

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá

elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede

contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido

las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán

las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. Dada la siguiente función , a, b ∈ R.

 (a) (1 punto) Estudia su continuidad en R según los valores de a y b.

**Resolución**

Para x ≠ 0, f es continua independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas.

 ⇒ a – 1 = –b ⇒ a + b = 1

Conclusión: Si a + b = 1, f es continua en R y si a + b ≠ 1, f sólo es continua en R – {0}

(b) (1 punto) Para a = 1, calcula el valor de b para que, en el punto con , la función tenga la

recta tangente

**Resolución**

Para a = 1, . Para x > 0,

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto A(x0, f(x0)) es

rtg: y = f´(x0)(x – x0) + f(x0). En este caso, ;

 . La recta tangente en es

Como la recta tangente es , entonces

Por tanto, y

2. Estudia la existencia del siguiente límite y calcúlalo en caso de existir:

**Resolución**

3. Calcula el área encerrada por las gráficas de las funciones f(x) = x + 6 y

**Resolución**

Averigüemos los puntos de corte de sus gráficas:

para x < 0, . Se cortan en (–2, 4)

para x ≥ 0, . Se cortan en (3, 9)

El área es

Una primitiva de es y una primitiva de

es . Por la regla de Barrow,

.

4. En una cristalería, a un cristal rectangular de 120 centímetros de alto y 70 centímetros de ancho se le

ha cortado por error la esquina superior derecha como se ve en el dibujo. Quieren recortar dicho cristal

nuevamente de forma rectangular, de modo que la superficie sea la máxima posible haciendo como

máximo dos cortes. ¿Cuáles serán las dimensiones del nuevo cristal rectangular recortado?



**Resolución**

La situación es la siguiente:



Usando la semejanza de triángulos ; ; 3x = 30 – y ; y = 30 – 3x

Hay que maximizar,

 . S(x) es decreciente y, por tanto, el máximo se obtiene para x = 0, y = 30 – 3.0 = 30. Las dimensiones son 60 cm y 120 cm

5. De una matriz B sabemos que cumple , donde I3 es la

matriz identidad de orden 3. Estudia si la matriz B tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa

de B.

**Resolución**

Trasponiendo términos, . Sacando factor común B, por la

derecha,

Por tanto, B tiene inversa y su inversa es

6. Dadas las siguientes matrices , , m ∈ R.

(a) (1,2 puntos) Analiza el rango de la matriz A según los valores de m ∈ R.

**Resolución**

det A = 2m2 + 4m + 4 – 4m – 4m – 2m = 2m2 – 6m + 4 = 0 ⇔ m2 – 3m + 2 = 0 , , m = 1, m = 2

– Si m ≠ 1, m ≠ 2, det A ≠ 0 y rg A = 3

– Si m = 1, det A = 0 y - Como , rg A = 2

– Si m = 2, det A = 0 y . Como , rg A = 2

(b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema AX = B para el valor m = 2.

**Resolución**

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

Sabemos que rg A = 2

 . Como , rg A\* = 2

Luego, rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible

indeterminado, tiene infinitas soluciones.

 corresponde al sistema ; y = 2 – z ; x = 3 – y – z = 3 – 2 + z – z = 1

Llamando z = k, las infinitas soluciones son , con k ∈ R.

7. En un laboratorio de una empresa farmacéutica se fabrican tres tipos de medicamentos, M1, M2 y M3,

a partir de tres principios activos, A1, A2 y A3, distintos. En la siguiente tabla se reflejan los miligramos

de principio activo necesarios para fabricar un gramo de cada medicamento:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | mg de A1 | mg de A2 | mg de A3 |
| para 1 g de M1 | 10 | 10 | 20 |
| para 1 g de M2 | 10 | 20 | 30 |
| para 1 g de M3 | 20 | 30 | 50 |

En dicho laboratorio se dispone actualmente de 70 gramos del activo A1, 90 gramos del activo A2

y 160 gramos del activo A3. Se va a cerrar por vacaciones y la empresa quiere no dejar principios

activos en el laboratorio. ¿Es posible utilizar la cantidad total exacta disponible de principios activos del

laboratorio fabricando los medicamentos M1, M2 y M3? En caso afirmativo, ¿qué cantidades de cada

medicamento podrá fabricar el laboratorio con dichos principios activos?

**Resolución**

Sean x, y, z los gramos de los medicamentos M1, M2 y M3, respectivamente. Elaboramos la tabla:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | mg de A1 | mg de A2 | mg de A3 |
| para x g de M1 | 10x | 10x | 20x |
| para y g de M2 | 10y | 20y | 30y |
| para z g de M3 | 20z | 30z | 50z |
| total | 10x + 10y + 20z | 10x + 20y + 30z | 20x + 30y + 50z |

Según el enunciado, . Usemos Gauss:

 que corresponde

al sistema ; y = 2000 – z ; x = 7000 – y – 2z = 7000 – 2000 + z – 2z = 5000 – z

Llamando z = k, las infinitas soluciones del sistema son , con k ∈ R.

Como hay infinitas soluciones no es posible utilizar la cantidad total exacta disponible de principios activos del laboratorio fabricando los medicamentos M1, M2 y M3

8. Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos

además, pasa por el punto (3, 2, 1).

**Resolución**

Como la recta está dada como intersección de dos planos, un vector director de la misma es el producto vectorial de los vectores normales de dichos planos:

. El plano π que se pide es

perpendicular a la recta. Luego, tiene vector normal y como pasa por (3, 2, 1)

Entonces, π: 0(x **‒** 3) + 1(y – 2) + 1(z – 1) = 0 ⇒ π:y + z – 3 = 0

9. Sean A(1, 2, 3), B(1, 0, –1) y C(2, 2, 2) tres puntos en el espacio y el vector que va de A a B; el

vector que va de B a C y el vector que va de C a A.

(a) (1 punto) Estudia si los vectores son linealmente independientes.

**Resolución**

 ⇒ son dependientes

(b) (1 punto) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B, C.

**Resolución**

 ;

10. El 84% de los exámenes de Matemáticas II de la fase genérica en la convocatoria ordinaria de la EvAU

en 2022 en Aragón obtuvieron una nota mayor o igual a 5.

(a) (0,8 puntos) Si seleccionamos aleatoriamente 15 de aquellos exámenes, ¿cuál es la probabilidad de

que exactamente 2 tengan una nota inferior a 5?

(b) (1,2 puntos) Con los 15 exámenes anteriores, ¿es más probable que menos de 2 exámenes tengan

nota inferior a 5 o que más de 2 exámenes tengan nota inferior a 5

**Resolución**

Sea X = Número de exámenes con una nota inferior a 5. Como el 84% de los exámenes obtuvieron una nota mayor o igual a 5, el 16% sacaron menos de 5; X es una variable binomial,

La ley de probabilidad es , con k = 0, 1, 2, 3, …14, 15.

a) La probabilidad que se pide es

b) Hallamos las dos probabilidades:

Es más probable que más de 2 exámenes tengan nota inferior a 5.