	Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad **Castilla y León**	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	**EXAMEN** **Nº páginas: 2** (tabla adicional)

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.
CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

Problemas (a elegir tres)
P1. En una concentración deportiva, el médico indica que cada deportista debe tomar entre un mínimo de 110 mg y un máximo de 250 mg de vitamina C al día, y también entre 80 y 150 mg de magnesio. Los deportistas toman comprimidos de VITAMIN que contienen, cada uno, 40 mg de vitamina C y 10 mg de magnesio. Asimismo, ingieren comprimidos MAGNE con 10 mg de vitamina C y 20 mg de magnesio cada uno. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de comprimidos de cada tipo que son necesarios si se desea tomar el menor número posible de comprimidos e ingerir la dosis necesaria de vitamina C y de magnesio.

Resolución

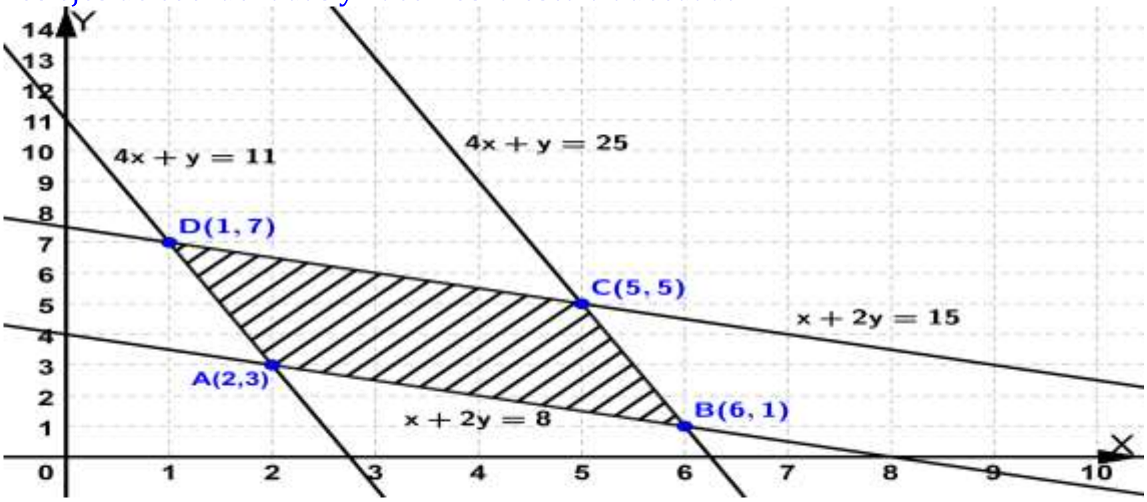
a) Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de comprimidos	**mg de vitamina C**	**mg de magnesio**
VITAMIN	x	40x	10x
MAGNE	y	10y	20y
total	x + y	40x + 10y	10x + 20y

La función a optimizar (minimizar) es el nº total de comprimidos f(x, y) = x + y

Las restricciones son $\begin{cases} 110 \leq 40x + 10y \leq 250 \\ 80 \leq 10x + 20y \leq 150 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} :10 \\ :10 \\ \ \end{matrix}$ $\begin{cases} 11 \leq 4x + y \leq 25 \\ 8 \leq x + 2y \leq 15 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Veamos en qué vértice, A(2, 3), B(6, 1), C(5, 5) ó D(1, 7), alcanza el valor mínimo el nº total de comprimidos $f(x, y) = x + y$

$$f(A) = f(2, 3) = 2 + 3 = 5 \qquad f(B) = f(6, 1) = 6 + 1 = 7$$

$$f(C) = f(5, 5) = 5 + 5 = 10 \qquad f(D) = f(1, 7) = 1 + 7 = 8$$

El mínimo es 5 y se obtiene tomando 2 comprimidos de VITAMIN y 3 comprimidos de MAGNE.

P2. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ ky + (5-k)z = -10 \\ x - 3y + kz = 10 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de k.
b) Resolver el sistema para k = 1

Resolución

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & k & 5-k \\ 1 & -3 & k \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & k & 5-k & -10 \\ 1 & -3 & k & 10 \end{pmatrix}$

$\det A = k^2 - 15 + 3k - 5k + 15 - 3k = k^2 - 5k = k(k-5) = 0 \Leftrightarrow k = 0, k = 5$

– Si $k \neq 0$ y $k \neq 5$, rg A = 3 = rg A* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si k = 0, det A = 0, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, rg A = 2

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 1 & -3 & 0 & 10 \end{pmatrix} \underset{f3-f1}{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \underset{f3=-f2}{\overset{f2\,:\,5}{}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$, rg A* = 2. Luego, rg A* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si k = 5, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 1 & -3 & 5 & 10 \end{pmatrix} \underset{f3-f1}{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.
La 3ª fila corresponde a la ecuación 0 = 10, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

b) Para k = 1, sabemos que el sistema es compatible determinado, tiene solución única. Resolvámoslo:

