
UC | Universidad de Cantabria

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD JUNIO 2024

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES
- Debe escoger solo cuatro ejercicios entre los ocho de los que consta el examen.

- Si realiza más de cuatro ejercicios solo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.

- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.

- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]
Dentro de un grupo de estudiantes que realiza un examen hay tres a los que les sale mejor de lo que esperaban. Estos son Antonio, María y Paula. Antonio obtiene la mitad de la nota de Paula más un tercio de la nota de María. El doble de la nota de María es igual a la de Antonio más la de Paula y Paula saca dos puntos más que Antonio. Razone si el enunciado expuesto es posible. En caso afirmativo, calcule la nota de cada estudiante.

Resolución

Sean x, y, z las notas de Antonio, María y Paula, respectivamente. Según el enunciado,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}y \\ 2y = x + z \\ z = x + 2 \end{cases} \; .6 \; \begin{cases} 6x = 3z + 2y \\ x - 2y + z = 0 \\ -x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x + 2y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -x + z = 2 \end{cases}$$

. Estudiémoslo usando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f1 + 6f2 \\ \\ f3 + f2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -10 & 9 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} f3 : 2 \begin{pmatrix} 0 & -10 & 9 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f1 - 9f3 \\ \\ f3 + f2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que corresponde al sistema $\begin{cases} -y = -9 \\ x - 2y + z = 0 \\ -y + z = 1 \end{cases}$, que como tiene solución única el enunciado expuesto es posible. Hallemos la solución: y = 9 ; z = 1 + y = 1 + 9 , z = 10 ; x = 2y – z = 2.9 – 10 , x = 8

Antonio ha sacado un 8, María un 9 y Paula un 10.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]
Considere la función f(x) = x ln(x), con x > 0.
1) [0,75 PUNTOS] Calcule la derivada de f(x).

Resolución $f'(x) = 1.\ln x + x.\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 + \ln x$

2) [0,75 PUNTOS] Calcule una primitiva de f(x).

Resolución

Hallemos $\int f(x)\,dx$ por el método de integración por partes $\begin{bmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = x\,dx & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix}$

Las primitivas de f son $F_k(x) = \int f(x)\,dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + k = \frac{x^2(2\ln x - 1)}{4} + \text{k}$

Una primitiva de f(x) es $F(x) = \frac{x^2(2\ln x - 1)}{4}$

3) [1 PUNTOS] Calcule el área del recinto limitado por f(x), el eje OX de abscisas y las rectas x = 1 y x = 2.

Resolución

Observa que f(x) = 0 ⇔ x = 0 ó ln x = 0 ⇔ x = 0 ó x = 1. Luego, al ser f continua, la gráfica de f no corta al eje X en el intervalo (1, 2). Además, como f(1,5) = 1,5 ln(1,5) > 0, resulta que la gráfica de f(x) está por encima del eje X en (1, 2) y como F(x) es una primitiva de f(x), por la regla de Barrow el área que se pide es $A = F(2) - F(1) = \frac{2^2(2\ln 2 - 1)}{4} - \frac{1^2(2\ln 1 - 1)}{4} = \frac{8\ln 2 - 3}{4} \cong 0{,}64\ u^2$

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]
Considere la recta $r: \begin{cases} x + y + z + 5 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ y el plano π: 2x + y – az = 3 en función del parámetro a ∈ R.
Razone si es posible asignar algún valor al parámetro a para que:
1) [0,75 PUNTOS] la recta esté contenida en el plano. En caso afirmativo, dé un valor para a.
2) [0,75 PUNTOS] la recta y el plano sean paralelos. En caso afirmativo, dé un valor para a.
3) [1 PUNTO] la recta y el plano se corten. En caso afirmativo, dé un valor para a y dónde se cortan.

Resolución

Un vector normal de π es $\overrightarrow{n} = (2, 1, -a)$; r está dada como intersección de dos planos. Su vector director se obtiene como el producto vectorial de los vectores normales de los planos:

$$\overrightarrow{d} = (1,1,1)\ x\ (1,2,-1) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-3, 2, 1)$$

$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{d} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{n}.\overrightarrow{d} = 0 \Leftrightarrow 2(-3) + 1.2 + (-a).1 = 0 \Leftrightarrow a = -4$

Si a = –4, r ⊂ π ó r // π y π: 2x + y + 4z = 3 y si a ≠ –4 r y π son secantes, se cortan.

