

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen

integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del

examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto .

Comprueba que el segmento de esta recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en

dos partes iguales por el punto de tangencia.

**Resolución**

 ; . La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en un

punto A(x0, f(x0)) es rtg: y = f´(x0)(x – x0) + f(x0). En este caso, x0 = 3.

 ; ;

Como para x = 0, y , los puntos de corte de la recta tangente con los

ejes son A(6, 0) y .

Para que el segmento de esta recta esté dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia

este debe ser el punto medio de A y B. Observa que es así: punto medio de AB =

2.- (2 puntos) En una finca con forma de semicírculo de radio 20 m se quiere poner un jardín rectangular,

de tal manera que uno de lados esté sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte de

la curva. Calcula las dimensiones del jardín para que su área sea máxima.

**Resolución**



Las dimensiones del jardín son 2x e y . Por el teorema de Pitágoras,

Se trata de maximizar la función área, .

Podemos observar que antes de x0 A´(x) > 0 y A(x) crece y después de x0 A´(x) < 0 y A(x) decrece

Por tanto, para x0 se alcanza el máximo.

Por tanto, las dimensiones del jardín son: de largo y de ancho.

son, aproximadamente, y

3.- (2 puntos) Halla la función f sabiendo que . Analiza la continuidad de la

función f en las abscisas x = –2 y x = 1.

**Resolución**

Sea . Como no se puede dividir entre cero ni calcular logaritmos de números no positivos, resulta que , o sea x ≠ –2 y x > 1 ; F(x) está definida

en (1, +∞) y según el teorema fundamental del cálculo

 ⇒ f(x) no es continua ni en x = –2 ni en x = 1 por no estar definida

4.- (2 puntos) Dada la matriz . Halla x e y para que su inversa, A–1, coincida con su

traspuesta, At. En tal caso, halla AtA2 – 2A.

**Resolución**

Si A–1 = At, multiplicando por A, por la izquierda, AA–1 = AAt. Es decir, AAt = I

Igualando componentes,

Observa que al ser x = y entonces A = At. Luego, A = A–1, y por tanto, A2 = I

Luego,

Para vale y para vale

5.- (2 puntos) Añade una ecuación al sistema de ecuaciones lineales: de modo que sea

(i) incompatible.

**Resolución** Por ejemplo,

(ii) compatible determinado.

**Resolución** Por ejemplo,

(iii) Compatible indeterminado.

**Resolución** Por ejemplo, , Observa que 3ª ec = 1ª ec + 2ª ec

6.- (2 puntos) Dada la matriz , halla dos matrices B y C tales que satisfagan las siguientes

ecuaciones

**Resolución**

Sumando las ecuaciones, ,

Como , det C–1 = ≠ 0

7.- (2 puntos) Determine los valores de a para que los planos de ecuaciones

(i) se corten en un punto.

(ii) se corten en una recta.

(iii) no se corten.

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = 1 + a + 2a – 1 – 2 – a2 = –a2 + 3a – 2 , , a = 1, a = 2

– Si a ≠ 1, a ≠ 2, det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A\* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-

Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única. Esto significa que los tres planos

se cortan en un punto

– Si a = 1, los planos son . Observamos que π1 // π3 y π2 los corta.

– Si a = 2, que corresponde al

sistema que a su vez corresponde a una recta del espacio. Luego, los tres planos se cortan

en una recta

Conclusión:

Si a ≠ 1, a ≠ 2 los planos se cortan en un punto; si a = 1 no se cortan y si a = 2 se cortan en una recta

8.- (2 puntos) Halla la ecuación continua de la recta s que está contenida en el plano π: x + y – 2z + 1 = 0

y corta perpendicularmente a la recta

**Resolución**

Un vector normal de π es .

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que

la definen:

Como s ⊂ π y s ⊥ r,

Además, un punto de s es, por ejemplo, r ∩ π: . Resolvemos el sistema por Gauss:

 que corresponde al sistema

z = 0 ; ; . Luego, y

9.- (2 puntos) En un examen de matemáticas, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes

fueron 0,6 y –0.8 y sus notas reales 94 y 73, respectivamente. Calcula:

(i) la media y desviación típica de las puntuaciones del examen que siguen una distribución normal.

**Resolución**

X = puntuaciones ⇒ . Según el enunciado,

Despejando, . Restando las ecuaciones,

Luego, . La media es 85 y la desviación típica 15,

 (ii) entre que puntuaciones alrededor de la media está la nota del 60% de los estudiantes.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

**Resolución**

X = puntuaciones ⇒ .

Piden hallar k para que

 ; despejando,

Usando la tabla de N(0, 1), en sentido inverso, ; k ≅ 12,675.

La nota está entre 85 – 12,675 = 72,325 y 85 + 12,675 = 97,675

10.- (2 puntos) Dados los sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe

que p(A) = 0,27 p(B´) = 0,82 y p(A ∪ B) = 0,4. Determina si los sucesos A y B son compatibles o

incompatibles. Calcula p[(A ∪ B)´] y p(A´ ∪ B´), (A´ significa suceso complementario).

**Resolución**

Observa que p(B) = 1 – p(B´) = 1 – 0,82 = 0,18. Como , despejando

 ⇒ A y B son compatibles

 ⇒ A y B son dependientes

Observa que

Por una de las leyes de Morgan,