
CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	ABAU Convocatoria ordinaria 2024 **MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II**	CÓDIGO 40

El examen consta de 6 ejercicios, todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos), de los que puede realizar un MÁXIMO DE 3 combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, sólo se corregirán los tres primeros realizados.

EJERCICIO 1. Álgebra. Considere la ecuación matricial $XA + B = AB^t$, siendo A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz A y el rango de la matriz B.

Resolución

$\det A = 2 - 1 - 2 = -1 \neq 0$. Luego, A tiene inversa.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adj\ A)^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, $\det B = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$. Luego, $\text{rg } B < 3$.

Como el menor de B $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, entonces $\text{rg } B = 2$.

b) Despeje la matriz X en la ecuación matricial y, a continuación, calcule su valor.

Resolución

Trasponiendo términos, $XA = AB^t - B$. Multiplicando por A^{-1}, por la derecha, $XAA^{-1} = XI = (AB^t - B)A^{-1}$.

$$X = (AB^t - B)A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -6 & 7 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2. Álgebra. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + 2y \leq 40 \ ; \ x + y \geq 5 \ ; \ 3x + y \leq 45 \ ; \ x \geq 0$$

a) Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

Resolución

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$x + 2y \leq 40 \rightarrow$ Recta: $x + 2y = 40$

$x = 0, \quad 0 + 2y = 40, \ y = 20$
$y = 0, \quad x + 2.0 = 40, \ \ x = 40$

x	0	40
y	20	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 2.0 \leq 40$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x + y \geq 5 \rightarrow$ Recta: $x + y = 5$

$x = 0, \quad 0 + y = 5, \quad y = 5$
$y = 0, \quad x + 0 = 5, \quad x = 5$

x	0	5
y	5	0

$(0, 0) \rightarrow 0 + 0 \geq 5$ (falso).
La solución es el semiplano cerrado que NO contiene al (0, 0).

$3x + y \leq 45 \rightarrow$ Recta: $3x + y = 45$

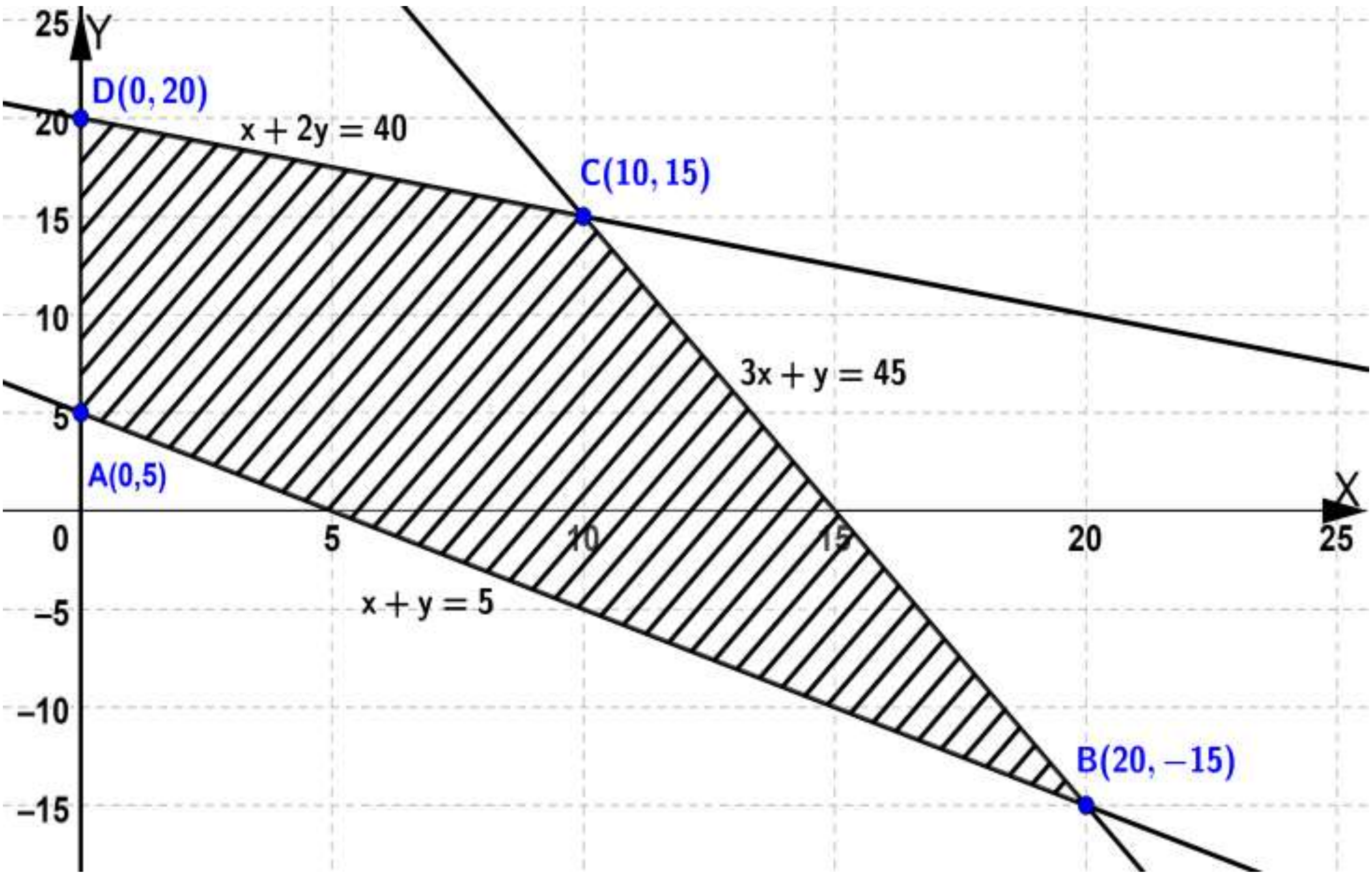
$x = 0, \quad 3.0 + y = 45, \ y = 45$
$y = 0, \quad 3x + 0 = 45, \quad x = 15$

