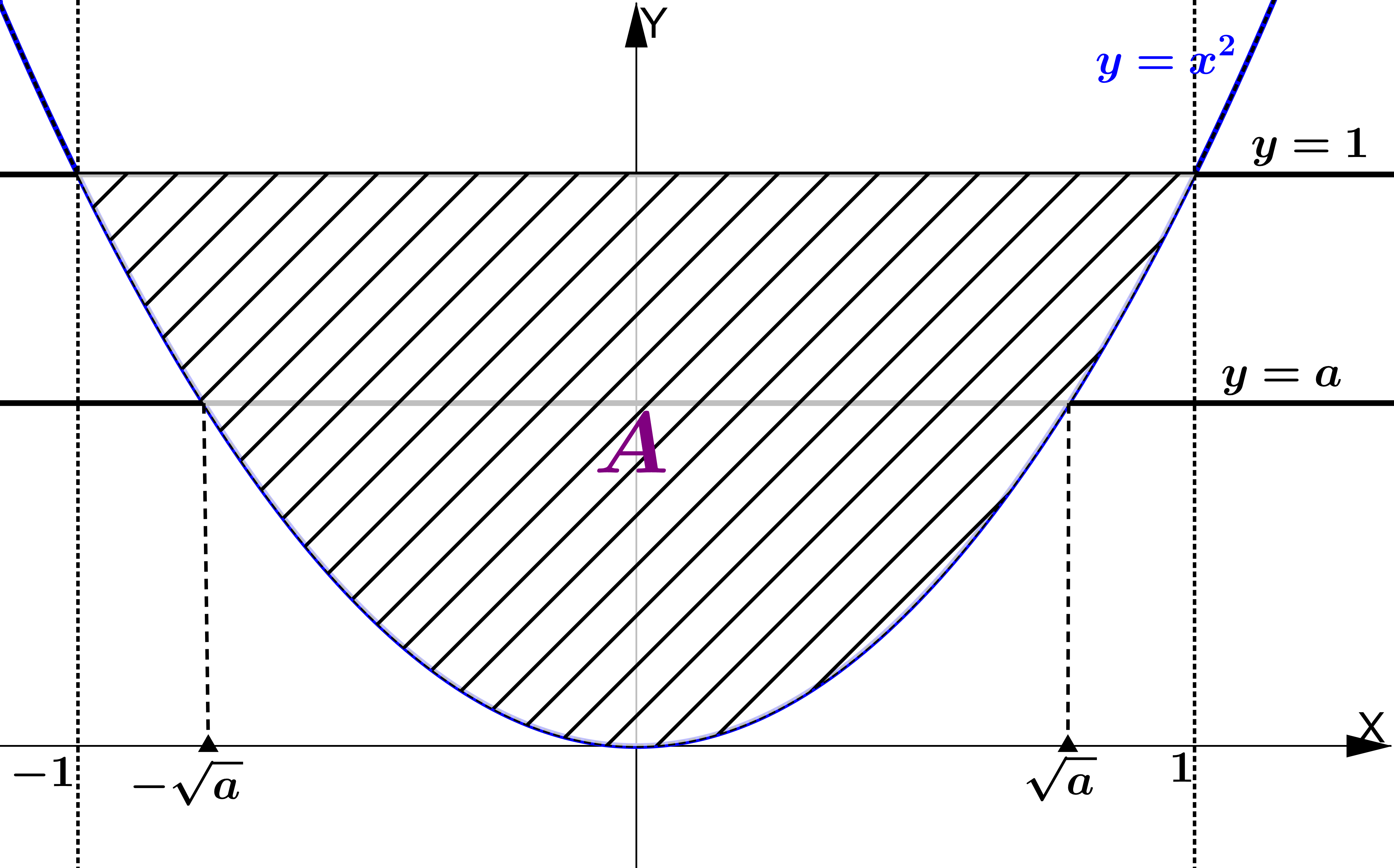
1.- Se quiere dividir la región encerrada entre la parábola y = x2 y la recta y = 1 en dos regiones de igual

área mediante la recta y = a. Halla el valor de a

**Resolución**



El área comprendida entre la recta y = 1 y la parábola es

Una primitiva de la función del integrando es .

Por la regla de Barrow,

Como las dos regiones mencionadas deben tener igual área,

Luego, . Una primitiva de la función del integrando es .

Por la regla de Barrow,

Luego,

2.- Sea f la función definida para x ≠ 1 por

(a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f.

**Resolución**

⇒ f tiene una asíntota vertical en x = 1 cuya ecuación es A.V. : x = 1

Estudiemos las asíntotas en ±∞:

. Luego, f no tiene asíntota horizontal en ±∞.

Veamos si tiene asíntota oblicua, AO: y = mx + n

.

Luego, la asíntota oblicua en ±∞ es la recta de ecuación AO:

(b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f.

**Resolución**

⇒ 2x2 – 4x = 2x(x – 2) = 0 ; x = 0, x = 2

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | (–∞, 0) | 0 | (0, 1) | 1 | (1, 2) | 2 | (2, +∞) |
| f´(x) | + | 0 | – |  | – | 0 | + |
| f(x) | creciente | máximo | decreciente |  | decreciente | mínimo | creciente |

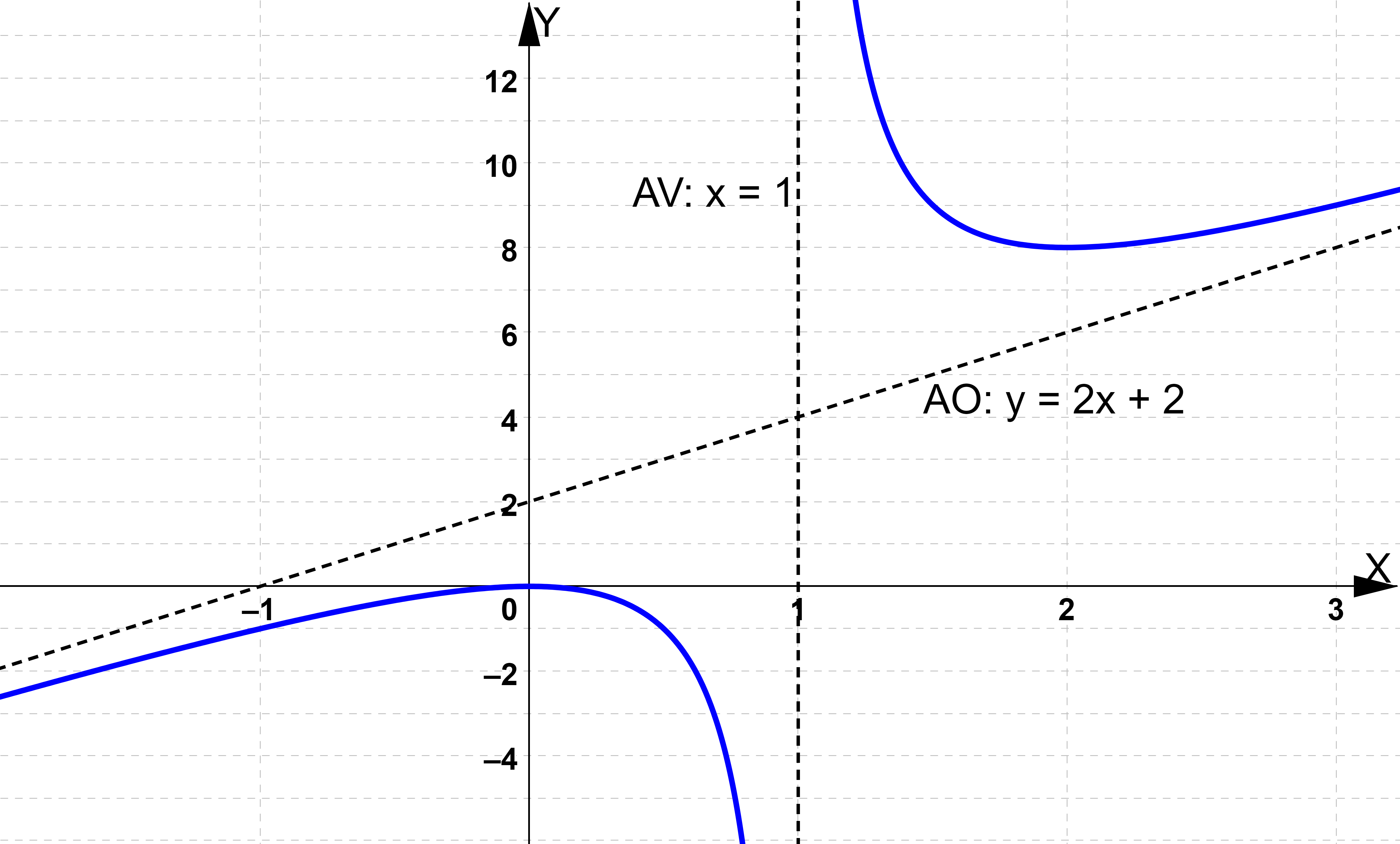
f es creciente en (–∞, 0) ∪ (2, +∞) y decreciente en (0, 2) – {1}

El máximo relativo es: x = 0, . Punto (0, 0)

El mínimo relativo es: x = 2, . Punto (2, 8).

(c) Esboza la gráfica de f.

**Resolución**



3.- Sea f: R → R la función definida por

(a) Esboza la gráfica de f.

