
Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2023-2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	C

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN
Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos. TIEMPO: 90 minutos.

A1.- (2,5 puntos) Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

Resolución

Sean x, y, z la longitud, en cm de los listones largos, intermedios y cortos, respectivamente.
Según el enunciado,

$$\begin{cases} 2x+4y=3y+15z \\ x=y+z+17 \\ 9z+7=x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-15z=0 \\ x-y-z=17 \\ x+y-9z=7 \end{cases}$$

. Lo resolvemos por el método de Gauss.

La matriz del sistema es $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -15 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 17 \\ 1 & 1 & -9 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2f3-f1 \\ f2-f3 \\ \, \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 14 \\ 0 & -2 & 8 & 10 \\ 1 & 1 & -9 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2f1+f2 \\ f2:2 \\ f3+f2 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 38 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -9 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} f1:2 \\ \, \\ \, \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 19 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -9 & 7 \end{pmatrix}$ que corresponde al sistema $\begin{cases} z=19 \\ -y+4z=5 \\ x+y-9z=7 \end{cases}$

y = 4z – 5 = 4.19 – 5 = 71 ; x = 7 – y + 9z = 7 – 71 + 9.19 = 107. La solución es x = 107, y = 71, z = 19

Los listones largos miden 107 cm, los medianos 71 cm y los cortos 19 cm

A2- Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:
a) (0,5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en x = π

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es
rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = \pi$; $f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$.

$f'(x_0) = f'(\pi) = 4\pi^3 + 3\pi\pi^2 + 2\pi^2\pi + \pi^3 = 10\pi^3$; $f(x_0) = f(\pi) = \pi^4 + \pi\pi^3 + \pi^2\pi^2 + \pi^3\pi + \pi^4 = 5\pi^4$

La recta tangente es $rtg: y = 10\pi^3(x-\pi) + 5\pi^4 \Rightarrow rtg: y = 10\pi^3 x - 5\pi^4$

b) (1 punto) Probar que f(x) tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente esta vez, el teorema de Bolzano.

Resolución

$f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$

Vamos a usar el teorema de Rolle, que dice: Si f(x) es continua en [a, b], derivable en (a, b) y además, $f(a) = f(b)$ entonces existe por lo menos un $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.

$f(-\pi) = (-\pi)^4 + \pi(-\pi)^3 + \pi^2(-\pi)^2 + \pi^3(-\pi) + \pi^4 = \pi^4 - \pi^4 + \pi^4 - \pi^4 + \pi^4 = \pi^4$

$f(0) = 0^4 + \pi 0^3 + \pi^2 0^2 + \pi^3 0 + \pi^4 = \pi^4$

Esto quiere decir que f cumple las hipótesis del teorema de Rolle en $[-\pi, 0]$; f es continua en el intervalo $[-\pi, 0]$ y derivable en $(-\pi, 0)$, por ser polinómica y $f(-\pi) = f(0)$. Luego, existe $c \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(c) = 0$

Vamos a usar ahora el teorema de Bolzano, que dice: Si f(x) es continua en [a, b], y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un $c \in [a, b]$, tal que $f(c) = 0$.

Lo usamos para la función $g(x) = f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$.

$g(-\pi) = 4(-\pi)^3 + 3\pi(-\pi)^2 + 2\pi^2(-\pi) + \pi^3 = -\pi^3 < 0$ $\quad g(0) = 40^3 + 3\pi 0^2 + 2\pi^2 0 + \pi^3 = \pi^3 > 0$

Esto quiere decir que g cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en $[-\pi, 0]$; g es continua en el intervalo $[-\pi, 0]$, por ser polinómica y $g(-\pi)$, $g(0)$ tienen distinto signo. Luego, existe $c \in (-\pi, 0)$ tal que $g(c) = f'(c) = 0$

$f(0) = 0^3 + 6.0^2 + 3.0 - 10 = -10 < 0$ y $f(2) = 2^3 + 6.2^2 + 3.2 - 10 = 28 > 0$.