x	0	15
y	45	0

$(0, 0) \rightarrow 3.0 + 0 \leq 45$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).

$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y) ; $(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto).
La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Obtención de los vértices:

$\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 5 \end{cases}$; $0 + y = 5,\ y = 5 \ \rightarrow A(0,5)$

$\begin{cases} 3x + y = 45 \\ x + y = 5 \end{cases}$; restando, $2x = 40,\ x = 20$; $20 + y = 5,\ y = -15 \ \rightarrow B(20,-15)$

$\begin{cases} x + 2y = 40 \\ 3x + y = 45 \end{cases} \cdot 2$ $\begin{cases} x + 2y = 40 \\ 6x + 2y = 90 \end{cases}$; restando, $5x = 50,\ x = 10$; $10 + 2y = 40,\ y = 15 \ \rightarrow C(10,15)$

$\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 40 \end{cases}$; $0 + 2y = 40,\ y = 20 \ \rightarrow D(0,20)$

b) Calcule el punto o puntos de esa región donde la función $f(x, y) = 2x - 3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

Resolución

Veamos en qué vértices alcanza el valor mínimo y máximo f(x, y) = 2x – 3y:

f(A) = f(0, 5) = 2.0 – 3.5 = –15 f(B) = f(20, –15) = 2.20 – 3.(–15) = 85

f(C) = f(10, 15) = 2.10 – 3.15 = –25 f(D) = f(0, 20) = 2.0 – 3.20 = –60

El valor mínimo es –60 y se alcanza D(0, 20), o sea para x = 0, y = 20

El valor máximo es 85 y se alcanza B(20, –15), o sea para x = 20, y = –15

EJERCICIO 3. Análisis. El número de vehículos vendidos por un concesionario a lo largo del último año se estima que viene dado por la función $N(t) = \begin{cases} 28 - (t-4)^2, & si\ 0 \le t < 6 \\ (t-10)^2 + 8, & si\ 6 \le t \le 12 \end{cases}$, en donde t es el tiempo transcurrido en meses.

a) Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento del número de vehículos vendidos. ¿Cuál ha sido el mayor número de vehículos vendidos? ¿Y el menor? ¿En qué momentos se han producido? Justifique sus respuestas.

