---

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
CURSO: 2023-2024
ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Elija tres de los seis ejercicios siguientes

EJERCICIO 1:
Una empresa dedicada a deportes de montaña vende sesiones individuales de senderismo, rápel y ciclismo de montaña. Un día concreto, la empresa vende en un total de 45 sesiones. Los precios por sesión y persona de cada una de estas tres actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 euros ese día. Si por cada persona que elige rápel hay tres que eligen senderismo, ¿cuántas personas han realizado cada actividad?
i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (3 puntos)
ii) Resuelva el sistema e interprete la solución en el contexto del problema. (7 puntos)

**Resolución**

Sean x, y, z el nº de personas que realizan senderismo, rápel y ciclismo de montaña, respectivamente.

Según el enunciado, $\begin{cases} x+y+z=45 \\ 40x+20y+60z=1700 \\ x=3y \end{cases}$ $:20$ $\begin{cases} x+y+z=45 \\ 2x+y+3z=85 \\ x=3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y+y+z=45 \\ 2(3y)+y+3z=85 \end{cases}$

Operando, $\begin{cases} 4y+z=45 \\ 7y+3z=85 \end{cases}$ $\cdot\ 3$ $\begin{cases} 12y+3z=135 \\ 7y+3z=85 \end{cases}$. Restando las ecuaciones, $5y = 50$ ; $y = 10$

$4.10 + z = 45,\ z = 5$ ; $x = 45 - 10 - 5 = 30$

Por tanto, hay 30 que realizan senderismo, 10 rápel y 5 ciclismo de montaña.

EJERCICIO 2:
Una empresa recibe diariamente un disolvente desde dos distribuidores (D1 y D2). El distribuidor D2 tiene una capacidad de transporte diario de 20 litros de disolvente, mientras que el distribuidor D1 tiene el triple de capacidad. La empresa necesita al menos 50 litros de disolvente al día. La empresa quiere favorecer al distribuidor D1, por lo que quiere recibir al menos 30 litros diarios más desde D1 que desde D2. La siguiente tabla recoge el coste y el nivel de contaminación asociados al transporte a la empresa desde los dos distribuidores

| | Coste de transporte (euros/litro) | Nivel de emisiones tóxicas (mg/litro) |
|---|---|---|
| D1 | 0,8 | 0,06 |
| D2 | 1 | 0,02 |

Determine cuántos litros diarios deberá enviar cada distribuidor a la empresa si se desea minimizar el nivel de contaminación ambiental y no gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente.
i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si no se quisiera gastar más de 30 euros diarios en el transporte del disolvente. (2 puntos)