Hallemos un punto de r: para z = 0, $\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$, restando y = 5 ; x = –2.5 = –10 ⇒ A(–10, 5, 0) ∈ r

$r: \begin{cases} x = -10 - 3t \\ y = 5 + 5t \\ z = t \end{cases}$. Como 2(–10) + 5 + 4.0 = –15 ≠ 3, A ∉ π ⇒ a = –4, r // π

1) No existe ningún valor de a porque r // π ó r y π son secantes 2) a = –4

3) a ≠ –4. Tomemos, por ejemplo, a = 0, π:2x + y = 3 y hallemos el punto de corte entre r y π:
2(–10 – 3t) + 5 + 5t = 3 ⇒ t = –18. El punto de corte es P(44, –85, –18)

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Ciertos síntomas pueden deberse a tres enfermedades diferentes que no se padecen de forma simultánea. Con una probabilidad 0,7 se deben a la enfermedad 1 (E1, con una probabilidad 0,2 a la enfermedad 2 (E2 y con una probabilidad 0,1 a la enfermedad 3 (E3). Existen tres tratamientos diferentes, el A es el adecuado para E2, el B para E3 y el C para E1. Así y todo, cada uno de los tratamientos tiene cierto poder de curación de cada una de las enfermedades. La probabilidad de ser curado con cierto tratamiento cuando se tiene cierta enfermedad viene dada para cada tratamiento y enfermedad por la siguiente tabla.

	E1	E2	E3
Trat.A	0,6	1	0,4
Trat.B	0,65	0,5	0,9
Trat.C	0,75	0,2	0,5

Note que, de acuerdo con la misma, la probabilidad de curarse con el tratamiento A cuando se tiene E3 es de 0,4. ¿Qué tratamiento debemos administrar a un paciente con dichos síntomas, teniendo en cuenta que no sabemos a priori cuál de las tres enfermedades padece?

Resolución

Sean E1, E2, E3 los sucesos tener las enfermedades E1, E2, E3, respectivamente

Sean A, B, C los sucesos curarse con el tratamiento A, B y C, respectivamente

Según el enunciado, $p(E1) = 0{,}7$ $p(E2) = 0{,}2$ $p(E3) = 0{,}1$ $p(A/E1) = 0{,}6$ $p(A/E2) = 1$ $p(A/E3) = 0{,}4$

$p(B/E1) = 0{,}65$ $p(B/E2) = 0{,}5$ $p(B/E3) = 0{,}9$ $p(C/E1) = 0{,}75$ $p(C/E2) = 0{,}2$ $p(C/E3) = 0{,}5$

Hallemos p(A), p(B) y p(C) usando el teorema de probabilidad total y comparemos las probabilidades:

$$p(A) = p(E1)\, p(A/E1) + p(E2)\, p(A/E2) + p(E3)\, p(A/E3) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}66 = 66\%$$

$$p(B) = p(E1)\, p(B/E1) + p(E2)\, p(B/E2) + p(E3)\, p(B/E3) = 0{,}7 \cdot 0{,}65 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 64{,}5\%$$

$$p(C) = p(E1)\, p(C/E1) + p(E2)\, p(C/E2) + p(E3)\, p(C/E3) = 0{,}7 \cdot 0{,}75 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 61{,}5\%$$

Como la probabilidad más alta es la p(A), el tratamiento más eficaz en la cura es el A.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Considere la ecuación AX = B, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

1) [0,25 PUNTOS] Calcule el determinante de A.
2) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa y, en caso afirmativo, calcule la inversa de A.
3) [0,25 PUNTOS] Determine el número de filas y de columnas de X para que la ecuación tenga sentido.
4) [1 PUNTO] Calcule el valor de X.

Resolución

1) y 2) det A = –1 ≠ 0, $\exists\, A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adj\ A)^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) Recordemos que $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A_{3\,x\,3}$; $X_{m\,x\,n}$; $B_{3\,x\,2}$. Para que se pueda realizar AX debe ser m = 3, quedando $(AX)_{3\,x\,n}$ y para que AX = B debe ser n = 2. Luego, X tiene 3 filas y 2 columnas, es de orden 3 x 2.

4) En la ecuación AX = B, multiplicando por A^{-1}, por la izquierda, $A^{-1}AX = IX = X = A^{-1}B$

La solución de la ecuación es $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+x}, & si\ x \leq 10 \\ \sqrt{x+1}, & si\ x > 10 \end{cases}$

1) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de f(x).

Resolución

Como $x^2 + x = x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1$ y $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$, Dom f = R – {–1 ; 0}

2) [1 PUNTO] Determine los intervalos, del dominio de definición, en que f(x) es continua.

Resolución

Para x ≠ –1, x ≠ 0, x ≠ 10 f es continua por ser el resultado de operar con funciones continuas.