Resolución

Si t ≠ 6, la función N(t) es continua y derivable (por ser polinómica) , $N'(t) = \begin{cases} -2(t-4), & si\ 0 \le t < 6 \\ 2(t-10), & si\ 6 < t \le 12 \end{cases}$

$\lim_{t \to 6^-} N(t) = 28 - (6-4)^2 = 24 = \lim_{t \to 6^+} N(t) = N(6) = (6-10)^2 + 8 = 24 \Rightarrow$ es continua en t = 6.

$\lim_{t \to 6^-} N'(t) = -2(6-4) = -4 \neq \lim_{t \to 6^+} N'(t) = 2(6-10) = -8 \Rightarrow$ NO es derivable en t = 6.

0 ≤ t < 6 , N´(t) = 0 ⇔ –2(t – 4) = 0, t = 4 ; 6 < t ≤ 12 , N´(t) = 0 ⇔ 2(t – 10) = 0, t = 10

Hagamos una tabla de signos de N´(t):

	(0, 4)	4	(4, 6)	6	(6 , 10)	10	(10, 12)
N´(t)	+	0	–	∄	–	0	+
N(t)	creciente	máximo	decreciente	decreciente	decreciente	mínimo	creciente

N(t) es creciente en (0, 4) ∪ (10, 12) y decreciente en (4, 10)

Es decir, el número de vehículos vendidos crece hasta abril luego decrece de abril a octubre y vuelve a crecer desde octubre a final de año

---

Máximo relativo: $t = 4,\ N(4) = 28 - (4-4)^2 = 28$, punto $(4, 28)$

Mínimo relativo: $t = 10,\ N(10) = (10-10)^2 + 8 = 8$, punto $(10, 8)$

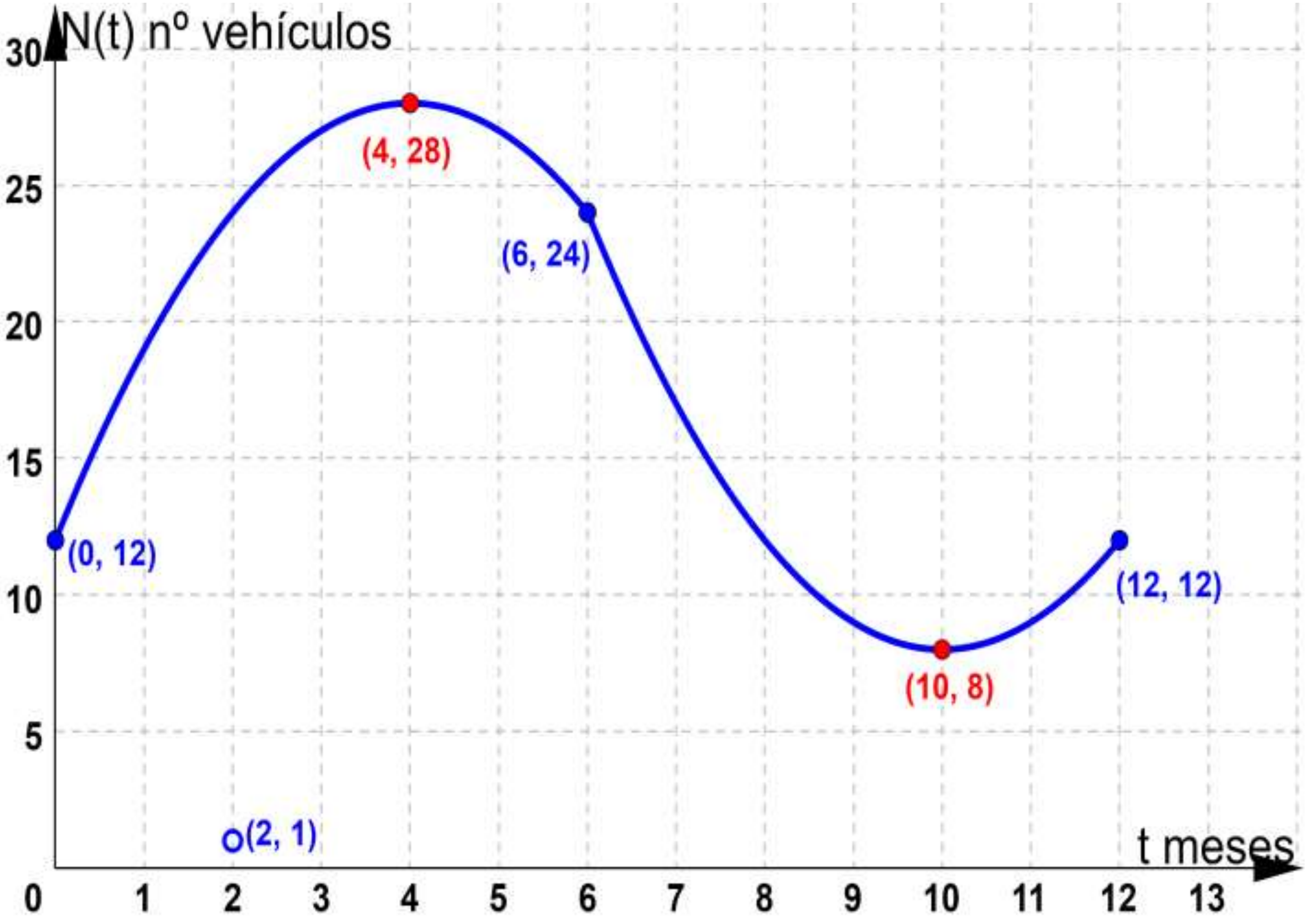
Además, $N(0) = 28 - (0-4)^2 = 12$ y $N(12) = (12-10)^2 + 8 = 12$

