
EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II EBAU2023 - JULIO

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1.- Se quiere calcular un número de tres cifras con los siguientes datos:
i) La suma de sus tres cifras es 9.
ii) Si permutamos la cifra de las centenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial menos 99.
iii) Si permutamos la cifra de las decenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial más 36.
a) [1,5 puntos] Denotando por x la cifra de las centenas, por y la de las decenas y por z la de las unidades, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente la información dada en i), ii) y iii).
b) [1 punto] Calcule el número en cuestión.

Resolución

a) Según el enunciado, $\begin{cases} x+y+z=9 \\ 100z+10y+x=100x+10y+z-99 \\ 100x+10z+y=100x+10y+z+36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=9 \\ 99x-99z=99 \\ -9y+9z=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=9 \\ x-z=1 \\ z-y=4 \end{cases}$

b) Despejando z en la 3ª ecuación, z = y + 4. Sustituyendo en las otras, $\begin{cases} x+y+y+4=9 \\ x-y-4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ x-y=5 \end{cases}$

Restando las ecuaciones, y = 0 ; x – 0 = 5, x = 5 ; z = 0 + 4 = 4. Por tanto, x = 5, y = 0, z = 4.

El número buscado es 504

2.- Se dice que una matriz cuadrada A es 2-nilpotente si cumple que $A^2 = 0$.
a) [0,75 puntos] Justifique razonadamente que una matriz 2-nilpotente nunca puede ser regular (o invertible).

Resolución

$A^2 = 0$, entonces $0 = \det A^2 = (\det A)^2$. Luego, $\det A = 0$ y A no es invertible, es decir A no es regular.

b) [0,75 puntos] Compruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

Resolución $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

c) [1 punto] Determine para qué valores de a y b la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

Resolución

$$A = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36+4a & 6a+ab \\ 24+4b & 4a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 36+4a=0 \to a=-9 \\ 6a+ab=0 \\ 24+4b=0 \to b=-6 \\ 4a+b^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6(-9)-9(-6)=0 \\ 4(-9)+(-6)^2=0 \end{cases}$$

que se cumple. Luego, a = –9, b = –6 y $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$

3.- Considere la función $f(x) = x\,e^{-x}$, definida para todo valor de x ∈ R.

a) [0,75 puntos] Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Resolución

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ porque e^x es un infinito de orden superior a x.

b) [0,75 puntos] Calcule la derivada de f(x) y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función f(x) y sus extremos relativos (máximos y/o mínimos).

Resolución

$f(x) = x\,e^{-x}$; $f'(x) = 1\,e^{-x} + xe^{-x}(-1) = (1-x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f´(x)	+	0	–
f(x)	creciente	máximo	decreciente

f es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

Máximo relativo: x = 1, $y = f(1) = 1\,e^{-1} = \frac{1}{e}$, punto $\left(1, \frac{1}{e}\right)$. No hay mínimos relativos

c) [1 punto] Calcule la integral indefinida de la función f(x).

Resolución

$\int f(x)\,dx = \int xe^{-x}\,dx$. Usamos la integración por partes: $\begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix}$

$\int f(x)dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = (-x-1)e^{-x} + c$

4.- Considere la función $f(x) = \frac{sen\,x}{1+\cos^2 x}$, definida para todo valor de x ∈ R, donde $\cos^2 x = (\cos x)^2$.

a) [1 punto] Calcule la integral indefinida de la función f(x).

Resolución

Se pide $\int \frac{sen\,x}{1+\cos^2 x}\,dx$. Haciendo el cambio $t = cos\,x$; $dt = -sen\,x\,dx$.

Sustituyendo queda $\int \frac{-1}{1+t^2}\,dt = -arctg\,t + k = -arctg(\cos x) + k$

b) [0,75 puntos] Calcule la integral definida $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$

Resolución

Al ser $p(x) = -arctg(\cos x)$ una primitiva de f, por la regla de Barrow

$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = p\left(\frac{\pi}{2}\right) - p(0) = -arctg\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) - [-arctg(\cos 0)] = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

c) [0,75 puntos] Determine la primitiva de f(x) que pasa por el punto (π, 1).

Resolución

Las primitivas de f son de la forma $F(x) = -arctg(\cos x) + k$.

