GENERALITAT VALENCIANA

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2024	CONVOCATORIA: JULIO 2024
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumnado contestará solo CUATRO problemas entre los OCHO propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde k es un número real.

a) ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A es invertible? (2 puntos)
b) Para $k = 0$, si existe, calcular la matriz inversa de A. (4 puntos)

Resolución

a) $\det A = 2k - 3k - 2 + k^2 = k^2 - k - 2 = 0$, $k = \frac{1 \pm 3}{2}$, $k = -1, k = 2$. Si $k \neq -1, k \neq 2$, $\exists A^{-1}$

b) Para k = 0, sabemos que A es invertible, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det A = 0^2 - 0 - 2 = -2$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adj\ A)^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 2 & \frac{-2}{3} \\ -3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ \frac{-2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Para $k = 0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD = DA$. (4 puntos)

Resolución

Las matrices que se piden son de la forma $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

$$AD = DA \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3c \\ 0 & \frac{b}{3} & c \\ 2a & -b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3a \\ 0 & \frac{b}{3} & b \\ 2c & -c & -c \end{pmatrix}$$

Igualando elementos, 3c = 3a ; 2a = 2c ; –b = –c. O sea, a = b = c = k y $D = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = kI$

Problema 2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar los valores del parámetro real α para los que la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene una única solución. (5 puntos)

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2X = B$, encontrar el valor de α, β y γ dependiendo del parámetro real a. (5 puntos)

Resolución

Llamando $C = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix}$, queda $CX = B$

a) $\det C = (4 + 8a)(2a + 9) - 128a = 16a^2 + 80a + 36 - 128a = 16a^2 - 48a + 36 = 0$ Simplifico por 4,

$4a^2 - 12a + 9 = 0$, $a = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{3}{2}$. Si $a \neq \frac{3}{2}$, $\det C \neq 0$ y $\exists\, C^{-1}$. Multiplicando por C^{-1}, por la izquierda, se tiene $C^{-1}CX = IX = X = C^{-1}B$. Conclusión: para $a \neq \frac{3}{2}$ la ecuación tiene solución única

b) Si $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es solución, sustituyendo en $CX = B$ se tiene $\begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

Operando, $\begin{pmatrix} 6a-5 \\ 3a+8 \\ 10a-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Igualando, $\begin{cases} \alpha = 6a - 5 \\ \beta = 3a + 8 \\ \gamma = 10a - 9 \end{cases}$

Problema 3. Se dan las rectas $r: x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{2}$ y $s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Se pide:

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección. (5 puntos)

Resolución

Ponemos las rectas en forma paramétrica $r: \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + k \\ z = 1 + 2k \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

Igualando, $\begin{cases} 1 + k = 3 - 2t \to k + 2t = 2 \\ 2 + k = 3 - t \to k + t = 1 \\ 1 + 2k = -1 + 2t \to 2k - 2t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k + 2t = 2 \\ k + t = 1 \\ k - t = -1 \end{cases}$.

Sumando las 2 últimas ecuaciones, $2k = 0$, $k = 0$. Sustituyendo en la 1ª ecuación, $0 + 2t = 2$, $t = 1$

Vemos que para $k = 0$, $t = 1$ se cumplen las 3 ecuaciones. Sustituyendo, el punto de corte es P(1, 2, 1)

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s. (5 puntos)

Resolución

La recta u que pide es ⊥ r y s, un vector director es $\overrightarrow{d_u} = \overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (4, -6, 1)$

$P(1, 2, 1) \in u$, luego, $u: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-1}{1}$

Problema 4. Sea el plano π: $6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:
a) Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad. (2 puntos)

Resolución O(0, 0, 0), Usando la fórmula, $1 = dist(O, \pi) = \frac{|6.0+4.0-3.0-d|}{\sqrt{6^2+4^2+(-3)^2}} = \frac{|-d|}{\sqrt{61}} \Rightarrow d = \pm\sqrt{61}$

b) Calcular, en función del parámetro d, las coordenadas de los puntos A, B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X, Y y Z, respectivamente. (3 puntos)