(b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta x = 3

**Resolución**

Para dibujar la gráfica tenemos en cuenta que como

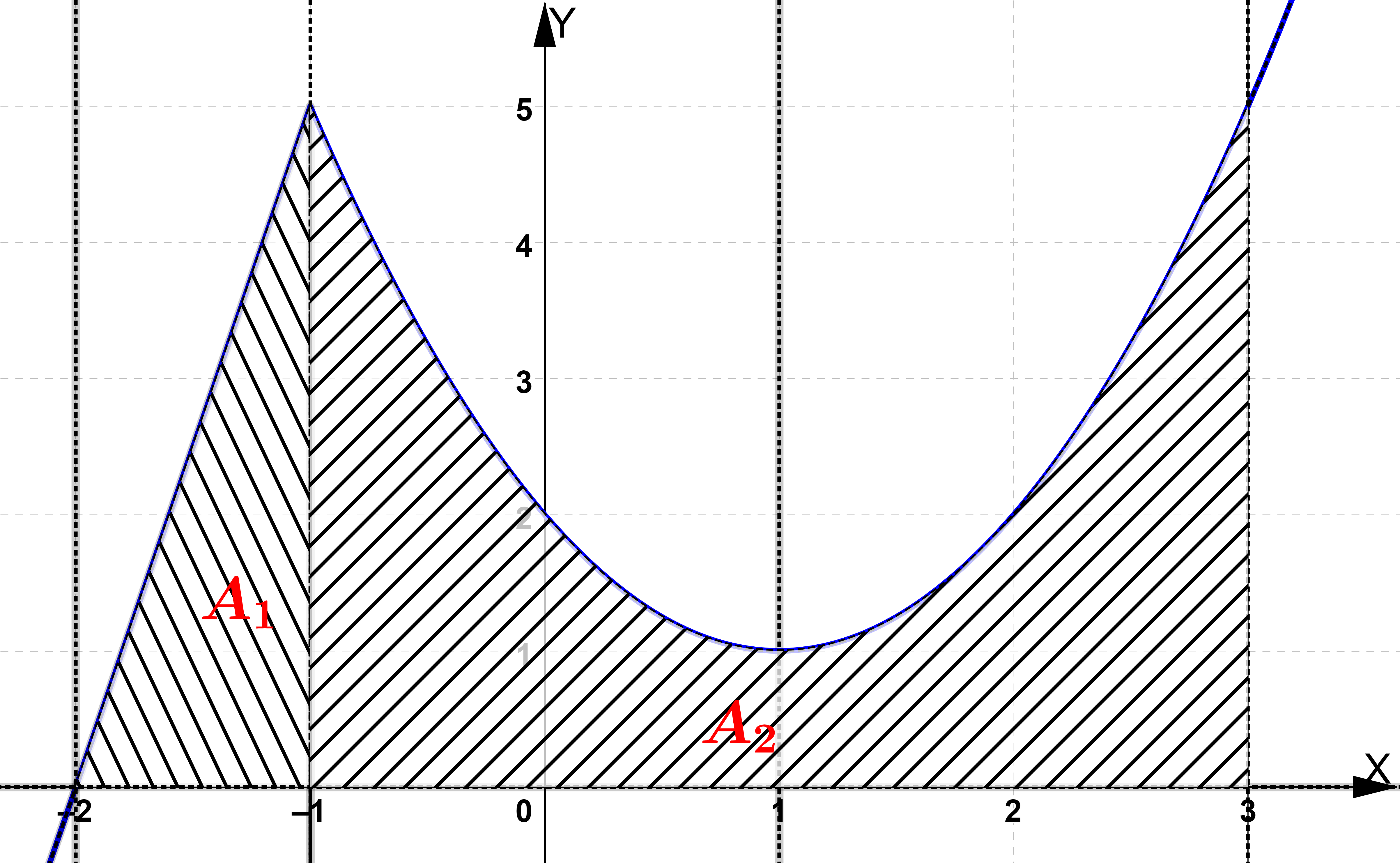
, f es continua y su

gráfica está formada por un trozo de parábola convexa y otro de recta.

Como (x2 – 2x + 2)´= 2x – 2 = 0 ⇔ , , el vértice de la parábola (mínimo relativo) es . Por simetría de la parábola respecto del eje f(3) = f(–1) = 5 → pasa por (3, 5)

Como 5x + 10 = 0 ⇔ x = –2, la recta además de pasar por (–1, 5) también pasa por (–2, 0).

La región cuya área se pide es



El área que se pide es

. Una primitiva de la función integrando es .

Por la regla de Barrow,

. Una primitiva es . Por la regla de Barrow,

Luego, el área que se pide es

4.- Siendo Ln(x) el logaritmo neperiano de x, calcula

**Resolución**

Se pide Indeterminación. Aplicamos la regla de

L´Hôpital: Indeterminación.

Volvemos a aplicar la regla de L´Hôpital:

Por la regla de L´Hôpital, el límite que se pide vale

**5.-** **(prueba ordinaria)** Sea f: R → R la función dada por f(x) = | 8 – x2 |.

(a) Esboza la gráfica y halla los extremos relativos de f (dónde se alcanzan y cuáles son sus respectivos valores).

**Resolución**

Como 8 – x2 = 0 ⇔ y (8 – x2)´= –2x = 0 ⇔ x = 0, y = 8 – 02 = 8, la curva y = 18 – x2

corresponde a la parábola cóncava de vértice (0, 8) que corta al eje X en y en

Luego, continua en R por composición de funciones continuas.

Para , ; f´(x) = 0 ⇔ x = 0

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

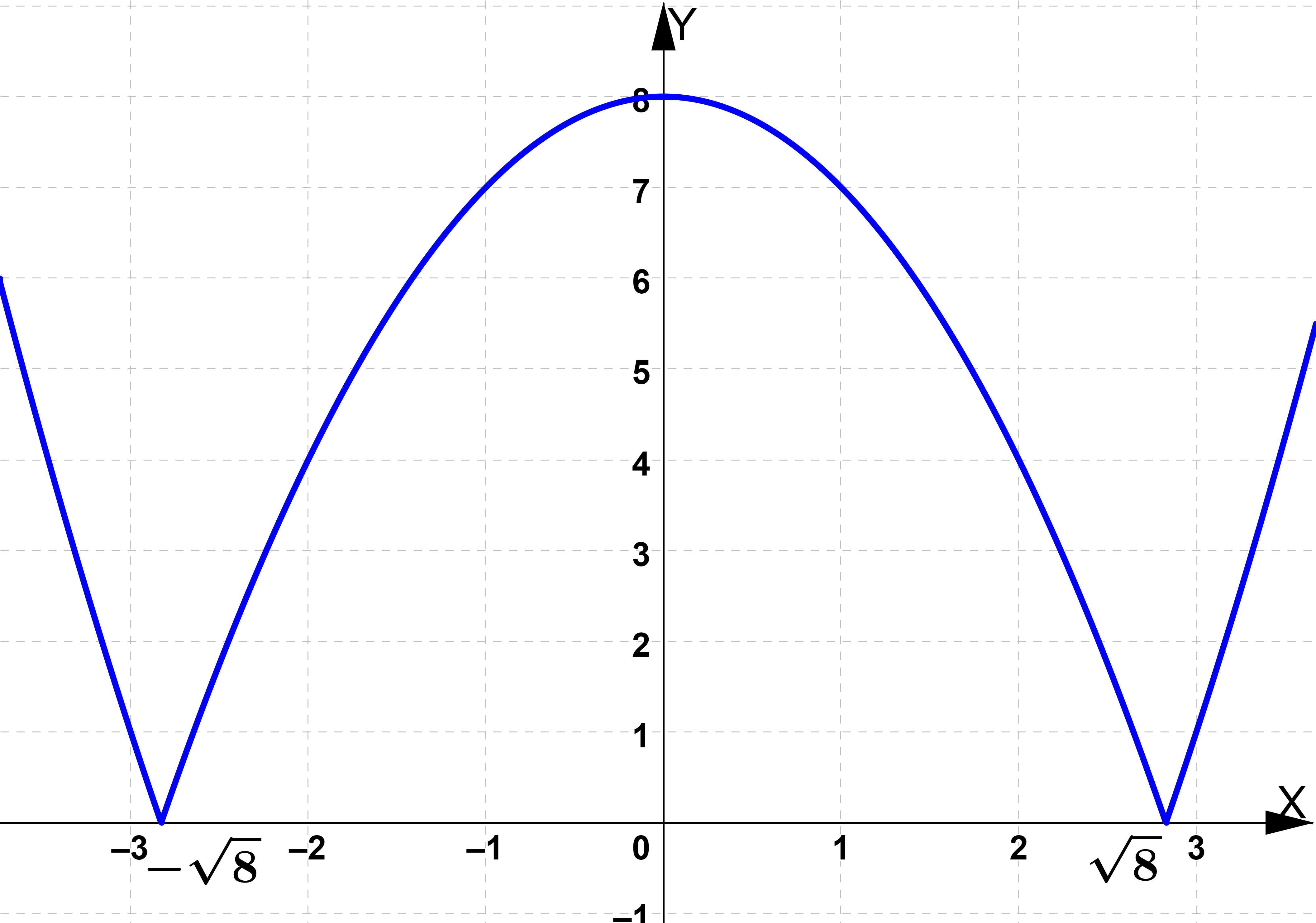
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 0 |  |  |  |
| f´(x) | – | ∄ | + | 0 | – | ∄ | + |
| f(x) | decreciente | mínimo | creciente | máximo | decreciente | mínimo | creciente |

f es decreciente en ∪ y creciente en ∪

Un mínimo relativo es: , . Punto .

Otro mínimo relativo es: , . Punto .

El máximo relativo es: x = 0, Punto (0, 8).



(b) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta tangente a la misma en el punto de

abscisa x = –2.

**Resolución**

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto A(x0, f(x0))

es rtg: y = f´(x0)(x – x0) + f(x0). En este caso, x0 = –2. En un entorno de –2, f(x) = 8 – x2 , f´(x) = –2x

;

La recta tangente es

Puntos de corte de la recta y la gráfica de f: ;

8 – x2 = 4x + 12 ; x2 + 4x + 4 = (x + 2)2 = 0

x = –2 , y = 4.(–2) + 12 = 4 , punto P(–2, 4) (punto de tangencia)

ó

8 – x2 = –4x – 12 ; x2 – 4x – 20 = 0 ;

, , punto

, , punto

**6.-** **(prueba ordinaria)** Siendo ln(x) el logaritmo neperiano de x, considera la función f: (0, ∞) → R definida

por f(x) = x ln(x). Calcula:

(a) .

**Resolución**

. Por el método de integración por partes

(b) Una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto (1, 0).

**Resolución**

La infinitas primitivas de f son .

Si pasa por (1, 0) ⇒ .

Luego, la primitiva que se busca es

**7.-** **(prueba ordinaria)** De la función f: R → R se sabe que f´´(x) = x2 + 2x + 2 y que su gráfica tiene

tangente horizontal en el punto P(1, 2). Halla la expresión de f.

**Resolución**

.

Al tener la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto P(1, 2), entonces f´(1) = 0

Luego, y nos queda

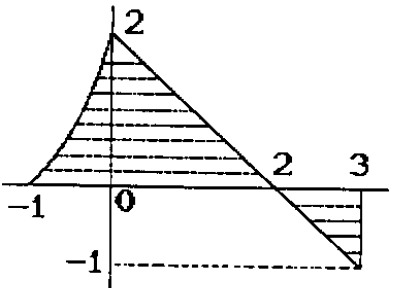
Al pasar la gráfica de f por el punto P(1, 2), entonces f(1) = 2

Luego,

La función que se pide es

**8.-** **(prueba ordinaria)** Halla el área del recinto rayado que aparece en la figura adjunta sabiendo que la

parte curva tiene como ecuación .



**Resolución**

El área del triángulo rectángulo grande es

El área del triángulo rectángulo pequeño es .

El área que corresponde a la parte curva es . Obteniendo la forma mixta

de la fracción: . Una primitiva es . Por la regla de Barrow,

Luego, el área que se pide es .

9.- Calcula

**Resolución**

Se pide Indeterminación. Aplicamos la regla de L´Hôpital:

Indeterminación.

Otra vez L´Hôpital:

. Por la regla de L´Hôpital, el límite vale –1.

10.- Sea f: R → R la función definida por f(x) = |x2 – 1|

(a) Esboza la gráfica de f.

(b) Estudia la derivabilidad de f.

**Resolución**

Como x2 – 1 = 0 ⇔ x = ±1 y (x2 – 1)´= 2x = 0 ⇔ x = 0, y = 02 – 1= –1, la curva y = x2 – 1 corresponde

a la parábola convexa de vértice (0, –1) que corta al eje X en –1 y en 1.

Luego, continua en R por composición de funciones continuas.