Por el teorema de Bolzano existe al menos un $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$. Luego, c es una raíz de f.

c) (1 punto) Si $g(x) = f(-x)$ calcular el área entre las gráficas de f(x) y g(x) en el intervalo $[0, \pi]$

Resolución

$f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$;

$g(x) = f(-x) = (-x)^4 + \pi(-x)^3 + \pi^2(-x)^2 + \pi^3(-x) + \pi^4 = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4$

Veamos si las gráficas se cortan:

$$x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4 = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4 \Rightarrow 2\pi x^3 + 2\pi^3 x = 0 \Rightarrow 2\pi x(x^2 + \pi^2) = 0$$

Entonces $x = 0$. Luego, las gráficas NO se cortan en el intervalo $(0, \pi)$.

El área que se pide es $A = \left|\int_0^\pi [f(x) - g(x)]\, dx\right| = \left|\int_0^\pi (2\pi x^3 + 2\pi^3 x)\, dx\right|$. Una primitiva de la función del integrando es $p(x) = \frac{2\pi x^4}{4} + \frac{2\pi^3 x^2}{2} = \frac{\pi x^4}{2} + \frac{2\pi^3 x^2}{2} = \frac{\pi x^2(x^2 + 2\pi^2)}{2}$.

Por la regla de Barrow, $A = |p(\pi) - p(0)| = \left|\frac{\pi\pi^2(\pi^2 + 2\pi^2)}{2} - \frac{\pi 0^2(0^2 + 2\pi)}{2}\right| = \frac{3\pi^5}{2} \cong 459{,}03\ u^2$

A3.- Dados los puntos A(0, 0, 1) y B(1, 1, 0), se pide:

a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B es perpendicular al plano z = 0.

Resolución

Como A, B pertenecen al plano π que se pide $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$ es vector director de π.

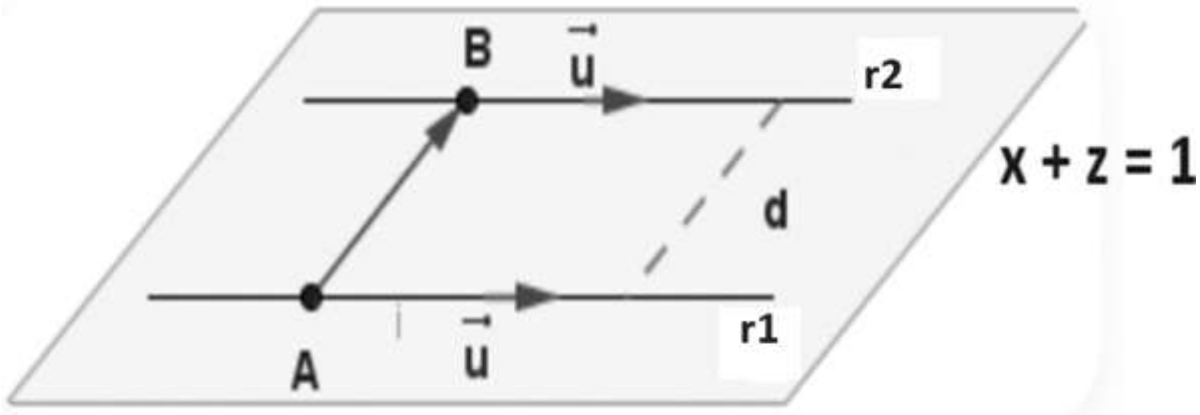
Como π es perpendicular al plano z = 0, su vector normal, $\overrightarrow{n'} = (0, 0, 1)$, también es vector director de π

Por tanto, un vector normal de π es $\vec{n} = \overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{n'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 0)$

Y como π pasa por A(0, 0, 1), entonces π: 1(x – 0) – 1(y – 0) + 0(z – 1) = 0 ⇒ π: x – y = 0

b) (1,5 puntos) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas r_1, r_2 que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano x + z = 1 y tales que la distancia entre ellas sea 1.