Resolución

Punto de corte de π con el eje X: $\begin{cases} \pi: 6x+4y-3z-d=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $A\left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$

Punto de corte de π con el eje Y: $\begin{cases} \pi: 6x+4y-3z-d=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$ $B\left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$

Punto de corte de π con el eje Z: $\begin{cases} \pi: 6x+4y-3z-d=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $C\left(0, 0, \frac{-d}{3}\right)$

c) Para d ≠ 0, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior. (5 puntos)

Resolución

α = ángulo pedido, $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{-d}{6}, \frac{d}{4}, 0\right).\frac{12}{d} \,//\, (-2, 3, 0)$ $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{-d}{6}, 0, \frac{-d}{3}\right).\frac{-6}{d} \,//\, (1, 0, 2)$

$\alpha = arccos\frac{|\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = arccos\frac{|-2+0+0|}{\sqrt{(-2)^2+3^2+0^2}.\sqrt{1^2+0^2+2^2}} = arccos\frac{2}{\sqrt{65}} \cong 75{,}64º = 75º38'12''$

Problema 5. Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:
a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = -\frac{3}{4}$. (3 puntos)

Resolución

$h'(x) = a + 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-a}{2}$ $h''(x) = 2$; $h''\left(\frac{-a}{2}\right) = 2 > 0$, mínimo en $x = \frac{-a}{2}$

Luego, $\frac{-a}{2} = -\frac{3}{4}$. Despejando, $a = \frac{3}{2}$

b) Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. (2 puntos)
c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. (5 puntos)

Resolución

Para $a = \frac{3}{2}$, $h(x) = \frac{3}{2}x + x^2$ $h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$. Hallemos los puntos de corte de las gráficas:

$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + x^2 \\ y = \frac{3}{2} + 2x \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}x + x^2 = \frac{3}{2} + 2x \Rightarrow 3x + 2x^2 = 3 + 4x \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0$; $x = \frac{1 \pm 5}{4}$, $x = -1$, $x = \frac{3}{2}$

$x = -1, y = \frac{3}{2} + 2(-1) = \frac{-1}{2}$; punto $\left(-1, \frac{-1}{2}\right)$; $x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{2} + 2\frac{3}{2} = \frac{9}{2}$; punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$

Área que piden: $A = \left|\int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left[\frac{3}{2}x + x^2 - \left(\frac{3}{2} + 2x\right)\right] dx\right| = \left|\int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) dx\right|$

Una primitiva de $\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)$ es $p(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x = \frac{4x^3 - 3x^2 - 18x}{12}$. Por la regla de Barrow,

