

MATEMÁTICAS II

➢ Responda en el pliego en blanco a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2,5 puntos.

➢ Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas

conllevarán la anulación de la(s) ultima(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. En una protectora de animales se dan tres tipos de alimentos a tres razas de perros distintas.

Cada perro de la raza 1 consume, por semana, un promedio de 2 unidades del alimento A y 1 unidad del

alimento C. Cada perro de la raza 2 consume, por semana, un promedio de 1 unidad del alimento A

y 1 unidad del alimento C. El consumo semanal promedio de la raza 3 es de 3 unidades de

alimento A, 1 unidad de alimento B y 3 unidades de alimento C.

Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C. Se supone que toda la comida que se proporciona se consume.

(a) (0,75 puntos) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice este problema y escríbelo

matricialmente.

**Resolución**

Representamos en una tabla los datos del problema:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **nº de perros** | **nº de unidades de A** | **nº de unidades de B** | **nº de unidades de C**  |
| **raza 1** | x | 2x | 0x | 1x |
| **raza 2** | y | 1y | 0y | 1y |
| **raza 3** | z | 3z | 1z | 3z |
| **total** | x + y | 2x + y + 3z | z | x + y + 3z |

Según el enunciado, , que en forma matricial es

(b) (1 punto) ¿Cuántos ejemplares de cada raza puede coexistir en la protectora?

**Resolución**

Resolviendo el sistema, como z = 30,

Restando las ecuaciones, x = 100 ; y = 220 – x = 220 – 100 = 120

De la raza 1 hay 100 perros, 120 de la raza 2 y hay 30 perros de la raza 3

(c) (0,75 puntos) Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B, ¿existiría otra distribución del número

de ejemplares de cada raza que permitiese mantener las unidades compradas cada semana?

**Resolución**

En este caso, camia la 2ª ecuación z = 30 por y + z = 30 y queda el sistema

 que corresponde

al sistema ; z = 90 ; (imposible por ser negativo)

La respuesta a la pregunta es NO

Pregunta 2. Sea x ∈ R y la matriz

(a) (1,5 puntos) Da el rg(A) según los valores de x. Para x = 1, comprueba que existe A–1 y calcúlala.

**Resolución**

det A = 3x + 8 – 6 – 4x = 2 – x = 0 ⇔ x = 2.

- Si x ≠ 2, det A ≠ 0 y rg A = 3

- Si x = 2, , det A = 0 y como el menor , rg A = 2

Para x = 1, sabemos que A es invertible, ; det A = 2 – 1 = 1 ≠ 0

(b) (1 punto) Toma x = 1. Supongamos que B es una matriz 3 x 3 con det(B) = 5. Calcula det(AB).

Razona cuál debe ser el valor de

**Resolución**

Para x = 1, sabemos que det A = 1. Luego, det(AB) = det A det B = 1 . 5 = 5

Por otra parte, como AB es de orden 3 x 3, entonces

Pregunta 3. Se considera la función

(a) (1 punto) Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

**Resolución**

Como el denominador se anula para x = 1, entonces Dom f = R – {1}

 ⇒ f tiene una asíntota vertical en x = 1 de ecuación A.V. : x = 1

Además, y

 ⇒ f tiene asíntota horizontal en ±∞, que es la recta de

ecuación y = –1

 ⇒ la gráfica está “por encima” de la asíntota en +∞

 ⇒ la gráfica está “por debajo” de la asíntota en –∞

(b) (1 punto) Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los

intervalos de crecimiento y decrecimiento.

**Resolución**

 ; ⇒ f es decreciente. No hay máximos ni mínimos

 .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |   |  |   |
| f´´(x) | – | ∄ | + |
| f(x) | convexa | ∄ | cóncava |

Hagamos una tabla de signos de f´´(x)

No hay puntos de inflexión

(c) (0,5 puntos) Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

**Resolución**



Pregunta 4. Dada la función

(a) (1,25 puntos) Calcula una primitiva que pase por el punto (0, 1).

(b) (1,25 puntos) Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas x = 0 y

**Resolución**

(a) Las primitivas de f son . Como la primitiva pasa por (0, 1),

entonces . La primitiva ess

(b) , f(x) = 0 ⇔ ⇔ ó (no válido)

El área que se pide es ; es primitiva. Por Barrow,

Pregunta 5. Dado el punto A(0, –1, 1) y el plano π: x + y + z + 3 = 0.

(a) (1,5 puntos) Calcula el punto B simétrico de A respecto de π.

**Resolución**



– Hallamos la recta r que pasa por A(0, –1, 1) y es ortogonal a π:

Un vector director de r es el vector normal del plano,. Luego,

– Hallamos el punto de corte, Q, entre el plano π y la recta resolviendo el sistema de ecuaciones:

Sustituyendo en la ecuación del plano se tiene k – 1 + k + 3 = 0 ⇒ 2k = –2 ;

Luego, . El punto de corte es

– Por último, hallamos el simétrico B(a, b, c) de A(0, –1, 1) usando que Q es el punto medio del

segmento AB:

 . El punto simétrico que se pide es

(b) (1 punto) Calcula el área del triángulo plano cuyos vértices son A, C(–2, –3, 1) y el origen de

coordenadas.