Resolución



Si $\vec{u} = (a, b, c)$ es vector director de r1 y r2, entonces al estar contenidas en el plano x + z = 1, su vector normal, $\vec{v} = (1, 0, 1)$ es perpendicular a $\vec{u}$. Luego, $\vec{u} \,.\, \vec{v} = 0$, a + c = 0, c = –a y $\vec{u} = (a, b, -a)$

Observa también que $1 = d(r_1,\ r_2) = \dfrac{|\vec{u}\ x\ \overrightarrow{AB}\,|}{|\vec{u}|}$; $\vec{u}\ x\ \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & -a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (a - b, 0, a - b)$

$\left|\vec{u}\ x\ \overrightarrow{AB}\right| = (a - b)|(1, 0, 1)| = (a - b)\sqrt{2}$; $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + (-a)^2} = \sqrt{2a^2 + b^2} \Rightarrow 1 = \dfrac{(a - b)\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + b^2}}$

$(a - b)\sqrt{2} = \sqrt{2a^2 + b^2}$; $2a^2 + 2b^2 - 4ab = 2a^2 + b^2$; $b^2 - 4ab = b(b - 4a) = 0 \Rightarrow$ b = 0 ó b = 4a

– Si b = 0, $\vec{u} = (a, 0, -a) \,//\, (1, 0, -1)$, A(0, 0, 1) ∈ r_1 , B(1, 1, 0) ∈ $r_2 \Rightarrow r_1\!: \begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = 1 - k \end{cases}$, $r_2\!: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = -t \end{cases}$

– Si b = 4a, $\vec{u} = (a, 4a, -a) \,//\, (1, 4, -1)$, A(0, 0, 1) ∈ r_1 , B(1, 1, 0) ∈ $r_2 \Rightarrow r_1\!: \begin{cases} x = k \\ y = 4k \\ z = 1 - k \end{cases}$, $r_2\!: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = -t \end{cases}$

A4.- Sabiendo que $p(\overline{A}) = \frac{11}{20}$, $p(A/B) - p(B/A) = \frac{1}{24}$, $p(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular p(A ∩ B) y p(B)

b) (1,5 puntos) Calcular p(C), siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica $p(A \cup C) = \frac{14}{25}$

Resolución

Observa que $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$

a) Sea $p(A \cap B) = x$, $p(B) = y$. Por el enunciado, $\begin{cases} \frac{p(A\cap B)}{p(B)} - \frac{p(A\cap B)}{p(A)} = \frac{1}{24} \\ p(A) - p(A \cap B) = \frac{3}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{x}{9/20} = \frac{1}{24} \\ \frac{9}{20} - x = \frac{3}{10} \Rightarrow x = \frac{3}{20} \end{cases}$

Sustituyendo en la 1ª ecuación, $\frac{\frac{3}{20}}{y} - \frac{20}{9}\frac{3}{20} = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{3}{20y} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{3}{20y} = \frac{3}{8} \Rightarrow y = \frac{24}{60} \Rightarrow y = \frac{2}{5}$

Luego, $p(A \cap B) = \frac{3}{20}$, $p(B) = \frac{2}{5}$

b) Sea , $p(C) = z$. Por ser C independiente con A, $p(A \cap C) = p(A)p(C)$

Tenemos $\frac{14}{25} = p(A \cup C) = p(A) + p(C) - p(A)p(C) \Rightarrow \frac{14}{25} = \frac{9}{20} + z - \frac{9}{20}z \Rightarrow \frac{11}{20}z = \frac{14}{25} - \frac{9}{20} = \frac{11}{100}$

Despejando, $z = p(C) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

B1.- Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con b ≠ 0, se pide:

a) (1,25 puntos) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

Resolución

Si $BCB^{-1} = A$, multiplicando por B por la derecha en los dos miembros, $BCB^{-1}B = AB \Rightarrow BC = AB$

$\begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ Sacando factor común b ≠ 0 y simplificando

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Luego, la igualdad se cumple ∀ b ∈ R

b) (0,75 puntos) Calcular el determinante de la matriz AA^t.

Resolución

$\det A = 9 - 1 - 1 - 1 + 3 + 3 = 12$; $\det(AA^t) = \det A \ \det A^t = \det A \det A = (\det A)^2 = 12^2 = 144$

c) (0,5 puntos) Resolver el sistema $B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$

solución

Sabemos que $B=\begin{pmatrix}b&2b&b\\2b&3b&b\\b&b&b\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$; $\det B = b^3(3+2+2-3-1-4)=-b^3$.