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow$ f NO es continua en x = –1 porque no existe f(–1). La discontinuidad es evitable

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \pm\infty \Rightarrow$ f NO es continua en x = 0. La discontinuidad es de salto infinito

$\lim\limits_{x\to 10^-} f(x) = f(10) = \frac{1}{10} \neq \lim\limits_{x\to 10^+} f(x) = \sqrt{10+1} = \sqrt{11} \Rightarrow$ f NO es continua en x = 10.
Discontinuidad de salto finito

Luego, f sólo es continua en R – {–1 ; 0 ; 10}

3) [1 PUNTO] Determine si f(x) tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

Resolución

En x = 0 hay una discontinuidad es de salto infinito ⇒ asíntota vertical de ecuación A.V. : x = 0 (eje Y)

Además, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

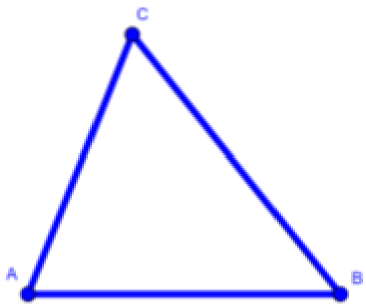
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ ⇒ NO hay asíntota horizontal en $+\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$ ⇒ hay asíntota horizontal en $-\infty$ de ecuación A.H. : y = 0 (eje X)

Si $x \to -\infty$, $y_{gráfica} - y_{asíntota} = \frac{1}{x} - 0 = \frac{1}{x} < 0$ ⇒ la gráfica está "por debajo" de la asíntota en $-\infty$

Ejercicio 7 [2,5 PUNTOS]
Sean A = (6, 2, −1), B = (3, 0, 5) y C = (−2, 1, 2) los vértices de un triángulo.
1) [1,25 PUNTOS] Calcule los ángulos internos del triángulo.
2) [1,25 PUNTOS] Calcule el área del triángulo.

Resolución



$\overrightarrow{AB} = (-3,\ -2, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (-8,\ -1, 3)$

1)
Si α es el ángulo en el vértice A, sabemos que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| . \cos\alpha$

$$\alpha = arccos\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = arccos\frac{24+2+18}{\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+6^2}\cdot\sqrt{(-8)^2+(-1)^2+3^2}} = arccos\frac{44}{7\sqrt{74}} \cong 43{,}05 = 43^{º}\ 3'\ 18''$$

Si β es el ángulo en el vértice B, sabemos que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| . \cos\beta$
$\overrightarrow{BA} = (3,\ 2, -6)$, $\overrightarrow{BC} = (-5,\ 1, -3)$

$$\beta = arccos\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = arccos\frac{-15+2+18}{\sqrt{3^2+2^2+(-6)^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+1^2+(-3)^2}} = arccos\frac{5}{7\sqrt{35}} \cong 83{,}07 = 83^{º}\ 3'\ 55''$$

Si γ es el ángulo en el vértice C, como la suma de los ángulos es 180º,

entonces γ ≅ 180 – 43,05 – 83,07 = 53,88º = 53º 52´ 48´´

2) Sabemos que el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo generado por los vectores

O sea, $A(triángulo) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AC}\right|$; $\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3 & -2 & 6 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (0, -39, -13)$

$A(triángulo) = \frac{1}{2} 13|(0,\ -3,\ -1)| = \frac{13}{2}\sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \frac{13\sqrt{10}}{2}\ u^2 \cong 20{,}55\ u^2$

Ejercicio 8 [2,5 PUNTOS]
La población de mujeres de 18 años sigue una distribución normal de media una altura de 175 cm y una desviación estándar de 7,41 cm. Supongamos que la probabilidad de que una persona se llame Lucía es 0,006.
1) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía y mida más de 180 cm.
2) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía o mida más de 180 cm.

Resolución

X = altura $\to N(175\,;7{,}41) \;\Rightarrow\; Z = \frac{X-175}{7{,}41} \to N(0,1)$. Sea también el suceso A = llamarse Lucía

1) Se pide $p(A \cap X \geq 180) = p(A)\,p(X \geq 180) = 0{,}006p(X \geq 180)$, porque son sucesos independientes

$$p(X \geq 180) = p\left(\frac{X-175}{7{,}41} \geq \frac{180-175}{7{,}41}\right) \cong p(Z \geq 0{,}67) = 1 - p(Z < 0{,}67) = 1 - 0{,}7486 = 0{,}2514$$

La probabilidad que se pide es 0,006 . 0,2514 = 0,0015088 ≅0,15%

2) Se pide $p(A \cup X \geq 180) = p(A) + p(X \geq 180) - p(A \cap X \geq 180) = 0{,}006 + 0{,}2514 - 0{,}0015088$

La probabilidad que se pide es aproximadamente 0,2559 = 25,59%