Para , f es derivable con ; f´(x) = 0 ⇔ x = 0

Luego, f NO es derivable en x = –1

Luego, f NO es derivable en x = 1

Así, f sólo es derivable en R – {1 ; –1}

Estudiemos la monotonía. Hagamos una tabla de signos de f´(x):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 0 |  |  |  |
| f´(x) | – | ∄ | + | 0 | – | ∄ | + |
| f(x) | decreciente | mínimo | creciente | máximo | decreciente | mínimo | creciente |

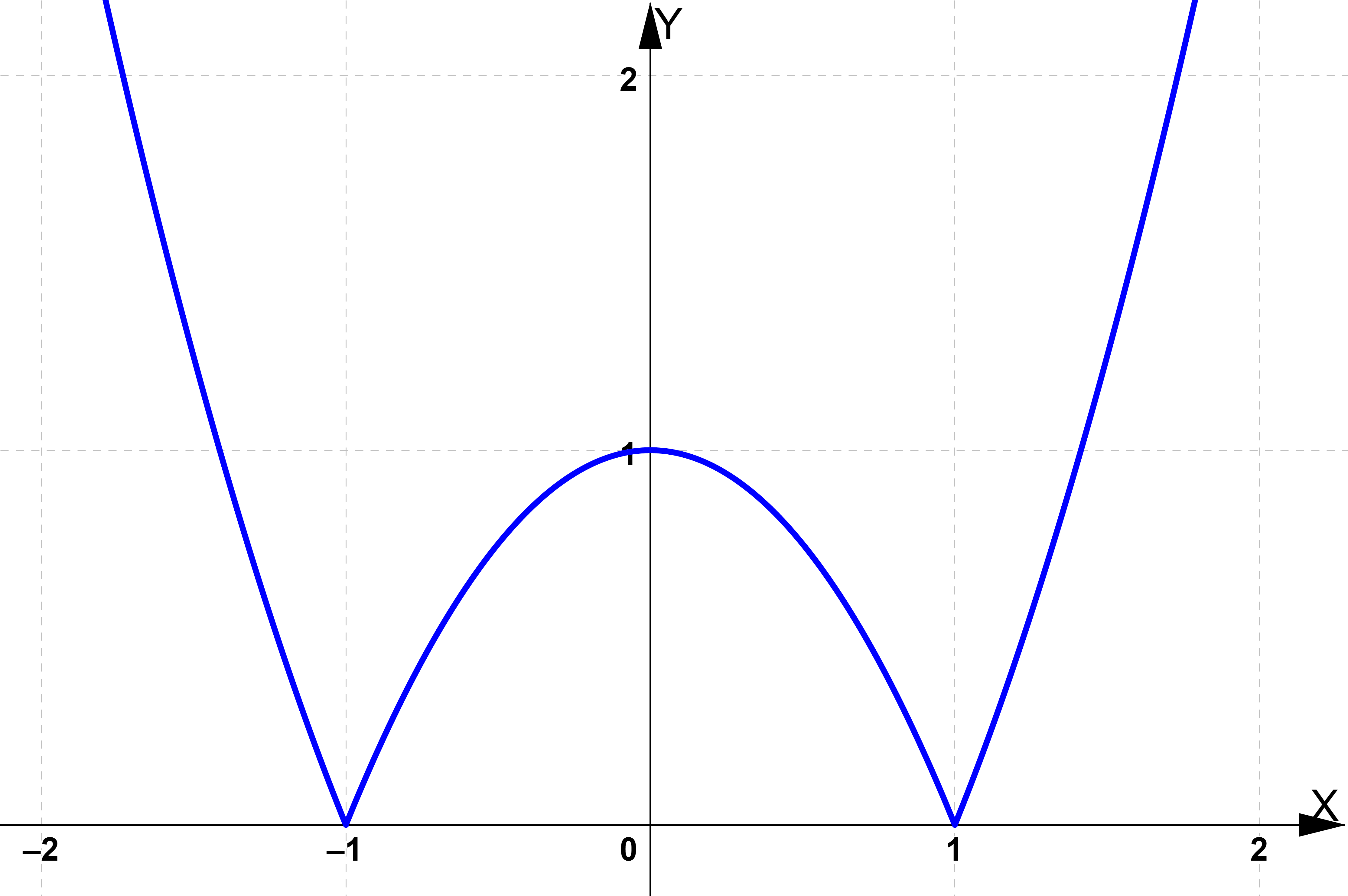
f es decreciente en ∪ y creciente en ∪

Un mínimo relativo es: , . Punto .

Otro mínimo relativo es: , . Punto .

El máximo relativo es: x = 0, Punto (0, 1).

La gráfica es



(c) Calcula .

**Resolución**

Por la propiedad de aditividad de la integral definida respecto al intervalo de integración nos queda:

Una primitiva de x2 – 1 es . Por la regla de Barrow, nos queda

11.- Siendo Ln(x) el logaritmo neperiano de x, considera la función f: (–1, +∞) → R definida por

(a) Determina el valor de a sabiendo que f es derivable.

**Resolución**

Al ser derivable, en particular es derivable en x = 1.

Para x ≠ 1, f es continua y derivable independientemente del valor de a por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Como es continua en x = 1,

;

Al ser derivable en x = 1,

Conclusión: debe ser a = 1 y sería

(b) Calcula

**Resolución**

Sabemos que .

Por la propiedad de aditividad de la integral definida respecto al intervalo de integración nos queda:

Una primitiva de (x – 1) es

Por otra parte, sea . Por el método de integración por partes

Luego, una primitiva de (x ln x) es . Por la regla de Barrow:

12.- Determina la función f: R → R sabiendo que su derivada segunda es constante e igual a 3 y que la recta tangente en el punto de abscisa x = 1 es 5x – y – 3 = 0.

**Resolución**

.

Como la recta tangente en x = 1 es r: y = 5x – 3, entonces f´(1) = pendiente de la rtg = 5

Luego, 3.1 + a = 5 ⇒ a = 2. Nos queda f´(x) = 3x + 2

Por otra parte, al coincidir la gráfica de f y la recta tangente en x = 1, se cumple que f(1) = 5.1 – 3 = 2

Luego, .

La función que se pide es

13.-

(a) Determina el valor de las constantes a y b sabiendo que la gráfica de la función f: R → R definida

por admite recta tangente en el punto (0, 1).

**Resolución**

Como f admite recta tangente en el punto (0, 1) debe ser derivable en x = 0.

Además, f(0) = 1 (vemos que se cumple porque f(0) = e0 = 1).

Para x ≠ 0, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Como es continua en x = 0,

;

Al ser derivable en x = 0,

Conclusión: debe ser a = –1, b = 1 y quedaría

(b) ¿Existen constantes c y d para las cuales la gráfica de la función g: R → R definida

por admite recta tangente en el punto (0, 1)? (justifica la respuesta)

**Resolución**

Para que, en este caso, g admita recta tangente en el punto (0, 1) debe ser derivable en x = 0

y, además, g(0) = 1 (vemos que se cumple porque g(0) = e0 = 1).

Para x ≠ 0, g es continua y derivable independientemente de las constantes c y d por ser el resultado de

operar con funciones continuas y derivables.

Como debe ser continua en x = 0,

;

Como debe ser derivable en x = 0, (imposible)

Conclusión: No existen constantes c y d para las cuales la gráfica de g admita recta tangente en (0, 1)

14.- Calcula:

(a)

**Resolución**

Indeterminación. Aplicamos la regla de L´Hôpital:

. Por la regla de L´Hôpital, el límite inicial vale

(b)

**Resolución**

Indeterminación. Aunque la indeterminación se puede resolver aplicando la regla de L´Hôpital dos veces, podemos deducir que el límite es 0 porque cuando x tiende

a +∞, e3x es un infinito de orden superior al de x2.

15.- Sea f: R → R la función definida por f(x) = –2x3 – 9x2 – 12x

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

**Resolución**

f´(x) = –6x2 – 18x – 12 = –6(x2 + 3x + 2) = 0 ⇔ ; x = –1, x = –2

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | (–∞, –2) | –2 | (–2, –1) | –1 | (–1, +∞) |
| f´(x) | – | 0 | + | 0 | – |
| f(x) | decreciente | mínimo | creciente | máximo | decreciente |

f es decreciente en (–∞, –2) ∪ (–1, +∞) y creciente en (–2, –1)

(b) Determina los extremos relativos α y β de f con α < β y calcula

**Resolución**

El mínimo relativo se alcanza para x = –2 ; y = –2(–2)3 – 9(–2)2 –12(–2) = 4 , P(–2, 4). Se pide α = –2

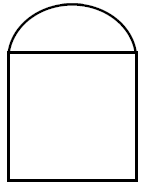
El máximo relativo se alcanza para x = –1 ; y = –2(–1)3 – 9(–1)2 –12(–1) = 5 , P(–1, 5). Se pide β = –1

También nos piden

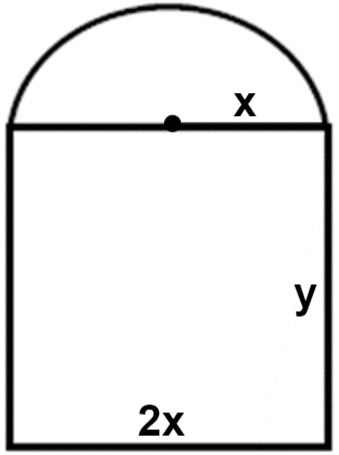
Una primitiva de f es . Por la regla de Barrow,

16.- Determina las dimensiones de una puerta formada por un rectángulo y un semicírculo (como en la

figura), sabiendo que es la que tiene un perímetro mínimo entre las que tienen área igual a 2 m2.



**Resolución**



A(ventana) = 2 →

Función a minimizar:

⇔ (radio)

. Luego, para el perímetro p(x) es mínimo.

(base) (altura)

17.- Sea f: R → R la función definida por

(a) Determina m sabiendo que f es derivable.

**Resolución**

Al ser f derivable, en particular es derivable en x = 0.

Para x ≠ 0, f es continua y derivable independientemente del valor de m por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Como es continua en x = 0,

.

Al ser derivable en x = 0,

Conclusión: debe ser m = –1 y quedaría

(b) Calcula

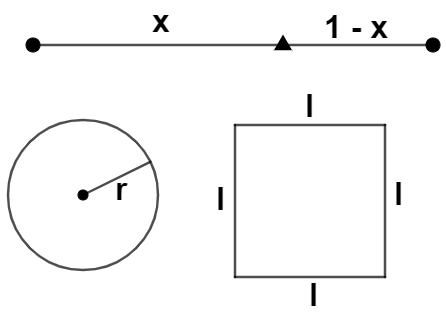
**Resolución**

Por la propiedad de aditividad de la integral definida respecto al intervalo de integración nos queda:

Una primitiva de es p(x) = –ln |1– x| y de es

18.- Un hilo de alambre de 1 m. De longitud se corta en dos trozos formando con uno una circunferencia y con el otro un cuadrado. Prueba que la suma de las áreas es mínima cuando el lado del cuadrado es el doble que el radio de la circunferencia.

**Resolución**



La longitud de la circunferencia es x ⇒ → . El área del círculo es

El perímetro del cuadrado es 1 – x ⇒ 4l = 1 – x ⇒ . El área del cuadrado es

Función a minimizar:

⇒

Veamos si corresponde al mínimo de la función: ; → mínimo

El lado del cuadrado sería entonces y el radio del círculo

Por tanto, el lado es el doble del radio.

19.- Considera la función f: [0, 4] → R la función definida por

(a) Determina la gráfica de f.