Por tanto, $\exists B^{-1}$. Multiplicando por B–1, por la izquierda, $B^{-1}B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=I\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{\det B}b\,(adj\ B)^t\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{-b^3}b\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&0&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{-1}{b^2}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&0&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{-1}{b^2}\begin{pmatrix}6\\-2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-6}{b^2}\\\frac{2}{b^2}\\\frac{5}{b^2}\end{pmatrix}$. La solución del sistema es $x=\frac{-6}{b^2}$, $y=\frac{2}{b^2}$, $z=\frac{5}{b^2}$, con $b\neq 0$.

B2.- Calcula:

a) (1,25 puntos) $\int_1^e (x+2)\ln x\ dx$

Resolución

Hallemos una primitiva de $(x+2)\ln x$ por el método de integración por partes

$\left[\begin{matrix}u=\ln x & du=\frac{1}{x}\,dx\\ dv=(x+2)dx & v=\frac{(x+2)^2}{2}\end{matrix}\right]$. Una primitiva es $p(x)=\frac{(x+2)^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{(x+2)^2}{x}\ dx=$

$$=\frac{(x+2)^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int\left(x+4+\frac{4}{x}\right)\ dx=\frac{(x+2)^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+4x+4\ln|x|\right]=\frac{2\,(x+2)^2\ln x\ -\ x^2-8x-8\ln\ |x|}{4}$$

Por la regla de Barrow $\int_1^e (x+2)\ln x\,dx=p(e)-p(1)=$

$$=\frac{2\,(e+2)^2\ln e\ -\ ee^2-8e-8\ln\ |e|}{4}-\frac{2\,(1+2)^2\ln 1\ -\ 1^2-8.1-8\ln\ |1|}{4}=\frac{-e^3+2e^2+9}{4}$$

a) (1,25 puntos) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[tg\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{1/\cos x}$

Resolución

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[tg\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{1/\cos x}=\left[tg\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^{1/\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}=1^{1/0}=1^{\pm\infty}$ Indeterminación $\frac{\ln\left[tg\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{\cos x}$

Pero observa que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[tg\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{1/\cos x}=e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left[tg\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{\cos x}}=e^{\frac{\ln\left[tg\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}}=e^{\frac{0}{0}}$ Indeterminación

L´Hôpital: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left\{\ln\left[tg\left(\frac{x}{2}\right)\right]\right\}'}{(\cos x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\,tg\left(\frac{x}{2}\right)}}{-sen\ x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{-2\,sen\ x\ tg\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1+tg^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\,sen\frac{\pi}{2}\,tg\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1+1^2}{2.1.1}=-1$

Por tanto, aplicando la regla de L´Hôpital $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[tg\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{1/\cos x}=e^{-1}$

B3.-Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3, P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó a momento.

Se sabe que $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 1, 0)$ y $P_3(1, 3, 2)$, pero del cuarto punto $P_4(3, a, 3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) (1,5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es V = 1. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.

Resolución

$$1 = V_{tetraedro} = \frac{1}{6} V_{paralelepípedo}\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right) = \frac{1}{6}\left|det\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right)\right| =$$