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -10 \\ 1 & -3 & 1 & 10 \end{pmatrix} \underset{f3-f2}{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} \underset{f3\,:\,(-2)}{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ que corresponde

al sistema $\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ y + 4z = -10 \\ 2z = -5 \end{cases}$; $z = \frac{-5}{2}$; $y + 4\frac{-5}{2} = -10$, $y = 0$; $x - 3.0 + 5\frac{-5}{2} = 0$, $x = \frac{25}{2}$

La solución única es $x = \frac{25}{2}$, $y = 0$, $z = \frac{-5}{2}$

P3. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & si\ x \leq 1 \\ a + \ln x, & si\ x > 1 \end{cases}$

a) Determinar el valor de a para que f(x) sea continua en todo su dominio.

Resolución

Para x ≠ 1, f es continua en su dominio, que es R, independientemente del valor de a por ser el resultado de operar con funciones continuas.

Como debe ser continua en x = 1, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow 1^2 + 1 - 2 = a + \ln 1 \Rightarrow a = 0$

Conclusión: debe ser $a = 0$

b) Para a = 1, estudiar los puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos.

Resolución

Para a = 1, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & si\ x \leq 1 \\ 1 + \ln x, & si\ x > 1 \end{cases}$, por el a) sabemos que f es discontinua en x = 1.

Como f(0) = 0^2 + 0 – 2 = –2 ⇒ La gráfica de f corta al eje Y en el punto (0, –2)

Por otra parte, x ≤ 1, $x^2 + x - 2 = 0$, $x = \frac{-1 \pm 3}{2}$, $x = -2, x = 1$; $x > 1,\ 1 + \ln x > 0$, (no corta al eje X)

La gráfica de f corta al eje X en los puntos (–2, 0) y (1, 0)

Para x ≠ 1, f es derivable y $f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & si\ x < 1 \\ \frac{1}{x}, & si\ x > 1 \end{cases}$; f´(x) = 0 ⇔ $x = \frac{-1}{2}$

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

	$\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$	$\frac{-1}{2}$	$\left(\frac{-1}{2}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
f´(x)	–	0	+	∄	+
f(x)	decreciente	mínimo	creciente	discontinua	creciente

f es decreciente en $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$ y creciente en $\left(\frac{-1}{2}, +\infty\right) - \{1\}$.

Mínimo relativo: $x = \frac{-1}{2}, y = f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \frac{-1}{2} - 2 = \frac{-9}{4}$, punto $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-9}{4}\right)$. No hay máximos.

P4. La temperatura (en grados centígrados) del agua del mar Mediterráneo ha cambiado con el tiempo según la función T(x), donde x representa los años transcurridos desde el inicio de 2010:

$$T(x) = \begin{cases} 22 + 5{,}5x - 1{,}5x^2, & si\ 0 \leq x < 3 \\ \frac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2}, & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

a) Estudiar si la temperatura del agua ha cambiado de forma continua a lo largo de los años.

Resolución

a) Para x ≠ 3, T(x) es continua porque las funciones polinómicas y racionales lo son.

$$\lim_{x \to 3^-} T(x) = 22 + 5{,}5.3 - 1{,}5.3^2 = 25 = \lim_{x \to 3^+} T(x) = T(3) = \frac{52.3^2 + 3.3 + 23}{2.3^2 + 2} = \frac{500}{20} = 25$$

T(x) es continua en x = 3 ⇒ T(x) es continua en su dominio, que es [0, +∞)

Conclusión: la temperatura del agua ha cambiado de forma continua a lo largo de los años

---

b) Hallar la temperatura del agua al inicio del año 2014 y razonar cuál se prevé que será la temperatura del agua dentro de muchos años.

Resolución

a) La temperatura del agua al inicio del año 2014 es el valor $T(4) = \frac{52.4^2 + 3.4 + 23}{2.4^2 + 2} = \frac{867}{34} = 25{,}5$ ºC

Por otra parte, la temperatura del agua dentro de muchos años

es $\lim_{x \to +\infty} T(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2} = \frac{52}{2} = 26$ ºC

P5. El número de viajes realizados anualmente por habitantes de Castilla y León a comunidades limítrofes sigue una distribución normal cuya desviación típica es σ = 10. Si seleccionamos una muestra de 625 viajeros, la media de viajes realizados por los mismos es de 16.
a) ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media de viajes anuales en toda la población para un nivel de significación del 4%?

Resolución

X = nº de viajes → $N(\mu, 10)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del 100% – 4% = 96% para estimar la media de viajes, μ, es $I_c = (\overline{x} - E, \overline{x} + E)$, siendo $\overline{x} = 16$ la media de una muestra de tamaño n = 625 y $E = z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

$z_{\alpha/2}$ es el valor de la N(0, 1) que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1 + n_c}{2} = \frac{1 + 0{,}96}{2} = 0{,}98$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0{,}98 \xrightarrow{\textit{usando la tabla de la } N(0,1) \textit{ por interpolación}} z_{\alpha/2} = 2{,}055$.

