

El alumno contestará a SÓLO 5 ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen

integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del

examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Escribe, si existen, las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva f(x) = |x| exp(–x) en los

puntos de abscisa x = 0 y x = –1.

**Resolución**

.

Para x ≠ 0, f es continua y derivable y

⇒ f es continua en x = 0

⇒ f NO es derivable en x = 0

No existe la recta tangente en x = 0

Como en x = –1 f es derivable, sí que existe la recta tangente en x = –1.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto A(x0, f(x0)) es

rtg: y = f´(x0)(x – x0) + f(x0). En este caso, x0 = –1 ;

;

2.- (2 puntos) Un nadador se encuentra a 2 km de la playa enfrente del puesto de la Cruz Roja. Desea ir a

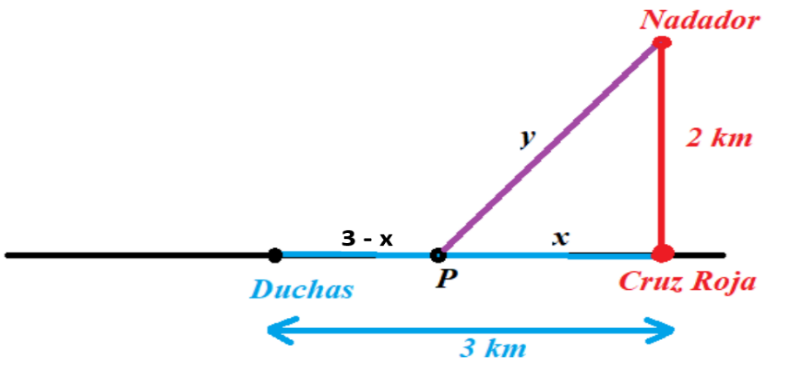
la caseta de las duchas que está en la misma playa a 3 km de distancia del puesto de la Cruz Roja.

Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, determinar a qué lugar debe dirigirse a nado

para llegar a las duchas en el menor tiempo posible.

**Resolución**

Hacemos un dibujo de la situación



Usando el teorema de Pitágoras,

Función a minimizar: el tiempo que se tarda en recorrer “y” km a nado y “3 – x” km andando es

, con 0 ≤ x ≤ 3

.

Elevando al cuadrado, 25x2 = 9x2 + 36, 16x2 = 36, ,

Luego, para se alcanza el tiempo mínimo y el tiempo mínimo es

Conclusión: Para minimizar el tiempo que tarda en llegar a las duchas debe nadar hasta el punto situado

a mitad de distancia entre duchas y cruz roja (a 1,5 km de la cruz roja).

3.- (2 puntos) Dada la función f(x) = (1 – x2) tan(x), demuestra que tiene un máximo relativo en el intervalo (0, π/2).

**Resolución**

Usamos el teorema de Rolle, que dice: Si f(x) es continua en [a, b], derivable en (a, b) y

además, f(a) = f(b) entonces existe por lo menos un c ∈ (a, b), tal que f´(c) = 0.

Lo vamos a usar para f(x) = (1 – x2) tg x en el intervalo [0, 1]. Como f es continua y derivable salvo

en , en particular es continua en [0, 1] y derivable en (0, 1).

Además, f(0) = (1 – 02) tg 0 = 0 = f(1) = (1 – 12) tg 1. Es decir, cumple las hipótesis del teorema de Rolle

Su derivada es f´(x) = –2x tg x + (1 – x2)(1 + tg2x). Por el teorema de Rolle, ∃ c ∈ (0, 1) tal que f´(c) = 0

f´(0) = –2.0 tg 0 + (1 – 02)(1 + tg20) = 1 > 0 ⇒ f es creciente antes de c

f´(1) = –2.1 tg 1 + (1 – 12)(1 + tg21) = –2 tg 1 < 0 ⇒ f es decreciente después de c

Luego, tiene un máximo relativo en c ∈ (0, 1) ⊂ (0, π/2)

4.- (2 puntos) Halla la matriz X que satisface AXA + B = B(2A + I), donde ,

e I es la matriz identidad de orden 2.

**Resolución**

AXA + B = B(2A + I) = B2A + BI = 2BA + B ⇒ AXA = 2BA + B – B ⇒ AXA = 2BA

Como det A = 1 ≠ 0, ∃ A–1. Multiplicamos por A–1 por la derecha y por la izquierda

A–1AXA A–1 = IXI = X = A–12BA A–1 ⇒

5.- (2 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

, halla la matriz A–1b sin calcular la matriz inversa de A, siendo A la matriz de

coeficientes y b la de términos independientes.