**Resolución**



A(0, –1, 1) , C(–2, –3, 1) y el origen de coordenadas B(0, 0, 0). Sabemos que el área del triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo generado por los vectores y .

 ;

Pregunta 6. Se consideran los puntos A(1, 1, 1), B(1, 0, 2), C(–1, 1, 3) y D(–1, 0, 1).

(a) (0,75 puntos) Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.

**Resolución**

Como , entonces A, B, C y D no son coplanarios y, por tanto, no existe ningún plano que los contenga.

(b) (0,75 puntos) Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.

**Resolución**

Los vectores y son vectores directores de π.

Luego, un vector normal de π es

Como π pasa por A(1, 1, 1), entonces π : 1(x– 1) + 1(y – 1) + 1(z **‒** 1) = 0 ; π: x + y + z – 3 = 0

Como r pasa por D(–1, 0, 1) y es perpendicular a π ⇒ ,

(c) (1 punto) Calcula el punto P intersección de r: x + 1 = –y = z – 1 y π: x – y – z = 1.

**Resolución**

Hallamos el punto de intersección, P, entre la recta, en forma paramétrica, y el plano π resolviendo el sistema de ecuaciones: Sustituyendo en la ecuación del plano se tiene

–1 + k – (–k) – (1 + k) = 1 ⇒ k = 3 ; . Luego, . El punto de corte es

Pregunta 7. En una empresa 55% de los trabajadores han hecho el curso ‘ChatGPT’. El 30% de los trabajadores que han hecho este curso también han hecho el curso ‘IA’, el 40% de los que no han hecho el

curso ‘ChatGPT’ han realizado el curso ‘IA’.

(a) (1,25 puntos) Tomado un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya realizado el

curso ‘IA’?

(b) (1,25 puntos) Si un trabajador elegido al azar no ha hecho el curso ‘IA’, ¿cuál es la probabilidad de

que sí tenga el curso de ‘ChatGPT’?

**Resolución**

A = hacer el curso ‘ChatGPT’ B = hacer el curso ‘IA’. Según el enunciado,

p(A) = 55% = 0,55 [en consecuencia, p(Ac) = 1 – p(A) = 1 – 0,55 = 0,45]

p(B/A) = 30% = 0,3 [en consecuencia, p(Bc/A) = 1 – p(B/A) = 1 – 0,3 = 0,7] y p(B/Ac) = 40% = 0,4

a) Piden p(B), que por el teorema de probabilidad total es

p(B) = p(A) p(B/A) + p(Ac) p(B/Ac) = 0,55.0,3 + 0,45.0,4 = 0,345 = 34,5%

b) Se pide

Pregunta 8. Una empresa cafetera realiza una encuesta a 10000 individuos sobre el tipo de café que

compran. Los resultados son: 8000 dicen comprar café torrefacto, 4000 café natural y 3000 ambos tipos

de café

(a) (0,5 puntos) Si se elige un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que compre alguno de los dos

tipos de café?

**Resolución**

T = comprar café torrefacto N = comprar café natural. Según el enunciado,

Se pide p(T ∪ N) = p(T) + p(N) – p(T ∩ N) = 0,8 + 0,4 – 0,3 = 0,9 = 90%

(b) (1 punto) Se selecciona un individuo y se le pregunta si compra café natural. Se repite la

operación 100 veces, pudiendo repetirse el individuo seleccionado. Calcule aproximando por una

distribución normal si fuese posible, la probabilidad de que no más de 50 individuos compre café natural.

**Resolución**

Si X = número de individuos que compra café natural en un grupo de 100, entonces X → B(100 ; 0,4).

Se puede hacer aplicando la aproximación de la binomial por la normal y la corrección por continuidad de Yates: “Si una v.a. X sigue una binomial B(n , p) que cumple: n ≥ 30, np ≥ 5 y n(1 – p) ≥ 5, entonces, la v.a. X se puede sustituir por otra v.a. X´ → N(μ, σ), siendo μ la media de X, μ = np

y σ la desviación típica, . Es decir, “

Aquí, n = 100 ≥ 30 , p = 0,4 ; np = 40 ≥ 5 y n(1 – p) = 100.0,6 = 60 ≥ 5 ; X → B(100 ; 0,4)

 ; . Tipificando, .

Piden p(X ≤ 50). Como los valores de X menores o iguales que 50, son .., 48, 49, 50 tomamos un intervalo de la recta que contenga exactamente esos números. Por ejemplo, tomamos (–∞; 50,5).

Entonces, p(X ≤ 50) =

(c) (1 punto) Si en el apartado anterior solo se seleccionasen 10 individuos, ¿cuál es la probabilidad de

que 5 compren café natural?

∗ Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: F(x) = P(Z ≤ x), F(0) = 0,5, F(0,15) = 0,5596,

F(2,0412) = 0,9793, F(0,9793) = 0,8340, F(0,5596) = 0,7112, F(0,6294) = 0,7356, F(0,8159) = 0,7939,

F(0,9) = 0,8159, F(1,28) = 0,9.

**Resolución**

Si Y = número de individuos que compra café natural en un grupo de 10, entonces Y → B(10 ; 0,4).

La ley de probabilidad es , con k = 0, 1, 2, 3, …, 8, 9, 10.

La probabilidad que se pide es