Sustituyendo, $E = z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}055.\frac{10}{\sqrt{625}} = 0{,}822$; $I_c = (16 - 0{,}822\, ;\, 16 + 0{,}822) = (15{,}178\, ;\, 16{,}822)$

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 500 y un nivel de confianza del 90%?

Resolución

Sabemos que $E = z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es el máximo error de estimación y σ = 10, n = 500

$z_{\alpha/2}$ es el valor de la N(0, 1) que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1 + n_c}{2} = \frac{1 + 0{,}9}{2} = 0{,}95$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0{,}95 \xrightarrow{\textit{usando la tabla de la } N(0,1) \textit{ por interpolación}} z_{\alpha/2} = 1{,}645$.

Nos piden hallar el error, $E = z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645.\frac{10}{\sqrt{500}} \cong 0{,}7357$

P6. En un instituto, 44 de cada 100 chicas y 5 de cada 10 chicos de segundo curso de Bachillerato están matriculados en la asignatura Empresa y diseño de modelos de negocio. Hay 150 chicas y 75 chicos en segundo curso de Bachillerato.
a) Si se elige un estudiante al azar de segundo curso de Bachillerato, hallar la probabilidad de que no esté matriculado en Empresa y diseño de modelos de negocio.
b) Sabiendo que el estudiante elegido está matriculado en Empresa y diseño de modelos de negocio, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

Resolución

A = ser chica   M = estar matriculado en la asignatura Empresa y diseño de modelos de negocio

Como hay 225 estudiantes, 150 chicas y 75 chicos, $p(A) = \frac{150}{225} = \frac{2}{3}$ (y $p(A^c) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Como 44 de cada 100 chicas están matriculados en la asignatura Empresa y diseño de modelos de negocio, entonces $p(M/A) = \frac{44}{100} = \frac{11}{25}$

Como 5 de cada 10 chicos están matriculados en la asignatura Empresa y diseño de modelos de negocio, entonces $p(M/A^c) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

a) Como, por el teorema de probabilidad total, $p(M) = p(A)\, p(M/A) + p(A^c)\, p(M/A^c) =$

$= \frac{2}{3}\frac{11}{25} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{23}{50}$, entonces la probabilidad que se pide es $p(M^c) = 1 - \frac{23}{50} = \frac{27}{50} = 0{,}54 = 54\%$

b) Se pide $p(A/M) = \frac{p(A\cap M)}{p(M)} = \frac{p(A)\,p(M/A)}{p(M)} = \frac{\frac{2}{3}\frac{11}{25}}{\frac{23}{50}} = \frac{\frac{22}{75}}{\frac{23}{50}} = \frac{44}{69} \cong 0{,}6377 = 63{,}77\%$

Cuestiones (a elegir una)

C1. Despejar la incógnita X en la ecuación matricial C(A + X) = B – 2X

Resolución

Operando, CA + CX = B – 2X = B – 2IX ; trasponiendo términos, CX + 2IX = B – CA

Sacando factor común X, por la derecha, (C + 2I)X = B – CA

Podemos despejar X siempre que C + 2I sea invertible. En tal caso, multiplicando por (C + 2I)−1, por la izquierda $(C + 2I)^{-1}(C + 2I)X = IX = X = (C + 2I)^{-1}(B - CA)$

C2. Calcular el área encerrada bajo la curva $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ y el eje OX en el intervalo $[-2, -1]$.

Resolución

Observa que $f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 2 = 2$, $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 2 = 0$

Por otra parte, $f'(x) = 3x^2 + 6x = x(3x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2$; $f''(x) = 6x + 6$;

$f''(0) = 6.0 + 6 = 6 > 0$ (mínimo en $x = 0$) $f''(-2) = 6(-2) + 6 = -6 < 0$ (máximo en $x = -2$)

Deducimos que $f(x) > 0$ en el intervalo $(-2, -1)$

El área que se pide es $A = \int_{-2}^{-1} f(x)\ dx$; una primitiva es $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x = \frac{x^4 + 4x^3 - 8x}{4}$

Por la regla de Barrow, $A = F(-1) - F(-2) = \frac{(-1)^4 + 4(-1)^3 - 8(-1)}{4} - \frac{(-2)^4 + 4(-2)^3 - 8(-2)}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25\ u^2$

C3. Se lanza tres veces una moneda no trucada. Calcular la probabilidad de que salgan al menos dos caras seguidas

Resolución

Como $p(C) = p(+) = \frac{1}{2}$ y salen al menos 2 caras seguidas en los casos CC+, +CC y CCC, la probabilidad es $p(CC+) + p(+CC) + p(CCC) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$