(b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

**Resolución**

Como si x = 0, y = 4.0 = 0 y si x = 1, y = 4.1 = 4, en [0, 1] la gráfica es el segmento de

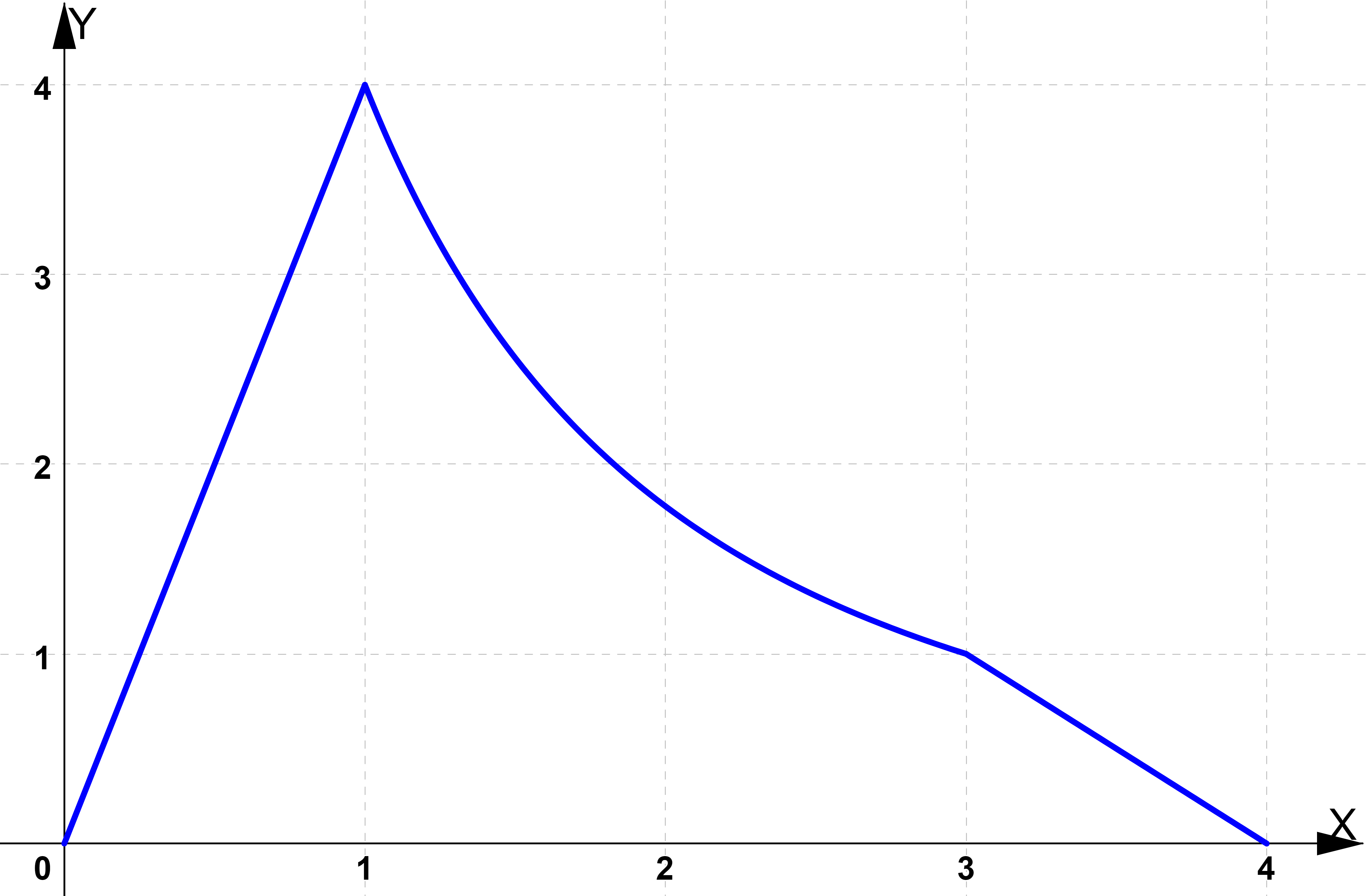
extremos (0, 0) y (1, 4)

Como si y si , en (1, 3) la gráfica es un trozo de curva de extremos (1, 4) y (3, 1)

Como si x = 3, y = 4 – 3 = 1 y si x = 4, y = 4 – 4 = 0, en [3, 4] la gráfica es el segmento de

extremos (3, 1) y (4, 0)

Observamos también que la gráfica corta al eje X en (0, 0) y (4, 0).



El área que se pide es

Una primitiva de (4x) es , una primitiva de es y una primitiva de (4 – x) es . Por la regla de Barrow,

20.- Considera la función f: [0, 3] → R definida por f(x) = 3x – 2. Calcula el punto de la gráfica de f más

cercano al punto (2, 6) y calcula también el más alejado.

**Resolución**

Sea P(2, 6) y Q(x, 3x – 2) un punto genérico de r.

Se trata de hallar el máximo y mínimo absolutos de la función

g(x) = [dist(P, Q)]2 = (x – 2)2 + (3x – 2 – 6)2 = (x – 2)2 + (3x – 8)2 en [0, 3]

Desarrollando, g(x) = 10x2 – 52x + 68.

g´(x) = 20x – 52 = 0 ⇔ , g´´(x) = 20 , . Luego, el mínimo relativo se alcanza

en ;

Valoremos g en los extremos del intervalo: g(0) = 10.02 – 52.0 + 68 = 68 ; g(3) = 10.32 – 52.3 + 68 = 2

Luego, el mínimo absoluto de g se alcanza en y el máximo absoluto en x = 0.

Punto más cercano:

Punto más alejado: Q2(0, 3.0 –2) ⇒ Q2(0, –2)

**21.-** **(prueba extraordinaria)** Considera la función f: (–∞, 10) → R definida por

(a) Determina el valor de a sabiendo que f es continua (y que a > 0).

**Resolución**

Al ser continua, en particular es continua en x = 2.

Luego, .

Y como a > 0, resulta a = 3

(b) Esboza la gráfica de f.

**Resolución**

Como a = 3 y también entonces

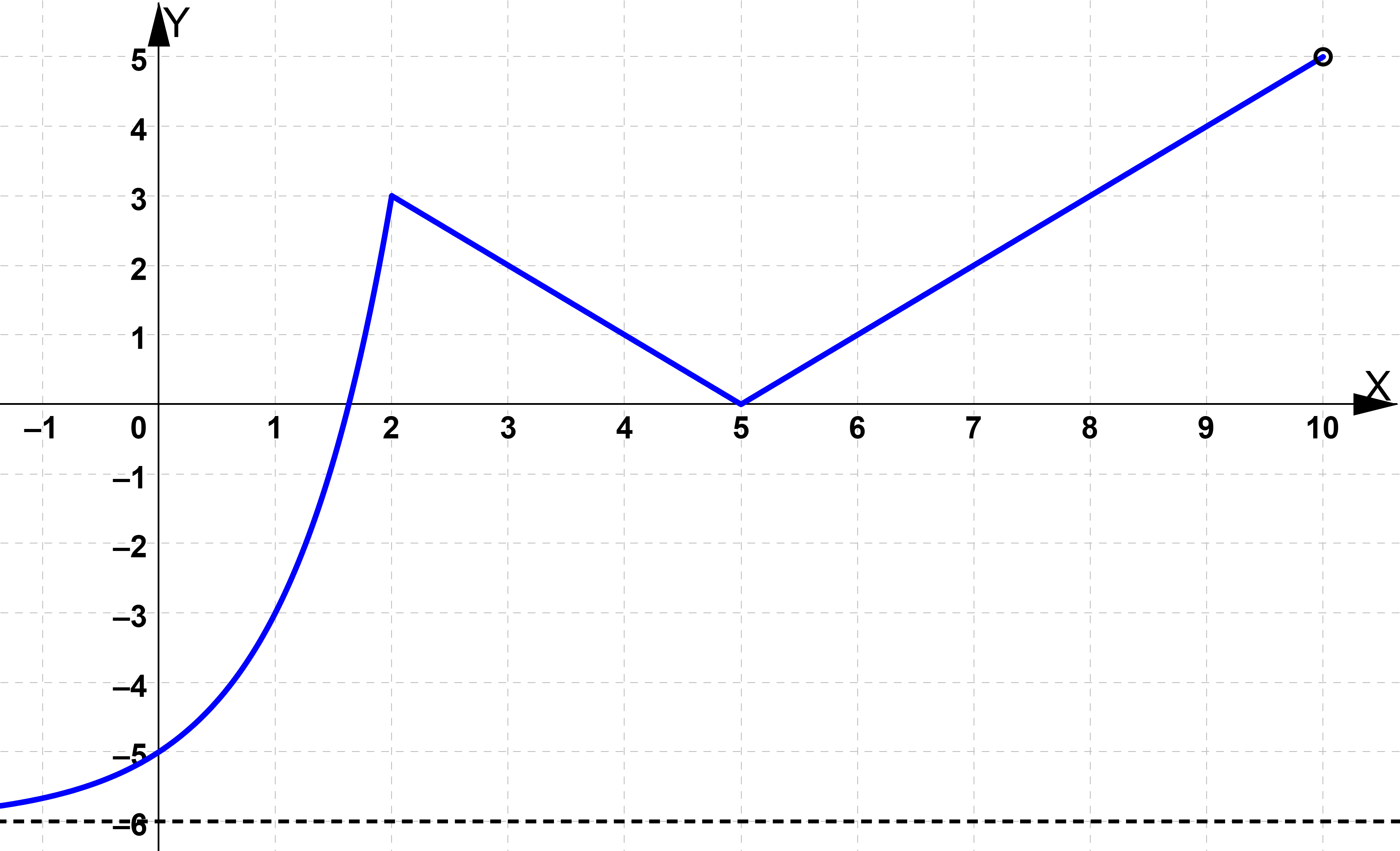
Para el primer trozo usamos ; f(0) = 30 – 6 = –5 ;

Para el 2º trozo, si x = 2, y = 5 – 2 = 3 y si x = 5, y = 0, en [2, 5) la gráfica es el segmento de

extremos (2, 3) y (5, 0)

Para el 3er trozo, si x = 5, y = 0 y si x = 10, y = 10 – 5 = 5, en [5, 10) la gráfica es el segmento de

extremos (5, 0) y (10, 5)



(c) Estudia la derivabilidad de f.

**Resolución**

. Sabemos que f es continua en (–∞, 10)

Para x ≠ 2, x ≠ 5, f es derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables,

siendo

Estudiemos el caso x = 2:

Luego, f NO es derivable en x = 2

Estudiemos el caso x = 5: Luego, f NO es derivable en x = 5

Por tanto, f es derivable en (–∞, 10) – {2 ; 5}

**22.- (prueba extraordinaria)**

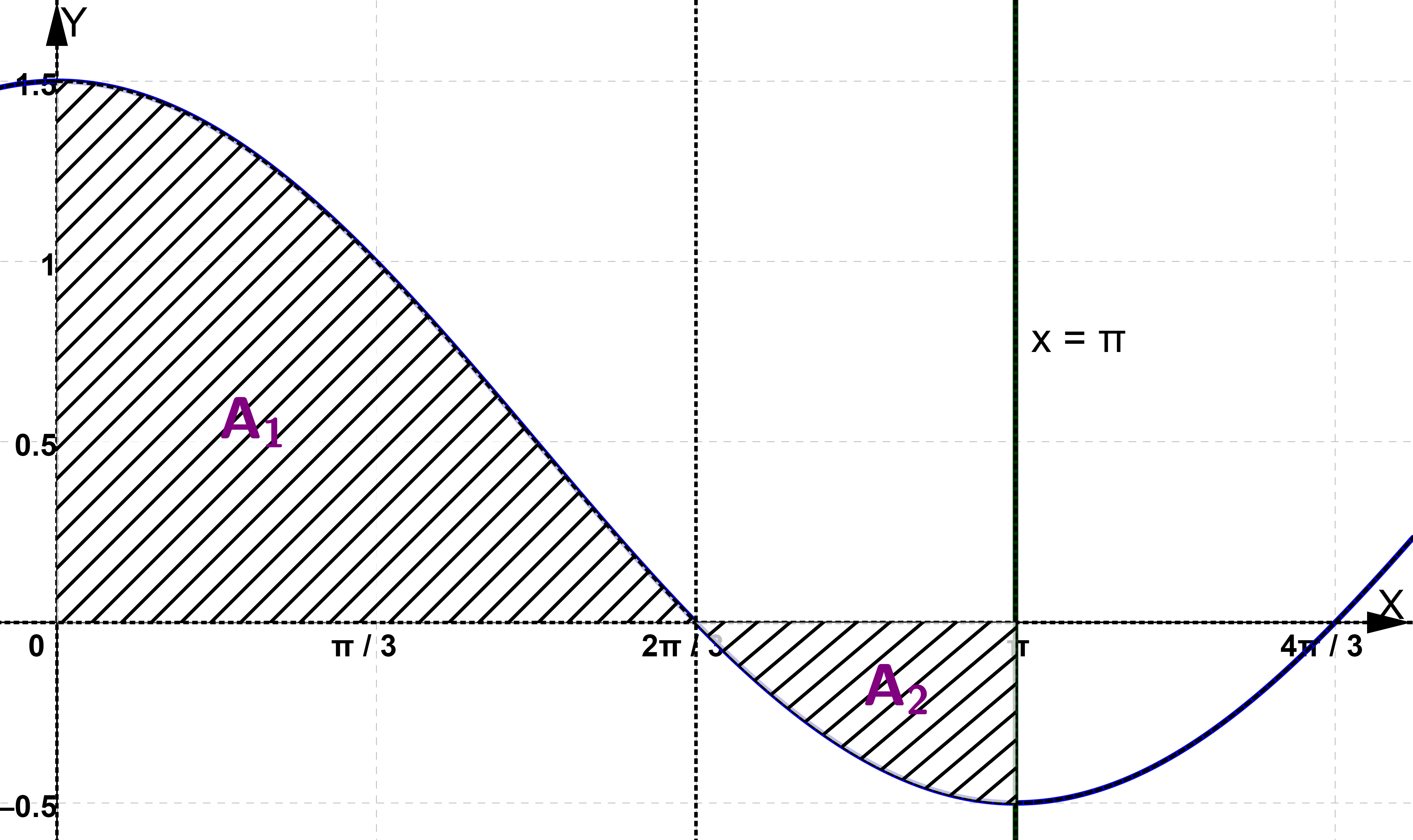
(a) Determina el recinto limitado por la curva , los ejes coordenados y la recta x = π.

(b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

**Resolución**

La gráfica de es idéntica a la de cos x pero desplazada media unidad hacía arriba.

Usamos además que y si 0 < x < π,



El área que se pide es ; ;

Una primitiva de la función del integrando es . Por la regla de Barrow,

Luego, el área que se pide es

**23.- (prueba extraordinaria)** Calcula el área encerrada entre la curva y = x3 – 4x y el eje de abscisas

**Resolución**

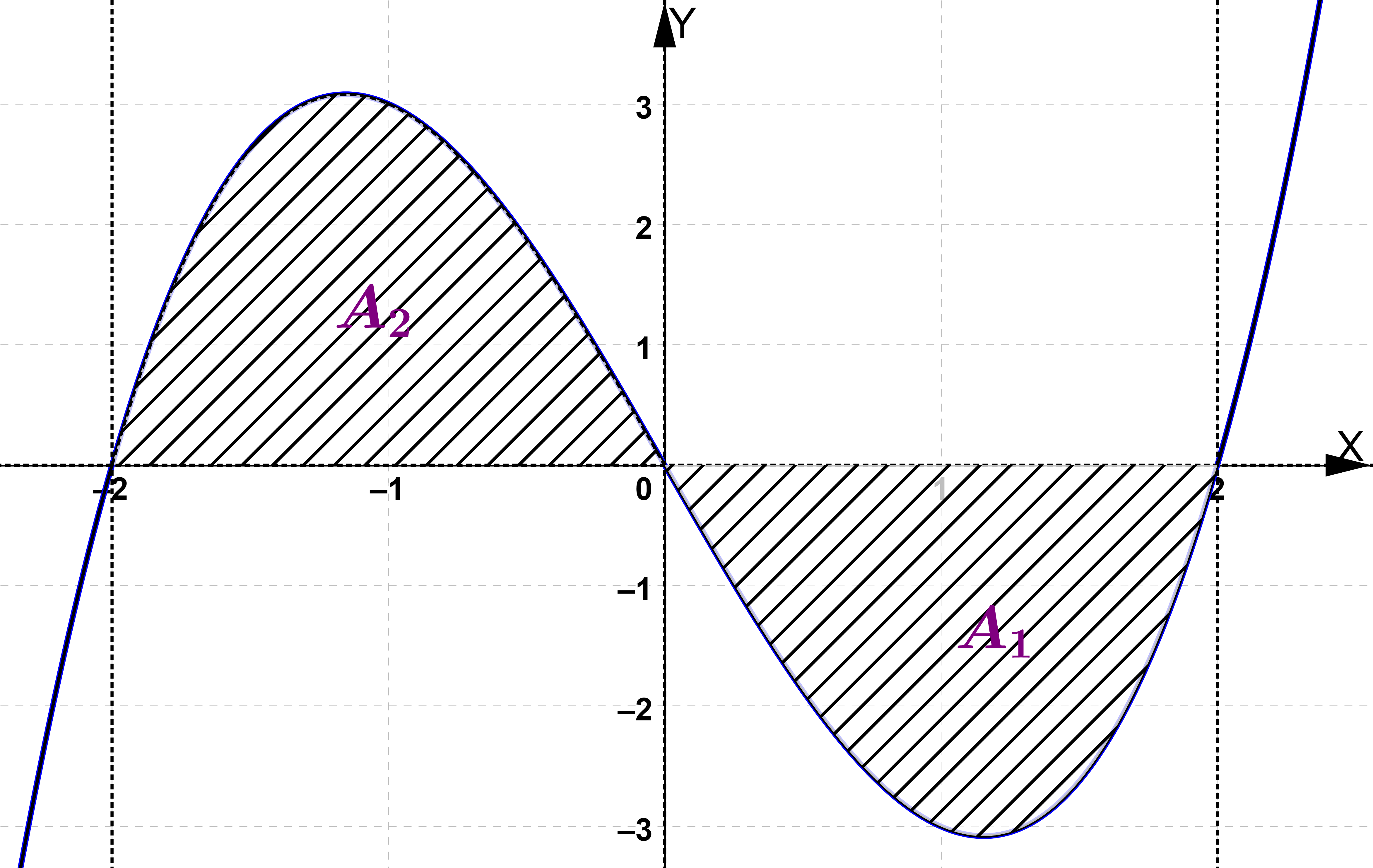
x3 – 4x = x(x2 – 4) = 0 ⇔ x = 0, x = ± 2 ⇒ la curva corta al eje X en (0, 0), (2, 0) y (–2, 0)

Si f(x) = x3 – 4x entonces f´(x) = 3x2 – 4 = 0 ⇔

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| f´(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | creciente | máximo | decreciente | mínimo | creciente |

Por otra parte, ,



El área que se pide es . Por simetría, A1 = A2. Luego, el área es A = 2A1

. Una primitiva es .

Por la regla de Barrow,

Luego, el área que se pide es

**24.- (prueba ordinaria)** Determina α sabiendo que existe y es finito el límite

Calcula dicho límite.

**Resolución**

Vamos a hallar el límite: Indeterminación

Aplicamos L´Hôpital:

Se puede aplicar. Por tanto,

Como queremos que el límite sea finito, debe ser 2 + α = 0 porque de lo contrario el límite

valdría ±∞. Luego, α = –2

Volviendo al cálculo anterior y sustituyendo α = –2: Indeterminación

De nuevo L´Hôpital: Indeterminación

De nuevo L´Hôpital:

Se puede aplicar. Por tanto, el límite del enunciado, para α = –2, vale 2.

**OTROS DEL 2001 (COU I)**

1.- De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 10 m, calcula las dimensiones y el

área del que tiene área máxima.

**Resolución**

Si llamamos x, y a los catetos, por el teorema de Pitágoras

Nótese que 0 < x < 10, por ser el cateto siempre menor que la hipotenusa.

Se trata de maximizar el área

. Hagamos una tabla de signos de A´(x):

Para los signos de A´(x) téngase en cuenta que es una parábola cóncava que corta al eje X

en

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | (0, ) |  |  |
| f´(x) | + | 0 | – |
| f(x) | creciente | máximo | decreciente |

El área es máxima para ,

Respuesta: el que tiene área máxima es el triángulo rectángulo isósceles de catetos cada uno.

2.- Sea, f: [0, 1] → R la función definida por f(x) = x – ln(2 – x)

(a) Justifica si f tiene alguna raíz en [0, 1].

**Resolución**

f es continua en [0, 1] por ser el resultado de operar con funciones continuas.

f(0) = 0 – ln(2 – 0) = –ln 2 < 0 y f(1) = 1 – ln(2 – 1) = 1 > 0.

Por el teorema de Bolzano existe al menos un c ∈ (0, 1) tal que f(c) = 0. Luego, c es una raíz de f.

(b) Determina el número total de raíces que tiene f en [0, 1].

**Resolución**

f es derivable en [0, 1] por ser el resultado de operar con funciones derivables.

pues 0 < x < 1. Luego, f es creciente en (0, 1).

Por tanto, f sólo tiene una raíz en [0, 1].

(c) Enuncia los teoremas que hayas utilizado en los apartados anteriores.

**Resolución**

Sólo ha sido necesario usar el teorema de Bolzano: Si f(x) es continua en [a, b] y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un c ∈ [a, b], tal que f(c) = 0.

3.- Se considera la función f: [–1, 1] → R dada por

(a) Halla el valor de la constante c sabiendo que f es continua.

**Resolución**

Como es continua, en particular lo es en x = 0 ⇒

(b) ¿Es f derivable en x = 0?

**Resolución**

Como c = 1,

Para x ≠ 0, f es derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables,

siendo

(c) Calcula .

**Resolución**

Por la propiedad de aditividad de la integral definida respecto al intervalo de integración nos queda:

Una primitiva de x2 + 1 es y de es .

Por la regla de Barrow, nos queda

4.-

(a) Sombrea el recinto acotado del plano limitado por las curvas y = ex , y = e–x e y = 2.

(b) Calcula el área de dicho recinto.