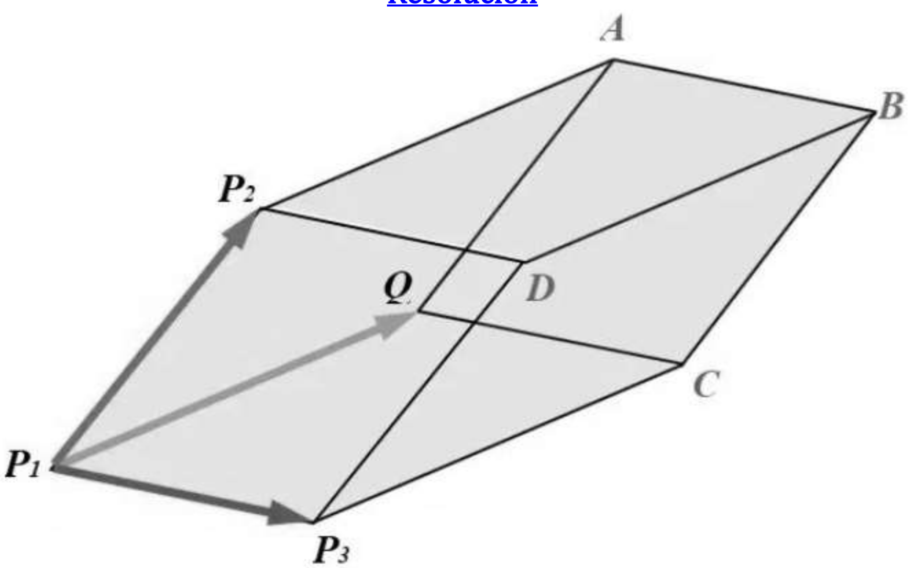
$$= \frac{1}{6}\left|det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}|4+4-a+1| = \frac{|9-a|}{6} \; ; |9-a| = 6 \Rightarrow \begin{cases} 9-a=6 \\ \text{ó} \\ 9-a=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ \text{ó} \\ a=15 \end{cases}$$

Como la longitud de ninguna de las aristas es mayor que 10, no puede ser a = 15 porque si fuese a = 13, entonces, por ejemplo, la arista $\overrightarrow{P_1P_4}$ mediría $\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right| = |(2, 14, 2)| = \sqrt{204} \cong 14{,}3 > 10$.

Por tanto, debe ser a = 3.

b) (1 punto) Dado el punto Q(3, 3, 3) se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar a ordenador?

Resolución



$P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 1, 0)$ y $P_3(1, 3, 2)$ Q(3, 3, 3)

Por tener caras paralelas podemos obtener A, B, C y D sumando a un vértice el vector adecuado.

$A = P_2 + \overrightarrow{P_1Q} = (2,1,0) + (2,2,2) = (4,3,2)$ $B = A + \overrightarrow{P_1P_3} = (4,3,2) + (0,2,1) = (4,5,3)$

$C = P_3 + \overrightarrow{P_1Q} = (1,3,2) + (2,2,2) = (3,5,4)$ $D = P_3 + \overrightarrow{P_1P_2} = (1,3,2) + (1,0,-1) = (2,3,1)$

B4.-Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo.
Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego lanzamos dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:
1. (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.
2. (1,5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

Resolución

Hagamos una tabla con todas las posibilidades reflejando en cada casilla la puntuación final que se obtendría en cada caso:

azul\rojo	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	8	10	12	14
3	4	5	6	7	8	9
4	6	8	10	12	14	16
5	6	7	8	9	10	11
6	8	10	12	14	16	18

1.
– Hay 4 casos favorables a sacar 10, que son 24, 43, 55, 62 y hay 36 casos posibles.

Por la regla de Laplace, $p(Sacar\ 10) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \cong 0{,}1111 = 11{,}11\%$

– Hay 9 casos favorables a sacar impar, que son 12, 14, 16, 32, 34, 36, 52, 54, 56 y hay 36 casos posibles.

Por la regla de Laplace, $p(Sacar\ impar) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

2.
– Si la puntuación final ha sido 8 es porque han salido los resultados: 23, 35, 42, 53 ó 61 (5 resultados)

En estos resultados se ha obtenido nº par en el dado azul en 23, 42 y 61 (3 resultados)

Por la regla de Laplace, la probabilidad es, $\frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$

– Si la puntuación final ha sido par es porque han salido los resultados: 11, 13, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 35, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 53, 55, 61, 62, 63, 64, 65 ó 66 (27 resultados)

En estos resultados se ha obtenido nº impar en el dado rojo en 11, 13, 15, 21, 23, 25, 31, 33, 35, 41, 43, 45, 51, 53, 55, 61, 63 y 65 (18 resultados).

Por la regla de Laplace, la probabilidad es, $\frac{18}{27} = \frac{2}{3} \cong 0{,}6667 = 66{,}67\%$