Si la primitiva pasa por (π, 1), entonces $1 = F(\pi) = -arctg(\cos\pi) + k = -\frac{-\pi}{4} + k$

Por tanto, $k = 1 - \frac{\pi}{4}$ y la primitiva es $F(x) = -arctg(\cos x) + 1 - \frac{\pi}{4}$

5.- Los puntos A(6, −4, 4) y B(12, −1, 1) son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C es la proyección ortogonal del vértice A sobre la recta $r: \begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 2z = 5 \end{cases}$

a) [1,5 puntos] Calcule las coordenadas del vértice C.

Resolución

Un vector director de r se puede obtener como el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: $\overrightarrow{d_r} = (1,-2,0)\ x\ (1,0,2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-4,-2,2)\ //\ (2,1,-1)$.

Sea C(x, y, z), entonces $\overrightarrow{AC} = (x-6, y+4, z-4)$

Al ser C proyección ortogonal de A sobre r, entonces $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{d_r} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{d_r} = 0$

Operando, $2(x - 6) + 1(y + 4) - 1(z - 4) = 0 \Rightarrow 2x + y - z = 4$

Como C ∈ r, entonces sus coordenadas cumplen las ecuaciones de r $\Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 2z = 5 \end{cases}$

Nos queda el sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - 2y = 5 \\ x + 2z = 5 \end{cases}$. Lo resolvemos por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2f3 - f1 \\ f3 - f2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} f2:2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} f1 + f2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

que corresponde al sistema $\begin{cases} 6z = 6 \\ y + z = 0 \\ x + 2z = 5 \end{cases}$; z = 1 ; y = −1 ; x = 5 − 2.1 = 3. Solución: x = 3, y = −1, z = 1

El punto pedido es C(3, −1, 1)

b) [0,5 puntos] Determine si el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en el vértice A.

Resolución

Sabemos que A(6, −4, 4), B(12, −1, 1) y C(3, −1, 1) ; $\overrightarrow{AB} = (6,3,-3)$; $\overrightarrow{AC} = (-3,3,-3)$

Como $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -18 + 9 + 9 = 0$, entonces $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ y, por tanto, $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en A

c) [0,5 puntos] Calcule el área del triángulo $\widehat{ABC}$.

Resolución

Al ser un triángulo rectángulo en A, el área del triángulo es $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}3|(2,1,-1)|.3|(-1,1,-1)| = \frac{9}{2}\sqrt{6}\,\sqrt{3} = \frac{9.3\sqrt{2}}{2} = \frac{27\sqrt{2}}{2} \cong 19{,}1\ u^2$

6.- Considere el plano π de ecuación π: 2x + ay – 2z = –4 y la recta r dada por $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-2}$

a) [1,25 puntos] Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a.

Se sabe que cuando a = 1 la recta r corta al plano π. Para ese valor de a:

b) [0,75 puntos] Calcule el punto de corte de la recta r y el plano π.

c) [0,75 puntos] Calcule el ángulo que forman.

Resolución

a) Un vector normal de π es $\vec{n} = (2, a, -2)$ y un vector director de r es $\vec{d} = (2, 1, -2)$

$\vec{d} \cdot \vec{n} = 4 + a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -8$

- Si a = –8, π: 2x – 8y – 2z = 4 ⇒ $\vec{d} \perp \vec{n}$ ⇒ r // π ó r ⊂ π ; A(–1, –1, 5) ∈ r

Como 2(–1) – 8(–1) – 2.5= 4, entonces A ∈ π y, por tanto, r ⊂ π

- Si a ≠ –8, entonces $\vec{d} \not\perp \vec{n}$. Luego, r y π son secantes.

Serán secantes perpendiculares si $\vec{d} \,//\, \vec{n}$. Es decir, si $\frac{2}{2} = \frac{a}{1} = \frac{-2}{-2}$. O sea, para a = 1 son secantes perpendiculares

b) Para a = 1, π: 2x + y – 2z = 4. Como $r: \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = -1 + k \\ z = 5 - 2k \end{cases}$, sustituyendo en la ecuación del plano,

2(–1 + 2k) – 1 + k – 2(5 – 2k) = 4 ⇒ 9k = 9 ⇒ k = 1 ⇒ $\begin{cases} x = -1 + 2.1 \\ y = -1 + 1 \\ z = 5 - 2.1 \end{cases}$. El punto de corte es P(1, 0, 3)

c) Como para a = 1 r y π son secantes perpendiculares, entonces forman un ángulo de 90º.