El máximo número de vehículos vendidos es 28 y se da en t = 4, en abril

El mínimo número de vehículos vendidos es 8 y se da en t = 10, en octubre

b) Con la información del apartado anterior, represente la gráfica de la función.

Resolución



c) ¿Hubo algún período del año en el que el número de vehículos vendidos haya sido inferior a 12 unidades? Justifique su respuesta.

Resolución

$$N(t) = \begin{cases} 28 - (t-4)^2, & si\ 0 \le t < 6 \\ (t-10)^2 + 8, & si\ 6 \le t \le 12 \end{cases}$$

$0 \le t < 6$, N(t) = 12 $\Leftrightarrow 28 - (t-4)^2 = 12 \Leftrightarrow (t-4)^2 = 16 \Leftrightarrow t - 4 = \pm 4$, t = 8 (imposible) , t = 0

$6 \le t <= 12$, N(t) = 12 $\Leftrightarrow (t-10)^2 + 8 = 12 \Leftrightarrow (t-10)^2 = 4 \Leftrightarrow t - 10 = \pm 2$, t = 8, t = 12

Usando además los apartados anteriores, el nº de vehículos vendidos ha sido inferior a 12 unidades desde t = 8 hasta t = 12, es decir desde agosto a final de año

---

EJERCICIO 4. Análisis. Considérese la siguiente función: $f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$, donde a, b, c son números reales.
a) Calcular a, b, c sabiendo que la función $f(x)$ pasa por $(2, 8)$ y que tiene un extremo relativo en $(0, 16)$.

Resolución

$f'(x) = 3ax^2 - 4x + b$.

Tiene un extremo relativo en $(0, 16) \Rightarrow 0 = f'(0) = 3a.0^2 - 4.0 + b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x) = ax^3 - 2x^2 + c$

Además, pasa por $(0, 16) \Rightarrow 16 = f(0) = a.0^3 - 2.0^2 + c \Rightarrow c = 16 \Rightarrow f(x) = ax^3 - 2x^2 + 16$

Pasa por $(2, 8) \Rightarrow 8 = f(2) = a.2^3 - 2.2^2 + 16 \Rightarrow a = 0$. Conclusión: $a = b = 0, c = 16$ y $f(x) = -2x^2 + 16$

b) Para $a = b = 0$ y $c = 16$, calcule el área de la región limitada por la función $f(x)$ y la recta $y = 8$.

Resolución

$f(x) = -2x^2 + 16$. Hallamos los cortes entre la parábola $y = f(x) = -2x^2 + 16$ y la recta $y = 8$:

$8 = -2x^2 + 16 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Dado que la parábola es cóncava y los cortes entre la parábola y la recta son $(-2, 8)$, $(2, 8)$, por simetría,

el área que se pide es $A = 2\int_0^2 (16 - 2x^2 - 8)\ dx = 2\int_0^2 (8 - 2x^2)\ dx = \int_0^2 (16 - 4x^2)\ dx$

Observa que en el intervalo $(-2, 2)$ la parábola está por encima de la recta.