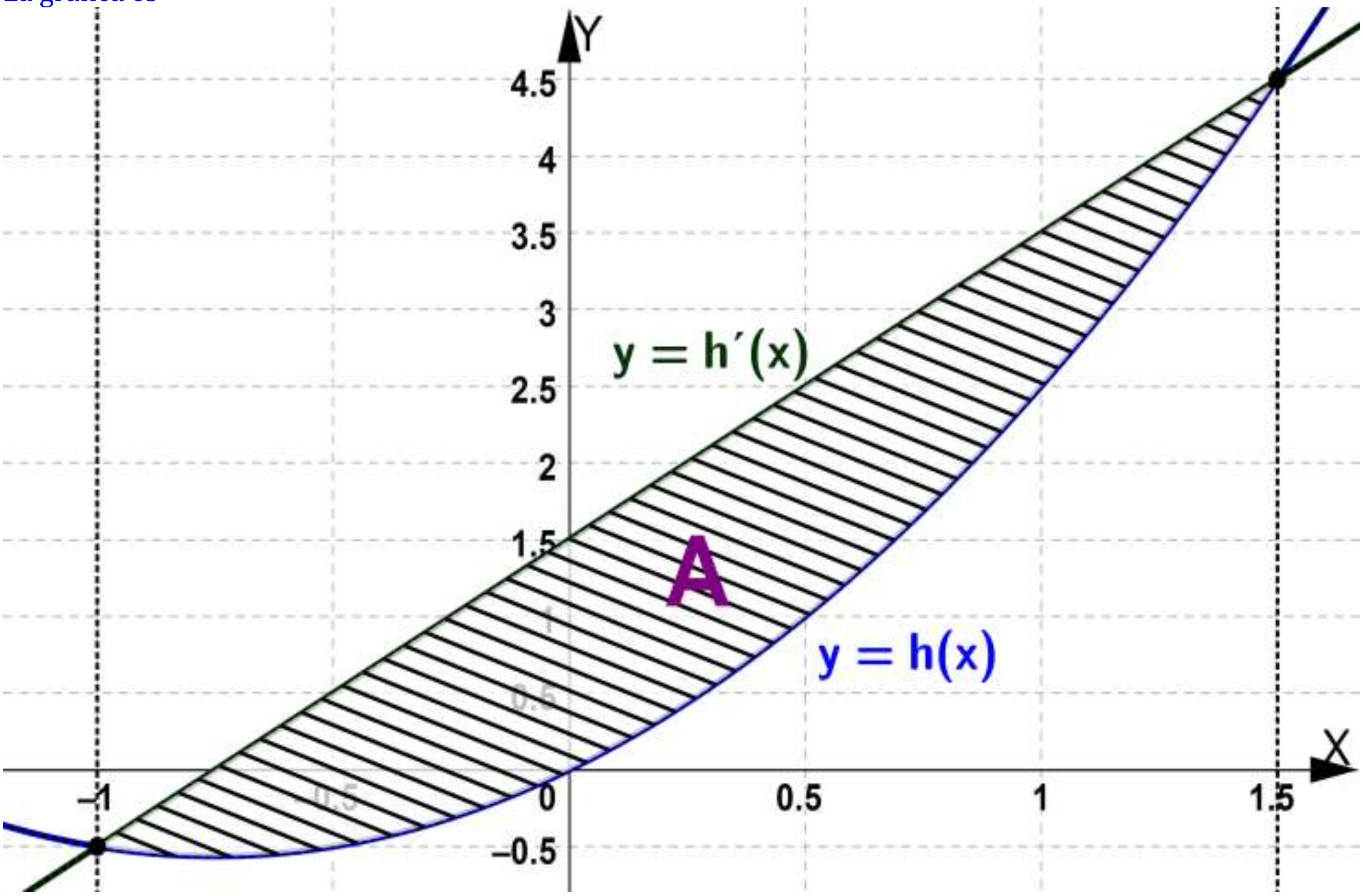
$$A = \left|p\left(\frac{3}{2}\right) - p(-1)\right| = \left|\frac{4\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 18\frac{3}{2}}{12} - \frac{4(-1)^3 - 3(-1)^2 - 18(-1)}{12}\right| = \frac{125}{48} \cong 2{,}6\,u^2$$

Vamos a dibujar las curvas y el recinto comprendido entre ambas:

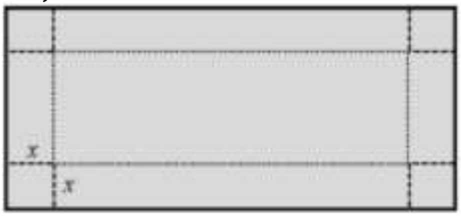
$y = h(x) = \frac{3}{2}x + x^2$ es una parábola convexa y como $\frac{3}{2}x + x^2 = x\left(\frac{3}{2} + x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{-3}{2}$ corta a los ejes en $(0, 0)$ y $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$

$y = h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$ es una recta que corta a la parábola en $\left(-1, \frac{-1}{2}\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$ como hemos visto antes

La gráfica es

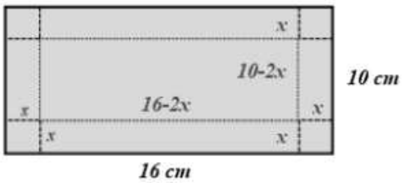


Problema 6. Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja.