**Resolución**

Si , y , AX = b

det A = 1 + a + 1 – a2 – a + a = –a2 + a + 2 = 0 ⇔ , a = –1, a = 2 ; det A = – (a – 2)(a + 1)

Para a ≠ –1, a ≠ 2, ∃ A–1 y X = A–1b. Nos piden X pero sin calcular A–1. Usemos la regla de Cramer para

hallar X:

det Ax = a + a + 2 – a2 – 2a + a = –a2 + a + 2 = det A

det Ay = a – a2 – a + a3 + 2a2 – a3 – a2 + a + 2 – a2 = –a2 + a + 2 = det A

det Az = a + 2 – a2 – a – a2 – a + a2 + 2a = –a2 + a + 2 = det A

Luego, la solución es

Conclusión:

6.- (2 puntos) Dadas las matrices y , halla a para que A2 – A = 12I + B

con I la matriz identidad de orden 2. A continuación, halla la matriz X tal que XA = AX = I.

**Resolución**

.

Operamos,

Igualando, . Por tanto, debe ser a = 4

; det A = –a2 ≠ 0, ∃ A–1 . Como XA = AX = I, entonces

7.- (2 puntos) Dados los planos de ecuaciones analiza según los valores del

parámetro “a” su posición relativa.

**Resolución**

El sistema formado por las ecuaciones de los cuatro planos es

corresponde al sistema

Si a + 3 ≠ 0 (o sea, a ≠ –3), el sistema tiene solución única si, .

Operando, .

O sea, si a = 2 el sistema tiene solución única y los 4 planos se cortan en un único punto

Si a = –3, queda . Vemos que y son paralelos y y los cortan

a ≠ 2 y a ≠ –3 los planos son secantes entre sí en rectas paralelas

8.- (2 puntos) Dado el punto P(2, –1, 3), halla las ecuaciones de los siguientes planos que contienen a P.

(i) Paralelo a π: 4x + 3y – 2z + 4 = 0.

**Resolución**

Los planos paralelos a π son de la forma α: 4x + 3y – 2z + k = 0.

Como α pasa por P, entonces 4.2 + 3(–1) – 2.3 + k = 0 ⇒ k = 1. Luego, α: 4x + 3y – 2z + 1 = 0.

(ii) Perpendicular a la recta

**Resolución**

El plano β que se pide tiene como vector normal el vector director de r, .

Y como β pasa por P, entonces β: 3(x – 2) + 2(y + 1) – 4(z – 3) = 0 ⇒ β: 3x + 2y – 4z + 8 = 0

9.- (2 puntos) Una máquina de café está regulada de modo que la cantidad de café que echa está

distribuida por una normal de media 125 ml y una desviación típica de 20 ml. Calcula:

(i) el porcentaje de vasos que se llenarán con más de 150 ml.

(ii) entre que capacidades (ml) está el 60% de los cafés que dispensa la máquina.

**Resolución**

X = cantidad de café (en ml) ⇒ .

a)

Luego, el porcentaje que se pide es del 10,56%

b) Hallemos k si

. Despejando,

Usando la tabla de N(0, 1) por interpolación, en sentido inverso, y k = 0,845 . 20 = 16,9

Luego, Las capacidades entre las que están el 60% de los cafés que dispensa la máquina son

125 – 16,9 = 108,1 ml y 125 + 16.9 = 141,9 ml.

10.- (2 puntos) El 2% de la población mundial padece una cierta enfermedad. Se dispone de una prueba

para detectarla, pero no es fiable. En el 98% de los casos da positivo en personas enfermas.

Y en el 4% de los casos da positivo en personas sanas. Halla

(i) la probabilidad de que una persona esté sana, habiendo que ha salido la prueba positiva.

(ii) habiendo salido la prueba negativa, la probabilidad de que una persona esté enferma.

**Resolución**

A = la persona está enferma B = dar positivo en el test. Según el enunciado, p(A) = 0,02 [ p(Ac) = 0,98 ]

p(B/A) = 0,98 p(B/Ac) = 0,04. Por el teorema de probabilidad total,

p(B) = p(A)p(B/A) + p(Ac)p(B/Ac) = 0,02 . 0,98 + 0,98 . 0,04 = 0,0588

i) Piden =

ii) Piden = =