Una primitiva de $16 - 4x^2$ es $p(x) = 16x - \frac{4x^3}{3} = \frac{48x - 4x^3}{3}$. Por la regla de Barrow,

$A = p(2) - p(0) = \frac{48.2 - 4.2^3}{3} - \frac{48.0 - 4.0^3}{3} = \frac{64}{3} \cong 21{,}33\ u^2$

EJERCICIO 5. Estadística y Probabilidad. Se estima que en una población el 20% padece obesidad y que el 11% padece obesidad y son hipertensos. Además, el 27,5% de los hipertensos padecen obesidad.
a) ¿Qué porcentaje de la población padece obesidad o es hipertenso?
b) ¿Son independientes los sucesos "padecer obesidad" y "ser hipertensos"?
c) Calcule la probabilidad de que un individuo que no padece obesidad sea hipertenso.

Resolución

A = padecer obesidad   B = ser hipertenso

Según el enunciado, $p(A) = 20\% = 0{,}2$ $p(A \cap B) = 11\% = 0{,}11$ $p(A/B) = 27{,}5\ \% = 0{,}275$

a) Se pide $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. Como $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Rightarrow p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A/B)} = \frac{0{,}11}{0{,}275} = 0{,}4$

Luego, $p(A \cup B) = p(A) + \frac{p(A \cap B)}{p(A/B)} - p(A \cap B) = 0{,}2 + 0{,}4 - 0{,}11 = 0{,}49 = 49\%$

El 49% de la población padece obesidad o es hipertenso

b) $p(A).p(B) = 0{,}2\ .\ 0{,}4 = 0{,}08 \neq p(A \cap B) = 0{,}11 \Rightarrow$ A y B son dependientes.

c) Se pide $p(B/A^c) = \frac{p(B \cap A^c)}{p(A^c)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{1 - p(A)} = \frac{0{,}4 - 0{,}11}{1 - 0{,}2} = 0{,}3625 = 36{,}25\%$

EJERCICIO 6. Estadística y Probabilidad. Puede suponerse que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15.
a) Si en una muestra de 25 empleados, el tiempo medio necesario fue de 97 horas, calcule un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media del tiempo de formación precisado.

Resolución

X = tiempo → $N(\mu, 15)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del 95% para el tiempo medio, μ, es $I_c = (\overline{x} - E, \overline{x} + E)$, siendo $\overline{x} = 97$ la media de una muestra de tamaño n = 25 y $E = z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

$z_{\alpha/2}$ es el valor de la N(0, 1) que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1 + n_c}{2} = \frac{1 + 0{,}95}{2} = 0{,}975$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0{,}975 \xrightarrow{\text{usando la tabla de la } N(0,1)} z_{\alpha/2} = 1{,}96.$

Sustituyendo, $E = z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96.\frac{15}{\sqrt{25}} = 5{,}88$; $I_c = (97 - 5{,}88\,; 97 + 5{,}88) = (91{,}12\,; 102{,}88)$

b) Si la media del tiempo de formación precisado es μ = 97 horas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio precisado de muestras de 36 trabajadores se encuentre entre 90 y 104 horas?

Resolución

$X \to N(97, 15)$. Sabemos, por el teorema central del límite que si $X \to N(\mu, \sigma)$ y $\overline{X}$= media de las muestras de tamaño n, entonces $\overline{X} \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. En este caso μ = 97 , σ = 15 y n = 36

Sustituyendo, $\overline{X} \to N\left(97, \frac{15}{\sqrt{36}}\right) = N(97;\ 2{,}5)$. Entonces la variable $Z = \frac{\overline{X} - 97}{2{,}5} \to N(0, 1)$

Nos piden:

$p\left(90 < \overline{X} < 104\right) = p\left(\frac{90 - 97}{2{,}5} < \frac{\overline{X} - 97}{2{,}5} < \frac{104 - 97}{2{,}5}\right) = p(-2{,}8 < Z < 2{,}8) = p(Z < 2{,}8) - p(Z < -2{,}8)$

$= p(Z < 2{,}8) - [1 - p(Z < 2{,}8)] = 2\,p(Z < 2{,}8) - 1 = 2.0{,}9974 - 1 = 0{,}9948 = 99{,}48\%$