**Resolución**

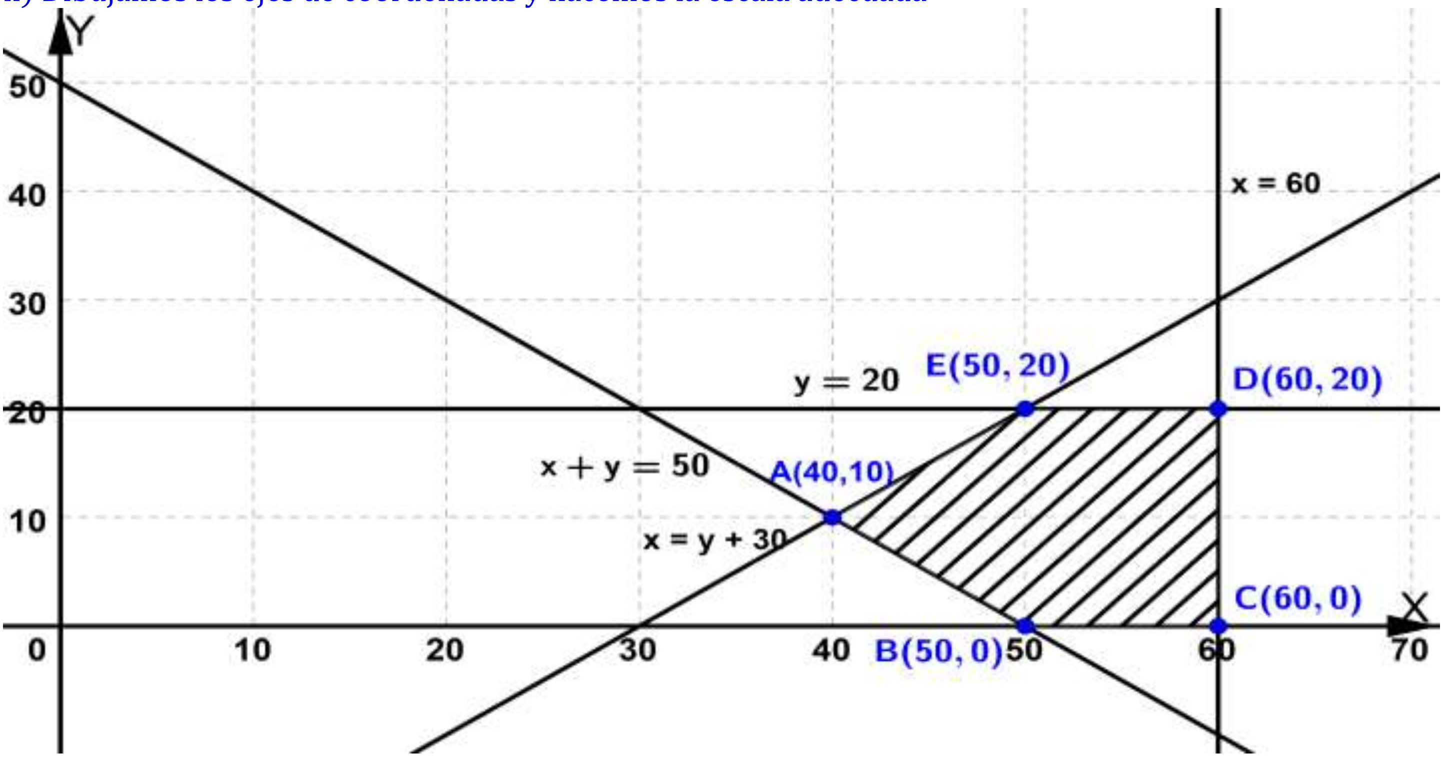
i) Representamos en una tabla los datos del problema:

| | **nº de litros** | **coste (en €)** | **Nivel de emisiones (mg/litro)** |
|---|---|---|---|
| **D1** | x | 0,8x | 0,06x |
| **D2** | y | 1y | 0,02y |
| **total** | x + y | 0,8x + y | 0,06x + 0,02y |

Función a optimizar (minimizar), nivel de emisiones $f(x, y) = 0{,}06x + 0{,}02y$.

Las restricciones son $\begin{cases} y \le 20 \\ x \le 60 \\ x + y \ge 50 \\ x \ge y + 30 \\ x \ge 0,\ \ y \ge 0 \end{cases}$

ii) Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada




Veamos en qué vértice, A(40, 10), B(50, 0), C(60, 0), D(60, 20) ó E(50, 20) alcanza el valor mínimo el nivel de emisiones $f(x, y) = 0{,}06x + 0{,}02y$

$f(A) = f(40, 10) = 0{,}06.40 + 0{,}02.10 = 2{,}6$ $\quad$ $f(B) = f(50, 0) = 0{,}06.50 + 0{,}02.0 = 3$

$f(C) = f(60, 0) = 0{,}06.60 + 0{,}02.0 = 3{,}6$ $\quad$ $f(D) = f(60, 20) = 0{,}06.60 + 0{,}02.20 = 4$

$$f(E) = f(50, 20) = 0{,}06.50 + 0{,}02.20 = 3{,}4$$

El nivel mínimo de emisiones es 2,6 mg/litro y se obtiene con el envío diario de 40 litros de disolvente del distribuidor D1 y 10 litros del distribuidor D2

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si no se quisiera gastar más de 30 euros diarios en el transporte del disolvente. (2 puntos)