Calcular:
a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. (8 puntos)
b) Dicho volumen. (2 puntos)

Resolución



Función a maximixar: $V(x) = \text{largo} . \text{ancho} . \text{alto} = (16 - 2x)(10 - 2x)x = 4x^3 - 52x^2 + 160x$

Observa que debe ser $x \leq 5$ para que se pueda construir la caja.
$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 26x + 40 = 0$; $x = \frac{26 \pm 14}{6}$, $x = 2$, $x = \frac{20}{3} \cong 6{,}7$ (no válido)

$V''(x) = 24x - 104$; $V''(2) = 24.2 - 104 = -56 < 0$. El volumen máximo se obtiene para $x = 2$.

Las dimensiones de la caja son: largo = 16 – 2.2 = 12 cm ancho = 10 – 2.2 = 6 cm alto = 2 cm

El volumen máximo será: $V = 12 . 6 . 2 = 144 \text{ cm}^3$.

Problema 7. Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10,25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30% de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10% defectuosas. El 25% de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5% defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa? (4 puntos)
b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina? (3 puntos)
c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina? (3 puntos)

Resolución

A = la lata la fabrica la máquina 1 B = la lata la fabrica la máquina 2 C = la lata la fabrica la máquina 3

D = la lata es defectuosa ; $p(D) = 0{,}1025$ $p(A) = 0{,}3$ $p(D/A) = 0{,}1$ $p(B) = 0{,}25$ $p(D/B) = 0{,}05$

$p(C) = 1 - 0{,}3 - 0{,}25 = 0{,}45$

a) Piden $p(D/C) = x$. Por el teorema de probabilidad total, $p(D) = p(A)p(D/A) + p(B)p(D/B) + p(C)p(D/C) \Rightarrow 0{,}1025 = 0{,}3.0{,}1 + 0{,}25.0{,}05 + 0{,}45x = 0{,}0425 + 0{,}45x \Rightarrow x = p(D/C) \cong 0{,}1333 = 13{,}33\%$

b) Se pide $p(A/D^c) = \frac{p(D^c \cap A)}{p(D^c)} = \frac{p(A)\, p(D^c/A)}{p(D^c)} = \frac{0{,}3.(1 - 0{,}1)}{1 - 0{,}1025} \cong 0{,}3001 = 30{,}01\%$

c) Se pide $p(B^c/D) = 1 - p(B/D) = 1 - \frac{p(D \cap B)}{p(D)} = 1 - \frac{p(B)\, p(D/B)}{p(D)} = 1 - \frac{0{,}25.0{,}05}{0{,}1025} \cong 0{,}878 = 87{,}8\%$

Problema 8. Se ha determinado que en el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía diez mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

a) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos. (3 puntos)

b) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos. (3 puntos)

c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos. (4 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Resolución

X = nº de emoticonos en 10 mensajes de WhatsApp, entonces $X \to B(10\ ;\ 0{,}6)$.

La ley de probabilidad es $p_k = p(X = k) = \binom{10}{k} 0{,}6^k 0{,}4^{10-k}$, con k = 0, 1, 2, ..., 9, 10.

a) Se pide $p(X = 0) = \binom{10}{0} 0{,}6^0 0{,}4^{10} \cong 0{,}0001 = 0{,}01\%$

b) $\frac{2}{5}$ de 10 = 4. Se pide $p(X = 4) = \binom{10}{4} 0{,}6^4 0{,}4^6 \cong 0{,}1115 = 11{,}15\%$

a) Se pide $p(X \geq 8) = p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10) =$

$= \binom{10}{8} 0{,}6^8 0{,}4^2 + \binom{10}{9} 0{,}6^9 0{,}4^1 + \binom{10}{10} 0{,}6^{10} 0{,}4^0 \cong 0{,}1673 = 16{,}73\%$