7- En un cine hay 3 salas y un total de 250 espectadores repartidos de la siguiente manera: 100 espectadores en la sala A, 50 en la sala B y 100 en la sala C. Se sabe que la película de la sala A gusta al 80% de los espectadores, la de la sala B al 20% de los espectadores y la de la sala C al 60% de los espectadores. A la salida de las tres películas se elige un espectador al azar. Calcule:

a) [0,25 puntos] La probabilidad de que el espectador haya estado en la sala C.

b) [0,5 puntos] La probabilidad de que le haya gustado la película, sabiendo que ha estado en la sala C.

c) [0,5 puntos] La probabilidad de que le haya gustado la película y haya estado en la sala C.

d) [0,75 puntos] La probabilidad de que le haya gustado la película.

e) [0,5 puntos] La probabilidad de que le haya gustado la película o haya estado en la sala C.

Resolución

A = el espectador es de la sala A B = el espectador es de la sala B

C = el espectador es de la sala C G = la película gusta

Elaboramos la siguiente tabla de contingencia:

	A	B	C	Total
G	80% de 100 = 80	20% de 50 = 10	60% de 100 = 60	150
G^c	100 – 80 = 20	50 – 10 = 40	100 – 60 = 40	100
Total	100	50	100	250

a) Se pide $p(C) = \frac{100}{250} = 0{,}4 = 40\%$ b) Se pide $p(G/C) = \frac{p(G \cap C)}{p(C)} = \frac{60/250}{100/250} = \frac{60}{100} = 0{,}6 = 60\%$

c) Se pide $p(G \cap C) = \frac{60}{250} = 0{,}24 = 24\%$ d) Se pide $p(G) = \frac{150}{250} = 0{,}6 = 60\%$

e) Se pide $p(G \cup C) = p(G) + p(C) - p(G \cap C) = 0{,}6 + 0{,}4 - 0{,}24 = 0{,}76 = 76\%$

8.- En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades y 2 decimales para los porcentajes. El peso de los recién nacidos en la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 67% de los recién nacidos pesan menos de 3,464 kg y que el 1,5% de los recién nacidos pesan más de 4,502 kg.

a) [0,5 puntos] ¿Cuál es el porcentaje de recién nacidos cuyo peso está comprendido entre 3,464 y 4,502 kg?

b) [1 punto] Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) [1 punto] Calcule el porcentaje de recién nacidos que pesan menos de 2,33 kg.

Resolución

X = peso $\to N(\mu,\sigma) \;\Rightarrow\; Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \to N(0,1)$.

a) Se pide $p(3{,}464 < X < 4{,}502) = p(X < 4{,}502) - p(X < 3{,}464) =$

$= 1 - p(X > 4{,}502) - p(X < 3{,}464) = 1 - 0{,}015 - 0{,}67 = 0{,}315 = 31{,}5\%$

b) $0{,}67 = p(X < 3{,}464) = p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{3{,}464-\mu}{\sigma}\right) = p\left(Z < \frac{3{,}464-\mu}{\sigma}\right)$

Usando la tabla de la N(0, 1) en sentido inverso, $\frac{3{,}464-\mu}{\sigma} = 0{,}44$. Luego, $\mu + 0{,}44\sigma = 3{,}464$

$0{,}015 = p(X > 4{,}502) = p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{4{,}502-\mu}{\sigma}\right) = p\left(Z > \frac{4{,}502-\mu}{\sigma}\right) \Rightarrow p\left(Z < \frac{4{,}502-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}985$

Usando la tabla de la N(0, 1) en sentido inverso, $\frac{4{,}502-\mu}{\sigma} = 2{,}17$. Luego, $\mu + 2{,}17\sigma = 4{,}502$

Resolviendo el sistema, μ = 3,2 ; σ = 0,6 . Luego, X → $N(3{,}2\,;0{,}6)$ $\quad Z = \frac{X-3{,}2}{0{,}6} \to N(0,1)$.

c) $p(X < 2{,}33) = p\left(\frac{X-3{,}2}{0{,}6} < \frac{2{,}33-3{,}2}{0{,}6}\right) = p(Z < -1{,}45) = 1 - p(Z < 1{,}45) = 1 - 0{,}9365 = 7{,}35\%$