**Resolución**

Con la nueva condición, la inecuación asociada es $0{,}8x + y \le 30 \Rightarrow 4x + 5y \le 150$.
La nueva región factible no existe. Es un conjunto de restricciones que no cumple ningún punto del plano

EJERCICIO 3:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x, & si\ x < -1 \\ 4 - x, & si\ -1 \le x < 1 \\ x^2 - 6x + 8, & si\ x \ge 1 \end{cases}$

i) Estudie la continuidad de f(x), clasificando sus puntos de discontinuidad. (3 puntos)
ii) Estudie la derivabilidad de f(x). (3 puntos)

**Resolución**

Para $x \neq -1, x \neq 1$, f es continua y derivable por ser polinómica siendo $f'(x) = \begin{cases} -2x - 4, & si\ x < -1 \\ -1, & si\ -1 < x < 1 \\ 2x - 6, & si\ x > 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -(-1)^2 - 4(-1) = 3 \neq \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 4 - (-1) = 5$

Por tanto, f NO es continua en $x = -1$ y tiene una discontinuidad de salto finito en $x = -1$.

Al no ser continua en $x = -1$, tampoco es derivable

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 4 - 1 = 3 = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1^2 - 6.1 + 8 = 3 \Rightarrow$ es continua en $x = 1$

$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -1 \neq \lim_{x \to 1^+} f'(x) = 2.1 - 6 = -4 \Rightarrow$ f NO es derivable en $x = 1$

Conclusión: f es continua en R – {–1} y derivable en R – {–1 ; 1}

iii) Calcule $\int_0^2 f(x)\ dx$. (4 puntos)

**Resolución**

$\int_0^2 f(x)\ dx = \int_0^1 f(x)\ dx + \int_1^2 f(x)\ dx = \int_0^1 (4 - x)\ dx + \int_1^2 (x^2 - 6x + 8)\ dx$. Una primitiva de $(4 - x)$ es $p(x) = 4x - \frac{x^2}{2} = \frac{8x - x^2}{2}$ y de $(x^2 - 6x + 8)$ es $q(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x = \frac{x^3 - 9x^2 + 24x}{3}$. Por Barrow,

$\int_0^2 f(x)\ dx = p(1) - p(0) + q(2) - q(1) = \frac{8.1 - 1^2}{2} - \frac{8.0 - 0^2}{2} + \frac{2^3 - 9.2^2 + 24.2}{3} - \frac{1^3 - 9.1^2 + 24.1}{3} =$

$= \frac{7}{2} + \frac{20}{3} - \frac{16}{3} = \frac{29}{6} \cong 4{,}83$

EJERCICIO 4:

La primera derivada de cierta función f(x) viene dada por $f'(x) = x(x - 2)^2$.

i) Determine los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f(x). (3 puntos)

**Resolución**

$f'(x) = x(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 2$. Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$

| | $(-\infty, 0)$ | 0 | $(0, 2)$ | 2 | $(2, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f´(x) | – | 0 | + | 0 | + |
| f(x) | decreciente | mínimo | creciente | creciente | creciente |

f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. Mínimo relativo: $x = 0$. No hay máximo relativo

---

ii) Determine los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Para qué valores de x la función f(x) presenta puntos de inflexión? (4 puntos)

**Resolución**

$f''(x) = 1(x-2)^2 + x2(x-2) = (x-2)(x-2+2x) = (x-2)(3x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2,\ \ x = \frac{2}{3}$

Hagamos una tabla de signos de $f''(x)$

| | $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ | $\frac{2}{3}$ | $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ | 2 | $(2, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | convexa | inflexión | cóncava | inflexión | convexa |

f es convexa en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$ y cóncava en $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$. Inflexión en $x = 2,\ \ x = \frac{2}{3}$

iii) Determine f(x) sabiendo que f(0) = 5. (3 puntos)

**Resolución**

Sabemos que $f'(x) = x(x-2)^2 = x(x^2-4x+4) = x^3 - 4x^2 + 4x$. Por tanto, la función f(x) será de la forma

$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + a = \frac{3x^4 - 16x^3 + 24x^2}{12} + a$ . Como f(0) = 5, entonces $5 = \frac{3.0^4 - 16.0^3 + 24.0^2}{12} + a$