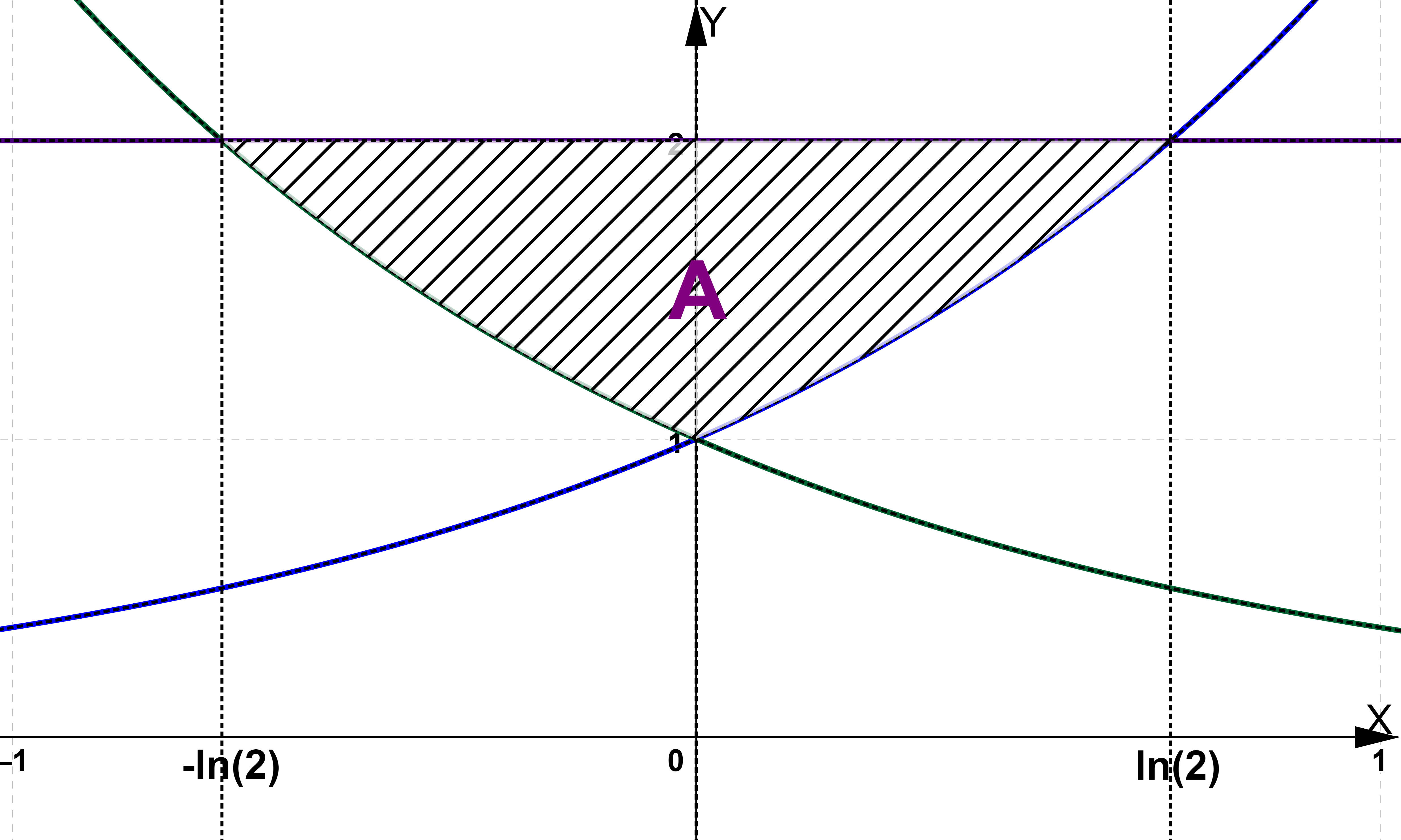
**Resolución**

Hallamos los puntos de corte entre las curvas:

. Punto de corte (0, 1)

. Punto de corte (ln 2, 2)

. Punto de corte (–ln 2, 2)



Por simetría, el área del recinto es .

Una primitiva es

Por la regla de Barrow,

5.- De la función f: R → R se sabe que f(x) > f´(x) > 0 para cada x ∈ R. Ordena por orden creciente, los números , y . Justifica la respuesta.

**Resolución**

Al ser f(x) > 0, la función f(x) está siempre por encima del eje X y como f´(x) > 0, la función f(x) es siempre creciente.

Por el Teorema del valor medio para integrales sabemos que si f(x) es continua en [a, b] entonces existe por lo menos un c ∈ (a, b) tal que

Aplicando el teorema a cada integral:

- existe c ∈ (1, 4) tal que

- existe d ∈ (2, 3) tal que

- existe e ∈ (10, 13) tal que

Y usando además el crecimiento de f obtenemos

6.-

(a) Enuncia el Teorema de Weierstrass.

**Resolución**

Si f(x) es continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces f(x) alcanza su máximo y su mínimo absoluto dentro de dicho intervalo, es decir, la imagen de f también es un intervalo cerrado.

(b) Determina los extremos relativos (o locales) y los extremos absolutos de la función f: [0, 3π/2] → R, definida por f(x) = x – 2sen(x)

**Resolución**

f es continua y derivable en [0, 3π/2] por ser resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Por el teorema de Weierstrass f tiene máximo y mínimo absoluto.

f´(x) = 1 – 2 cos x = 0

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | (0, π/3) | π/3 | (π/3, 3π/2) |
| f´(x) | – | 0 | + |
| f(x) | decreciente | mínimo | creciente |

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

Mínimo relativo: x = π/3 , y = f(π/3) = π/3 – 2 sen(π/3) =

No hay máximo relativo.

Evaluamos f en los extremos del intervalo:

f(0) = 0 – 2 sen 0 = 0 ; f(3π/2) = 3π/2 – 2 sen(3π/2) =

Mínimo absoluto: x = π/3 , ; Máximo absoluto: x = 3π/2 ,

7.- Considera. la función f: [0, +∞) → R definida por

(a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (1, 0).

**Resolución**

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto A(x0, f(x0))

es rtg: y = f´(x0)(x – x0) + f(x0). En este caso, x0 = 1 ;

. La recta tangente es

(b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la tangente hallada y el eje de ordenadas.

Calcula su área.

**Resolución**

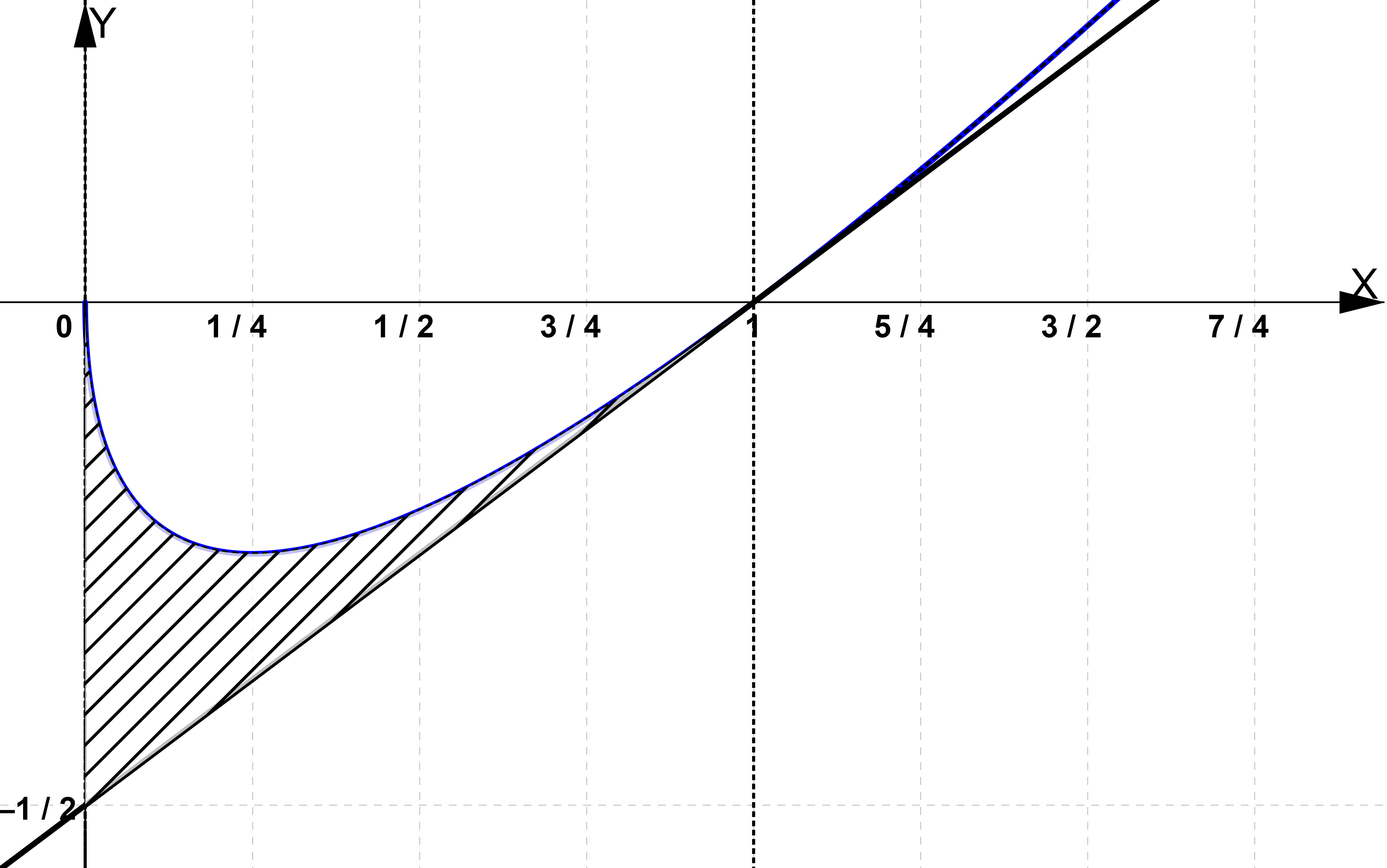
Puntos de corte de la recta y la gráfica de f: ;

;

Es decir, sólo se cortan en el punto de tangencia, (1, 0).

; ;

Mínimo relativo: . Punto . Además,



El área que se pide es

Una primitiva del integrando es .

Por la regla de Barrow,

8.- Se consideran las funciones f: R → R definida por f(x) = x2 + 1 y la función g definida

para x ≠ 0 por g(x) = Ln(|x|) (donde Ln denota la función logaritmo neperiano).

(a) Sabiendo que (f o g)(x) = f(g(x)) determina la función (f o g).

**Resolución** f o g: R – {0} → R, (f o g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]2 + 1 = ln2|x| + 1

(b) Estudia la existencia de la derivada de (f o g) en x = 1.

**Resolución**

.

Para x ≠ 0, h es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables,

siendo . Por tanto, existe

(c) Calcula .

**Resolución**

Como 1 < x < 2 entonces x > 0 y g(x) = ln x . Sea

Por el método de integración por partes:

Una primitiva es

Por la regla de Barrow,

9.- Sea f: R → R la función definida por f(x) = ax2 + bx + c. Determina a, b y c sabiendo que la

recta y = –x + 3 es tangente a la gráfica de f en el punto (0, 3) y que el valor de la

integral es –72.

**Resolución**

f(x) = ax2 + bx + c f´(x) = 2ax + b

La recta tangente en (0, 3) es y = –x + 3, que tiene pendiente –1 ⇒ f´(0) = –1 ⇒ 2a.0 + b = –1 ⇒ b = –1

Luego, f(x) = ax2 – x + c. Como la gráfica pasa por (0, 3) ⇒ f(0) = 3 ⇒ a.02 – 0 + c = 3 ⇒ c = 3

Nos queda, f(x) = ax2 – x + 3. Por otra parte, . Una primitiva de f

es . Por la regla de Barrow,

. Luego, a = –1

Conclusión: a = b = –1, c = 3 y f(x) = –x2 – x + 3

10.-

(a) Esboza la región acotada del plano limitada por las gráficas de las funciones f, g: (0, +∞) → R definidas por y

(b) Calcula el área de la región anterior.

