duración media, se considera una muestra aleatoria de 150 aparatos, los

cuales han durado, en media, 1,8 años. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para

la duración media, al 95% de confianza.

**Resolución**

X = duración, . El intervalo de confianza a nivel de confianza del 95% para estimar en contenido medio, μ, es , siendo la media de una muestra de

tamaño n, , el máximo error de estimación.

Como el área bajo la campana es 100%, entonces 100% – 95% = 5% y 5% : 2 = 2,5%

 

 es el valor de la N(0, 1) que cumple

Esta probabilidad coincide con

Como .

El tamaño de la muestra es n = 150, la desviación típica es σ = 0,5 ; .

Sustituyendo, ;

b) [1 punto] ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media a

partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,2 años y un nivel de confianza

del 99%?

**Resolución**

Sabemos que , es el máximo error de estimación para un nivel de confianza del 99%

Como el área bajo la campana es 100%, entonces 100% – 99% = 1% y 1% : 2 = 0,5%

 

 es el valor de la N(0, 1) que cumple

Esta probabilidad coincide con

Como

Se quiere que

Sustituyendo: . Luego, el tamaño mínimo de la muestra debe ser 42 aparatos.

Pregunta 8.- Una empresa hace un estudio de mercado antes de lanzar un nuevo producto. Para ello

selecciona al azar a 200 personas a las que proporciona su producto durante 4 semanas para que

indiquen al final de ese periodo si les ha gustado o no. A 150 de ellas les ha gustado y al resto no.

a) [1,5 puntos] Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción

poblacional de personas a las que les gustara el producto, al 99% de confianza.

b) [1 punto] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de

estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese

disminuido el tamaño de la muestra?

∗ Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:

F(1,28) = 0,90 F(1,64) = 0,95 F(1,96) = 0,975 F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995

**Resolución**

La v.a. “proporción de personas de cada muestra, elegida al azar, a las que les gusta el producto”, tiene una distribución Normal donde p es la proporción poblacional, n = 200 el tamaño de la muestra y es la proporción muestral.

a) El intervalo de confianza a nivel de confianza del 99% para la proporción poblacional, p,

es , siendo , el máximo error de estimación.

Como el área bajo la campana es 100%, entonces 100% – 99% = 1% y 1% : 2 = 0,5%

 

 es el valor de la N(0, 1) que cumple

Esta probabilidad coincide con

Como

Sustituyendo:

b) El error de estimación ya hemos visto que es

A la vista de la expresión general del error de estimación es evidente que como no varía, tampoco y n disminuye, entonces el error de estimación aumentara, puesto que está en el denominador de la fracción.