Luego, a = 5 y $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + 5 = \frac{3x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 60}{12}$

EJERCICIO 5:
En una encuesta realizada a jóvenes universitarios sobre hábitos de estudio se ha observado que el 40% de los encuestados consulta libros en la biblioteca, el 55% consulta videos con tutoriales y el 15% consulta ambos formatos.
i) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte alguno de los dos formatos. (3 puntos)
ii) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte solamente uno de los dos formatos. (3 puntos)
iii) Sabiendo que un universitario no consulta videos con tutoriales, calcule la probabilidad de que tampoco consulte libros. (4 puntos)

**Resolución**

A = consultar libros en la biblioteca   B = consultar videos con tutoriales

Según el enunciado, $p(A) = 40\% = 0{,}4 \quad p(B) = 55\% = 0{,}55 \quad p(A \cap B) = 15\% = 0{,}15$

i) Se pide $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}55 - 0{,}15 = 0{,}8 = 80\%$

ii) Se pide $p(A \cap B^c) + p(A^c \cap B) = p(A) - p(A \cap B) + p(B) - p(A \cap B) =$

$= p(A) + p(B) - 2\,p(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}55 - 2\,.0{,}15 = 0{,}65 = 65\%$

iii) Se pide $p(A^c/B^c) = \frac{p(A^c \cap B^c)}{p(B^c)} = \frac{p[A \cup B]^c}{p(B^c)} = \frac{1 - p(A \cup B)}{1 - p(B)} = \frac{1 - 0{,}8}{1 - 0{,}55} \cong 0{,}4444 = 44{,}44\%$

EJERCICIO 6:
El tiempo (en días) que los jóvenes de una región tardan en encontrar un trabajo relacionado con sus estudios universitarios sigue una distribución normal con varianza de 2500 días$^2$. Se seleccionó una muestra de jóvenes universitarios, obteniéndose los siguientes días:

101, 200, 187, 69, 237, 125, 173, 235, 24, 60.

i) Calcule un intervalo de confianza al 92% para el tiempo medio en encontrar ese tipo de trabajo. Interprete la solución en el contexto del problema. (5 puntos)

**Resolución**

X = tiempo $\rightarrow N\left(\mu, \sqrt{2500}\right) = N(\mu, 50)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del 92% para el tiempo medio, μ, es $I_c = (\overline{x} - E, \overline{x} + E)$, siendo $\overline{x} = \frac{101+200+187+659+237+125+173+235+24+60}{10} = 141{,}1$ la media de una muestra de tamaño n = 10 y $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

$z_{\alpha/2}$ es el valor de la N(0, 1) que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0{,}92}{2} = 0{,}96$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0{,}96 \xrightarrow{\text{usando la tabla de la } N(0,1)} z_{\alpha/2} = 1{,}75$. Sustituyendo,

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}75 . \frac{50}{\sqrt{10}} \cong 27{,}67$ ; $I_c = (141{,}1 - 27{,}67\,; 141{,}1 + 27{,}67) = (113{,}43\,; 168{,}77)$

ii) Con los datos de esa muestra se ha calculado otro intervalo de confianza, con una amplitud de 68,62143 días. Calcule el nivel de confianza del nuevo intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

**Resolución**

X = tiempo $\rightarrow N(\mu, 50)$, el tamaño de la muestra es n = 10 y la desviación típica es σ = 50

Sabemos que la amplitud es el doble del error de estimación, $A = 2E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$

Despejando, $z_{\alpha/2} = \frac{A\sqrt{n}}{2\sigma} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{68{,}62143\ \sqrt{10}}{2.50} \cong 2{,}17$ .

$z_{\alpha/2}$ es el valor de la N(0, 1) que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1+n_c}{2}$.

Despejando, el nivel de confianza sería:

$n_c = 2\,p(Z < z_{\alpha/2}) - 1 = 2\,p(Z < 2{,}17) - 1 = 2\,.0{,}985 - 1 = 0{,}97$

Es decir, el nivel de confianza es del 97%