**Resolución**

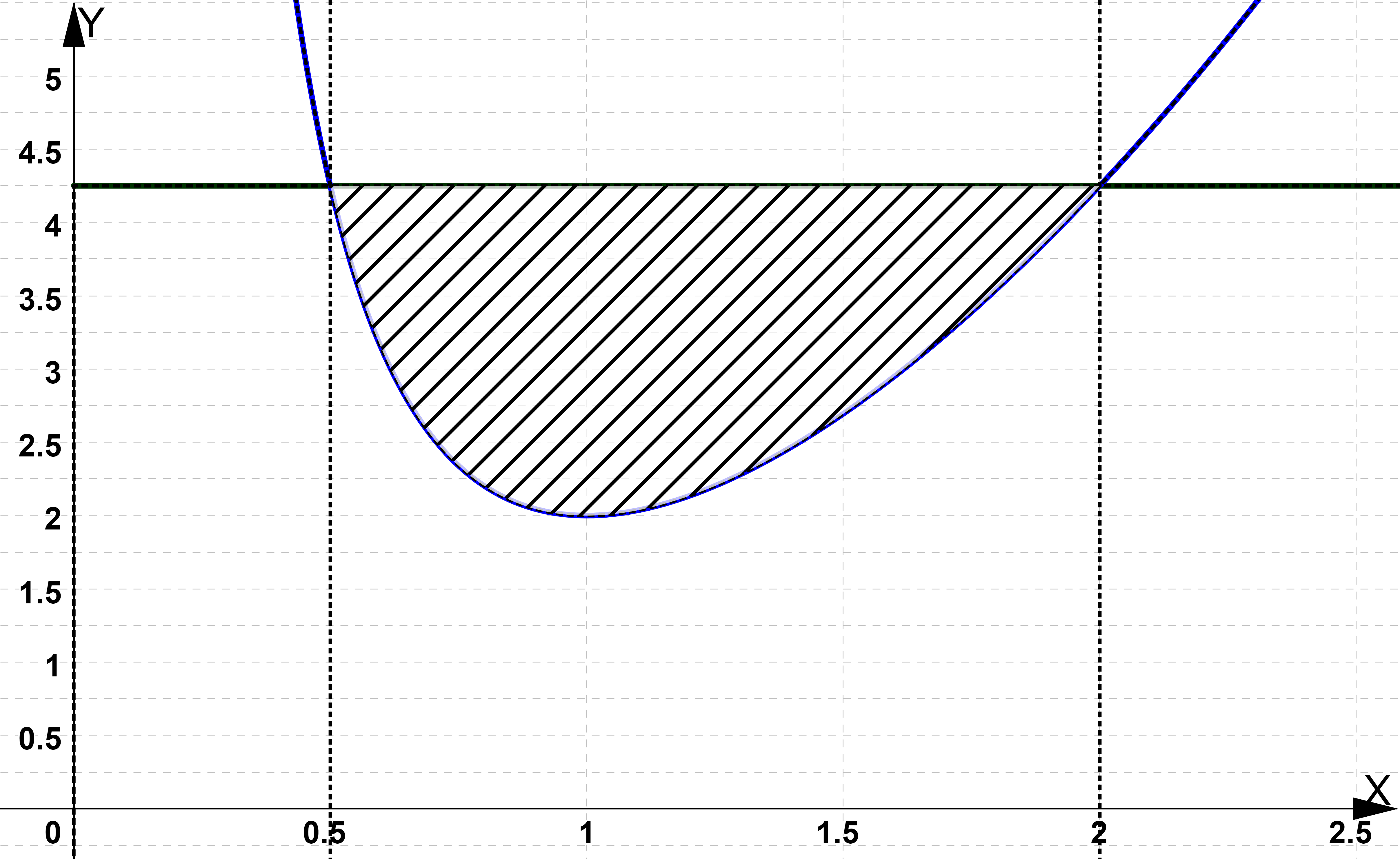
Puntos de corte de la gráficas: ;

Dado que x es positivo, , . Puntos y .

Además,

Por otra parte

Como entonces g´´(1) = 8 > 0. El punto (1, 2) es el mínimo relativo de g.



El área que se pide es . Una primitiva del integrando es

. Por la regla de Barrow,

11.- Estudia la derivabilidad en x = 0 de cada una de las funciones f1, f2, y f3: R → R

definidas por f1(x) = |sen(x)|, f2(x) = |sen(x)|2 y f3 = |x3|.

**Resolución**

En primer lugar, observemos que como  por la regla

de L´Hôpital .

Estudiemos la derivabilidad en x = 0 de f1: .

Como resulta que f1 NO es derivable en x = 0

Estudiemos la derivabilidad en x = 0 de f2: .

Como resulta que f2 es derivable en x = 0

Estudiemos la derivabilidad en x = 0 de f3: .

Como resulta que f3 es derivable en x = 0

12.- Sea f: [0, 3] → R la función definida por f(x) = x2. Calcula el punto de la gráfica de f más próximo al punto P(18, 0) y calcula también el más alejado.

**Resolución**

Sea P(18, 0) y Q(x, x2) un punto genérico de la gráfica de f. Se trata de hallar el mínimo absoluto de la función g(x) = [dist(P, Q)]2 = (x – 18)2 + (x2)2 en [0, 3]. Desarrollando, g(x) = x4 + x2 – 36x + 324.

g´(x) = 4x3 + 2x – 36 = 0 ⇔ 2x3 + x – 18 = 0

Usamos la regla de Ruffini: ; (x – 2)(2x2 + 4x + 9) = 0

Resolviendo: x = 2 ; ; g´´(x) = 12x2 + 2 , .

Luego, el mínimo relativo se alcanza en x = 2,

Valoremos g en los extremos del intervalo:

;

Luego, el mínimo absoluto de g se alcanza en x = 2 y el máximo en x =3.

Punto más cercano: Punto más lejano:

13.- De la función f: R → R dada por f(x) = x3 + ax2 + bx + c se sabe que las rectas tangentes a su gráfica en los puntos (–2, 0) y (1, 0) son paralelas. Determina las constantes a, b y c.

**Resolución**

f(x) = x3 + ax2 + bx + c → f´(x) = 3x2 + 2ax + b

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto A(x0, f(x0)) es f´(x0)

Para (–2, 0), x0 = –2 ; pendiente de la rtg =

Además, como pasa por (–2, 0) → f(–2) = 0 → (–2)3 + a(–2)2 + b(–2) + c = 0 → 4a – 2b + c = 8

Para (1, 0), x0 = 1 ; pendiente de la rtg =

Además, como pasa por (1, 0) → f(1) = 0 → 13 + a.12 + b.1 + c = 0 → a + b + c = –1

Al ser las rectas tangentes paralelas tienen la misma pendiente → –4a + b + 12 = 2a + b + 3 →

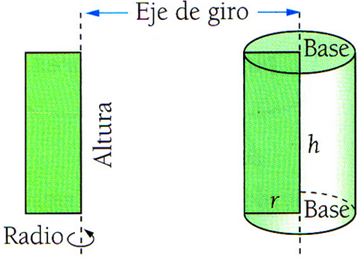
Nos queda el sistema

Sumando las ecuaciones, se tiene que 3c = –3 → c = –1 ; –2b – 1 = 2 →

Conclusión: , y c = –1

14.- Una fábrica construye envases cilíndricos de 1000 cm3 de volumen. Si el coste del material para las partes superior e inferior del envase es de 25 ptas/cm2 y para la superficie lateral es de 15 ptas/cm2, ¿para qué dimensiones se consigue el envase más económico? ¿Cuál es su precio?

**Resolución**



V(cilindro) = πr2h = 1000. Despejando,

El coste de construcción del depósito es C = 2πr2.25 + 2πrh.15 = 50πr2 + 30πrh

Función a minimizar C(r)

⇒ ⇒ ⇒

; . Para el coste es mínimo

; radio aproximado: 4,57 cm ; altura aproximada: 15,24 cm

Coste aproximado:

15.-

(a) Halla k de forma que exista y sea finito

(b) Calcula dicho límite.

**Resolución**

Vamos a hallar el límite:

Como queremos que el límite sea finito, debe ser 2 + k = 0 porque de lo contrario el límite

valdría ±∞. Luego, k = –2

Volviendo al cálculo anterior y sustituyendo k = –2: Indeterminación

Aplicamos L´Hôpital: Indeterminación

De nuevo L´Hôpital:

Se puede aplicar. Por tanto, el límite del enunciado, para k = –2, vale 2.

16.-

(a) Determina λ sabiendo que la función f: R → R definida por es continua

**Resolución**

Para x ≠ π/3, f es continua independientemente del valor de λ por ser el resultado de operar con funciones continuas.

Como es continua en x = π/3,

(b) Calcula .

**Resolución**

Sabemos que f es continua y

Como , por la propiedad de aditividad de la integral definida respecto al intervalo de integración nos queda:

Una primitiva de es .

Sea . Por partes ⇒ .

Una primitiva de es

Por la regla de Barrow,

17.-

(a) Estudia la derivabilidad de la función f: R → R definida por f(x) = |x + 1| + x – 3

**Resolución**

Como entonces

Si x ≠ –1, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Luego, f es continua en x = –1

Para x ≠ –1,

Luego, f NO es derivable en x = –1

Conclusión: f es derivable en R – {–1} y continua en R

(b) Halla los extremos relativos (o locales) y los extremos absolutos (dónde se alcanzan y cuáles son sus respectivos valores) de la función del apartado anterior, si los tiene.

**Resolución**

Como en (–∞, –1) f es constante y en el intervalo (–1, +∞) creciente.

Luego, f no tiene extremos relativos. Serían mínimos absolutos todos los puntos del (–∞, –1) y su valor sería –4.

18.-

(a) Enuncia el teorema de Bolzano y el teorema de Rolle.

**Resolución**

Teorema de Bolzano: Si f(x) es continua en [a, b], y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo

entonces existe por lo menos un c ∈ [a, b], tal que f(c) = 0.

Teorema de Rolle: Si f(x) es continua en [a, b], derivable en (a, b) y además f(a) = f(b) entonces existe por lo menos un c ∈ (a, b), tal que f´(c) = 0.

(b) Demuestra que la ecuación x5 + x + 5 = 0 tiene exactamente una raíz real.

**Resolución**

f(x) = x5 + x + 5 es continua en [–2, –1] por ser el resultado de operar con funciones continuas.

f(–2) = (–2)5 – 2 + 5 = –29 < 0 y f(–1) = (–1)5 – 1 + 5 = 3 > 0.

Por el teorema de Bolzano existe al menos un c ∈ (–2, –1) tal que f(c) = 0. Luego, c es una raíz de la ecuación.

Veamos que sólo hay una raíz.

Si hubiese dos raíces, a y b, entonces f(a) = f(b) = 0 y, por el teorema de Rolle, existiría un c´∈ (a, b) tal que f´(c´) = 0.

Como f´(x) = 5x4 + 1 > 0 entonces f´(c´) > 0 . Luego, no puede haber 2 raíces. Hay una única raíz real.

19.- Sea f la función definida para x ≠ 1 por

(a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

**Resolución**

⇒ f tiene una asíntota vertical en x = 1 cuya ecuación es A.V. : x = 1

Además, y

Estudiemos las asíntotas en ±∞: ⇒ f NO tiene asíntota horizontal en ±∞.

Veamos si tiene asíntota oblicua, AO: y = mx + n

.

La asíntota oblicua en ±∞ es la recta de ecuación AO: ;

. Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en +∞

. Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en –∞

(b) Estudia si existen extremos relativos de f y, si existen, determínalos.

**Resolución**

⇒ x2 – 2x = x(x – 2) = 0 ; x = 0, x = 2

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | (–∞, 0) | 0 | (0, 1) | 1 | (1, 2) | 2 | (2, +∞) |
| f´(x) | + | 0 | – |  | – | 0 | + |
| f(x) | creciente | máximo | decreciente |  | decreciente | mínimo | creciente |

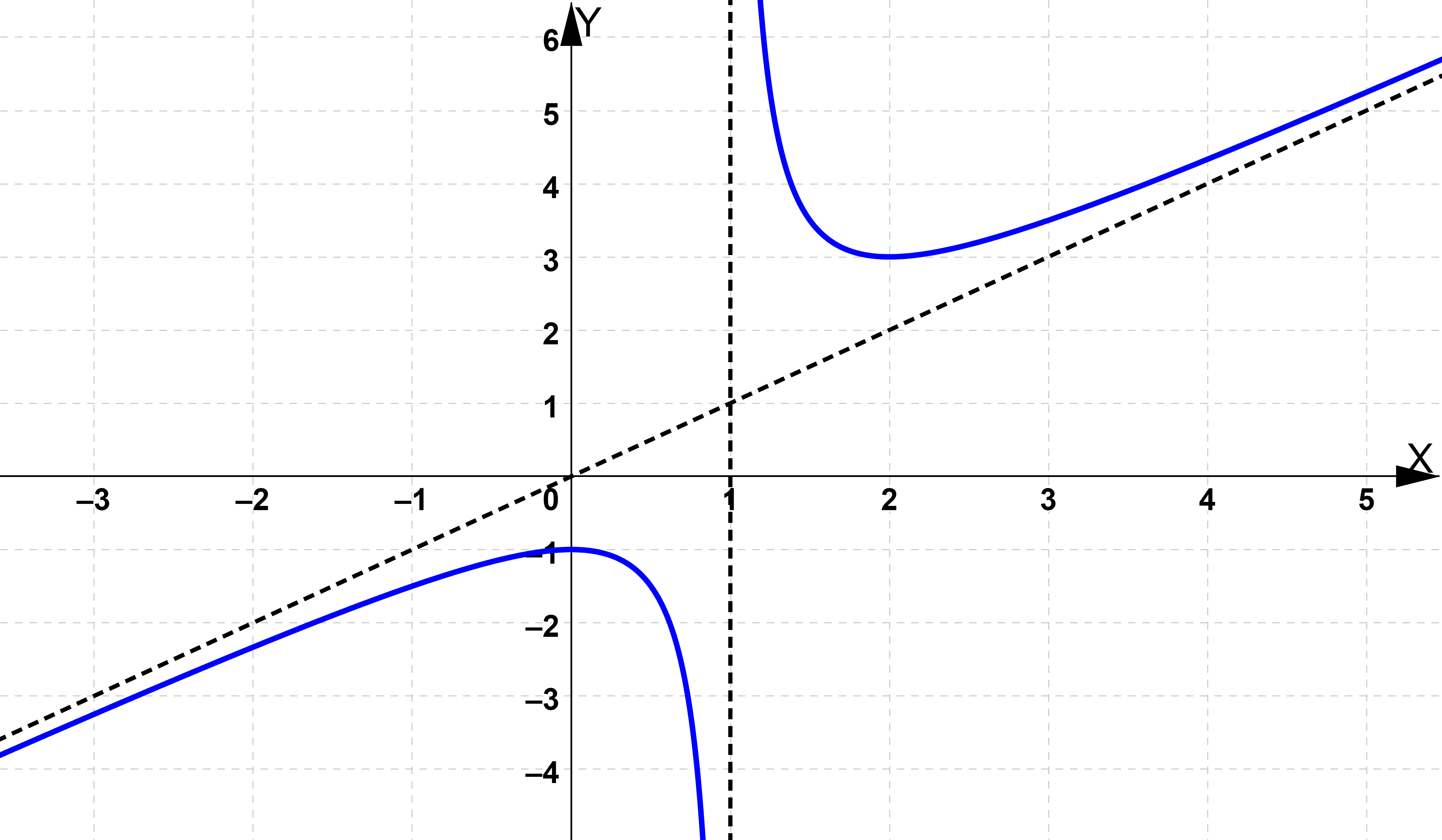
f es creciente en (–∞, 0) ∪ (2, +∞) y decreciente en (0, 2) – {1}

El máximo relativo es: x = 0, . Punto (0, –1)

El mínimo relativo es: x = 2, . Punto (2, 3).

(c) Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica de f.

**Resolución**



20.- Haciendo el cambio de variable ex = t, calcula

**Resolución**

t = ex , dt = ex dx = t dx. Despejando, . Entonces,

. Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples:

Multiplicando los dos miembros por (t + 1)2, tenemos t = A(t + 1) + B

para t = –1, sustituyendo –1 = B ; para t = 0, sustituyendo 0 = A + B = A – 1 ; A = 1

21.- Sea f: R → R la función dada por f(x) = x2 + bx + c. Determina b y c sabiendo que la

recta x + 10y = 41 es normal a la gráfica de f en el punto (de la gráfica) de abscisa x = 1.

**Resolución**

f´(x) = 2x + b y la ecuación de la recta normal es

Como es la pendiente de la recta normal en x = 1, entonces ⇒ .

Luego, 2.1 + b = 10 ⇒ b = 8. Nos queda f(x) = x2 + 8x + c

Como la gráfica y la recta normal coinciden en x = 1 ⇒

Conclusión: b = 8, c = –5 y f(x) = x2 + 8x – 5

22.- Determina los extremos relativos (o locales) y los extremos absolutos (dónde se alcanzan y cuáles son sus respectivos valores) de la función f: [0, 5π/4] → R definida por f (x) = cos x – sen x.

**Resolución**

f es continua y derivable en [0, 5π/4] por ser resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Por el teorema de Weierstrass f tiene máximo y mínimo absoluto.

f´(x) = –sen x – cos x = 0 pues 0 < x < 5π/4

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | (0, 3π/4) | 3π/4 | (3π/4, 5π/4) |
| f´(x) | – | 0 | + |
| f(x) | decreciente | mínimo | creciente |

Mínimo relativo: x = 3π/4 ,

No hay máximo relativo.

Evaluamos f en los extremos del intervalo:

;

Mínimo absoluto: x = 3π/4 , ; Máximo absoluto: x = 0 ,

23.- Calcula el área del recinto limitado por el eje de ordenadas y las curvas de

ecuaciones y = e–x , y = x e–x.

**Resolución**

Hallamos los puntos de corte entre las curvas:

. Punto de corte

1ª curva:

(la primera curva es decreciente). Además, ,

e–x > 0 y e0 = 1 con lo que la curva sólo corta al eje Y en (0, 1)

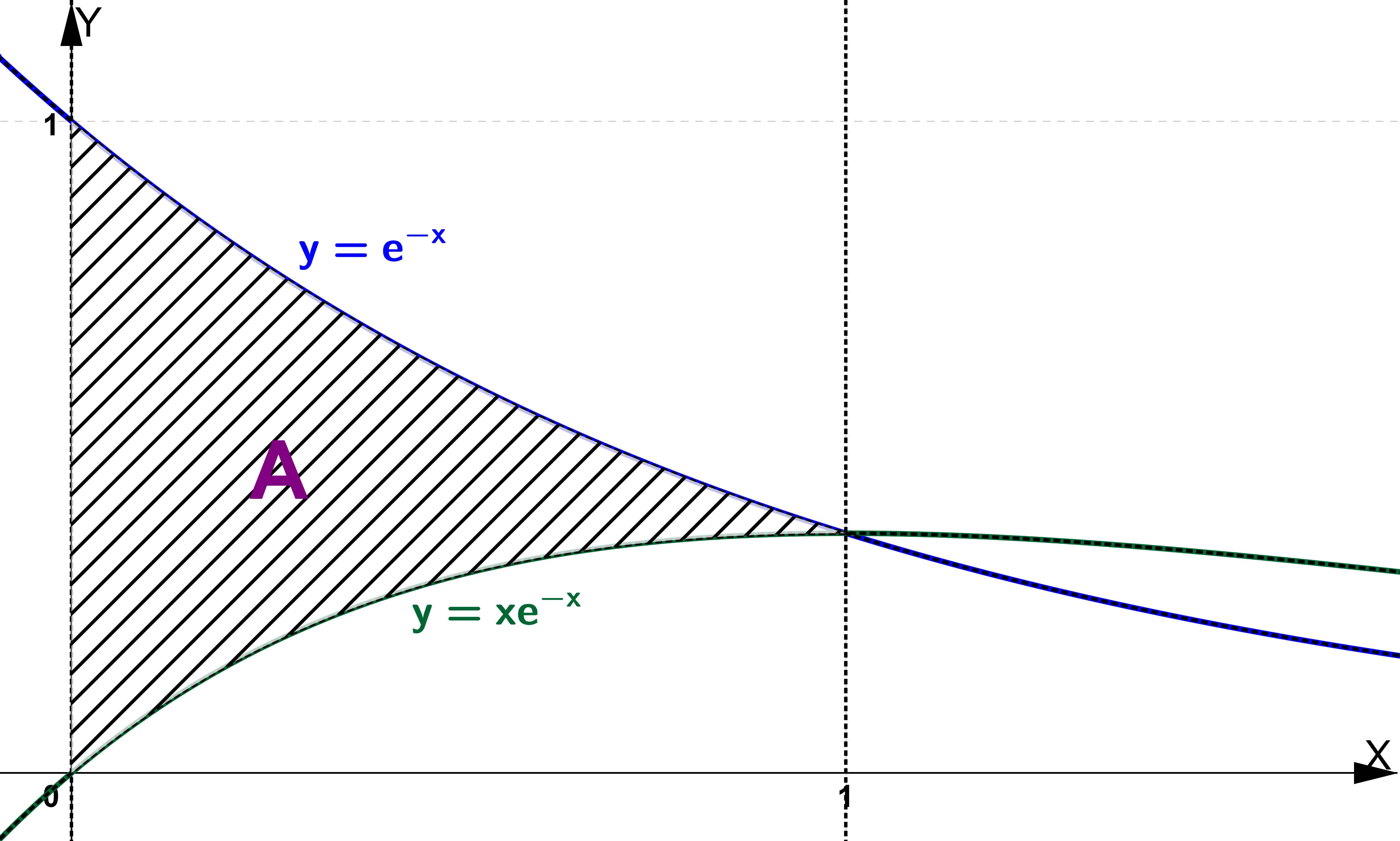
2ª curva:

;

. Máximo relativo: . Punto .

Además, , , por la escala de infinitos

xe–x = 0 ⇔ x = 0 y 0e0 = 0 con lo que la curva sólo corta los ejes en (0, 0)



El área que se pide es

Sea . Por el método de integración por partes .

Obtenemos .

Luego, una primitiva de la función del integrando es . Por la regla de Barrow:

24.- Considera a < 0 y la función f: [a, 0] → R dada por

(a) Estudia la derivabilidad de f en (a, 0).

**Resolución**

Si x ∈ (a, 0) entonces x < 0 y, por tanto, – x > 0. Luego, tiene sentido f(x).

Además, f es continua en [a, 0] y derivable y derivable en (a, 0) con

(b) Justifica si f cumple o no las hipótesis del Teorema del valor medio de Lagrange.

**Resolución**

El Teorema del valor medio de Lagrange dice: Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a, b],

derivable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe al menos un punto c ∈ (a, b)

tal que . O sea f(b) – f(a) = f´(c)⋅(b – a). La función dada cumple las hipótesis en el

intervalo [a, 0] pues es continua en [a, 0] y derivable en (a, 0)

(c) Halla el valor de a para que se verifique .

**Resolución**

Se tiene que

Una primitiva de f es .

Por la regla de Barrow: