

1.- Considera la recta r dada por $r: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x + y - 4z = 7 \end{cases}$ y el punto $P(-3, 1, 6)$.

(a) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r .

Resolución

La recta r está dada como intersección de dos planos. Luego, su vector director se puede obtener como el producto vectorial de los vectores normales de los planos:

$$\vec{d}_r = (2, -1, 0) \times (2, 1, -4) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (4, 8, 4) // (1, 2, 1)$$

Hallemos un punto de r : para $x = 0$, $\begin{cases} -y = 5 \\ y - 4z = 7 \end{cases}$, $y = -5$; $-5 - 4z = 7$; $-12 = 4z$; $z = -3$

Luego, $A(0, -5, -3) \in r$

Unas ecuaciones paramétricas de r son $r: \begin{cases} x = k \\ y = -5 + 2k \\ z = -3 + k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{R}$

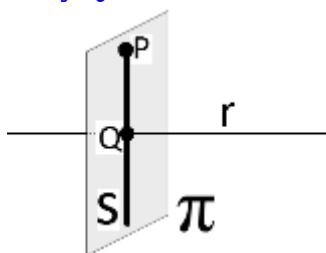
(b) Encuentra la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por P .

Resolución

Hallamos el plano π que pasa por P y es perpendicular a r .

Después, calculamos el punto de corte, Q , entre r y π .

La recta s que nos piden es la que pasa por P y Q



Un vector normal de π es un vector director de r :

$$\vec{n}_\pi = \vec{d}_r = (1, 2, 1) ; P(-3, 1, 6) \in \pi \Rightarrow \pi: 1(x + 3) + 2(y - 1) + 1(z - 6) = 0 \Rightarrow \pi: x + 2y + z - 5 = 0$$

Hallemos $Q = r \cap \pi$: $\begin{cases} x = k \\ y = -5 + 2k \\ z = -3 + k \\ x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$; $k + 2(-5 + 2k) + (-3 + k) - 5 = 0$; $6k - 18 = 0$; $k = 3$

Por tanto, $\begin{cases} x = 3 \\ y = -5 + 2 \cdot 3 \\ z = -3 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(3, 1, 0)$

Hallemos unas ecuaciones paramétricas de la recta, s , que nos piden:

Como s pasa por Q y $\vec{d}_s = \overrightarrow{PQ} = (3, 1, 0) - (-3, 1, 6) = (6, 0, -6) // (1, 0, -1)$

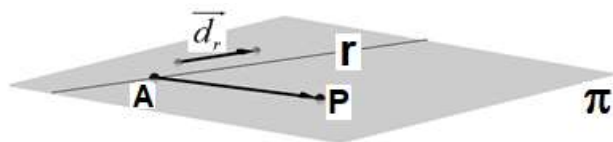
$$s: \begin{cases} x = 3 + k \\ y = 1 \\ z = -k \end{cases}, \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

2.- (prueba ordinaria) Considera el punto $P(1, -1, 0)$ y la recta "r" dada por $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$

(a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a "r".

Resolución

Observamos que $P \notin r$ porque no cumple sus ecuaciones, $\begin{cases} 1 = 1 + 3t \\ -1 = -2 \\ 0 = t \end{cases}$ (*imposible*)



El plano π que nos piden pasa por $P(1, -1, 0)$ y tiene como vectores directores

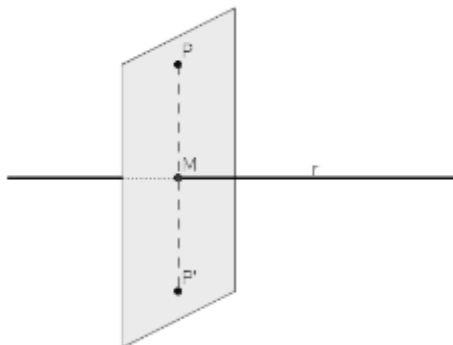
$$\vec{d}_r = (3, 0, 1) \text{ y } \vec{AP} = (1, -1, 0) - (1, -2, 0) = (0, 1, 0)$$

$$\text{Un vector normal de } \pi \text{ es } \vec{n}_\pi = (3, 0, 1) \times (0, 1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, 3)$$

$$\pi: -1(x - 1) + 0(y + 1) + 3(z - 0) = 0. \text{ De donde, } \pi: -x + 3z + 1 = 0$$

(b) Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto a "r".

Resolución



El punto simétrico de P respecto de la recta r sería el punto $P'(a, b, c)$ del dibujo. Vamos a hallarlo:

- Hallamos el plano α que pasa por P y es ortogonal a la recta r:

$$\text{Un vector normal } \vec{n} \text{ del plano es el vector director de } r: \vec{n} = \vec{d}_r = (3, 0, 1)$$

$$\text{Y como } \alpha \text{ pasa por } P(1, -1, 0), \alpha: 3(x - 1) + 0(y + 1) + 1(z - 0) = 0, \text{ de donde } \alpha: 3x + z - 3 = 0$$

- Hallamos M, punto de corte de r y α , resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases} ; 3(1 + 3t) + t - 3 = 0 ; 10t = 0 ; t = 0. \text{ El punto de corte es } M(1, -2, 0)$$

- Por último, hallamos el simétrico $P'(a, b, c)$ de $P(1, -1, 0)$ usando que M es el punto medio del segmento PP' :

$$\begin{cases} \frac{a+1}{2} = 1 \Rightarrow a = 1 \\ \frac{b-1}{2} = -2 \Rightarrow b = -3 \\ \frac{c+0}{2} = 0 \Rightarrow c = 0 \end{cases} . \text{ El punto simétrico que se pide es } P'(1, -3, 0)$$

3.- (prueba ordinaria) Sean los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$ $\vec{v} = (0, 2, 1)$ y $\vec{w} = (m, 1, n)$

(a) Halla m y n sabiendo que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

Resolución

Si los vectores son l.d., $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{vmatrix} = 0$. De donde, $2n - 2m - 1 = 0 \rightarrow 2n - 2m = 1$

Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$. De donde, $1 \cdot m + 0 \cdot 1 + 1 \cdot n = 0 \Rightarrow m + n = 0$

Nos queda el sistema, $\begin{cases} 2n - 2m = 1 \\ n + m = 0 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 2n - 2m = 1 \\ 2n + 2m = 0 \end{cases}$

Sumando las ecuaciones, $4n = 1$, $n = \frac{1}{4}$. Sustituyendo, $m = -\frac{1}{4}$

(b) Para $n = 1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas.

Resolución

Para $n = 1$, $\vec{w} = (m, 1, 1)$

$10 = V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} V_{\text{paralelepípedo}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{6} |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| =$

$= \frac{1}{6} |2 - 2m - 1| = \frac{|1 - 2m|}{6}$; $|1 - 2m| = 60$. Luego, $1 - 2m = 60$; $m = -\frac{59}{2}$ ó $1 - 2m = -60$; $m = \frac{61}{2}$

4.- Considera las rectas dadas por $r: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$

a) Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

Resolución

Estudiamos primero la posición relativa de r y s:

La recta r es $r: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$, está dada como intersección de dos planos. Luego, su vector director se puede obtener como el producto vectorial de los vectores normales de los planos:

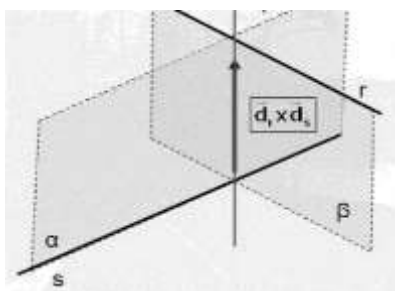
$$\vec{d}_r = (1, -1, 0) \times (1, 0, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

Hallemos un punto de r: para $x = 0$, $y = 1$; $z = 1$. Luego, $A(0, 1, 1) \in r$

La recta s tiene de vector director $\vec{d}_s = (-1, 1, 0)$ y $B(1, 0, 2) \in s$

El vector $\vec{AB} = (1, -1, 1)$. Como $\det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, los vectores

$\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\vec{AB}$ son linealmente independientes. Luego, r y s se cruzan



Sea t la recta que se pide. Como la recta t debe ser perpendicular a r y a s , tendrá de vector director

$$\vec{d}_t = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -1, 2) // (1, 1, -2)$$

- Hallamos el plano, α , perpendicular a r y que contiene a s :

Al tener como vectores directores $\vec{d}_s$ y $\vec{d}_t$, un vector normal de α es

$$\vec{n}_\alpha = \vec{d}_s \times \vec{d}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2, -2, -2) // (1, 1, 1)$$

Y como α pasa por $B(1, 0, 2)$, entonces $\alpha: 1(x-1) + 1(y-0) + 1(z-2) = 0$; $\alpha: x + y + z - 3 = 0$

- Hallamos el plano, β , perpendicular a s y que contiene a r :

Al tener como vectores directores $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_t$, un vector normal de β es

$$\vec{n}_\beta = \vec{d}_r \times \vec{d}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3, 3, 0) // (-1, 1, 0)$$

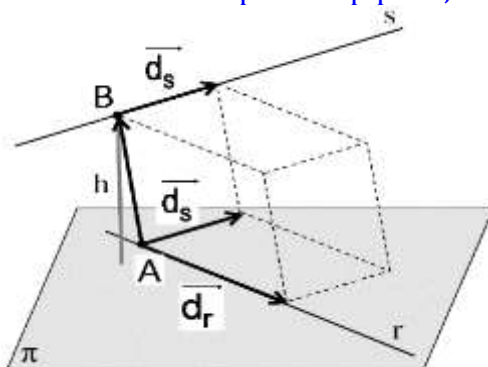
Y como β pasa por $A(0, 1, 1)$, entonces $\beta: -1(x-0) + 1(y-1) + 0(z-1) = 0$; $\beta: -x + y - 1 = 0$

La recta perpendicular común es $t = \alpha \cap \beta$. O sea $t: \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ -x + y - 1 = 0 \end{cases}$

b) Halla la distancia entre las rectas r y s .

Resolución

Podemos hallarla usando la fórmula de la altura del paralelepípedo,



$$V_{\text{paralel}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow h = d(r, s) = \frac{V_{\text{paralel}}}{A_{\text{base}}} = \frac{|\det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{AB})|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

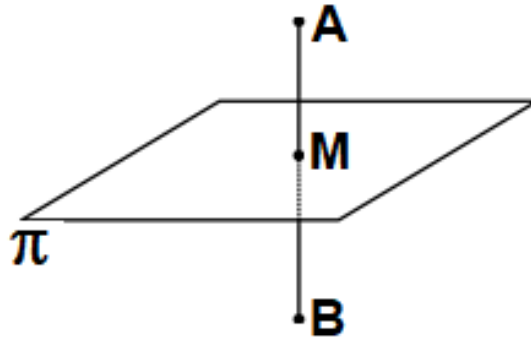
$$\det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (-1, -1, 2)$$

$$\text{Luego, } d(r, s) = \frac{|2|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} u$$

5.- Considera los puntos $A(1, 3, -1)$ y $B(3, -1, -1)$.

a) Determina la ecuación del plano respecto del cual B es el simétrico de A.

Resolución



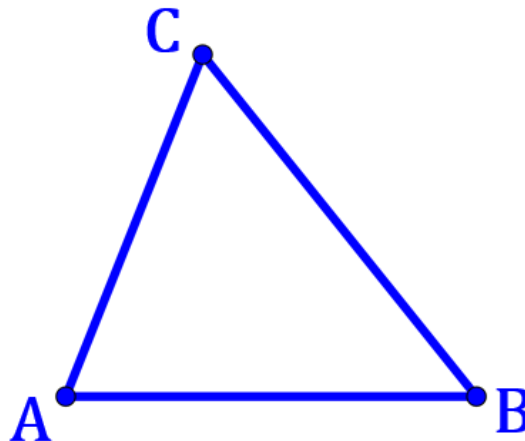
El plano π que se pide pasa por M, punto medio de AB. El punto es $M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{3-1}{2}, \frac{-1-1}{2}\right) \Rightarrow M(2, 1, -1)$

Un vector normal $\vec{n}$ del plano es el vector $\overrightarrow{AB} = (2, -4, 0) // (1, -2, 0)$

Y como π pasa por $M(2, 1, -1)$, $\pi: 1(x - 2) - 2(y - 1) + 0(z + 1) = 0$, de donde $\pi: x - 2y = 0$

b) Siendo $C(5, 1, 5)$, calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

Resolución



Sabemos que el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo generado por los vectores

$\overrightarrow{AB} = (2, -4, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (4, -2, 6)$. O sea, $A(\text{triángulo}) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = (-24, -12, 12)$$

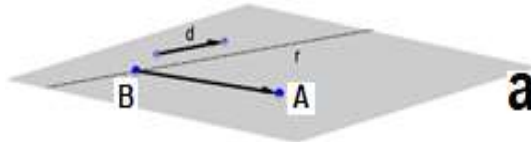
$$A(\text{triángulo}) = \frac{1}{2} \sqrt{(-24)^2 + (-12)^2 + 12^2} = \frac{\sqrt{864}}{2} = \frac{\sqrt{2^5 3^3}}{2} = \frac{12\sqrt{6}}{2} = 6\sqrt{6} \text{ u}^2$$

6.- Sea π el plano determinado por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, \lambda)$, siendo λ un número real, y sea r la recta dada por $r: \begin{cases} y - z = 3 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r .

Resolución

Observamos que $A(1, 0, 0) \notin r$ porque no verifica sus ecuaciones, $\begin{cases} 0 - 0 \neq 3 \\ -1 + 2 \cdot 0 \neq 3 \end{cases}$.



Como $r: \begin{cases} y - z = 3 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$, está dada como intersección de dos planos su vector director se puede obtener como el producto vectorial de los vectores normales de los planos:

$$\vec{d} = (0, 1, -1) \times (-1, 2, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (2, 1, 1)$$

Halleemos un punto, B , de r : para $y = 0$, $z = -3$; $x = -3$. Luego, $B(-3, 0, -3) \in r$

El vector director de la recta r , $\vec{d} = (2, 1, 1)$ y el vector $\overrightarrow{BA} = (4, 0, 3)$ son vectores directores del plano "a" que buscamos. Luego, un vector normal de "a" es

$$\vec{n} = \vec{d} \times \overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (3, -2, -4)$$

Y como a pasa por $A(1, 0, 0)$, entonces $a: 3(x - 1) - 2(y - 0) - 4(z - 0) = 0 \Rightarrow a: 3x - 2y - 4z - 3 = 0$

b) Estudia la posición relativa de r y π según los valores de λ .

Resolución

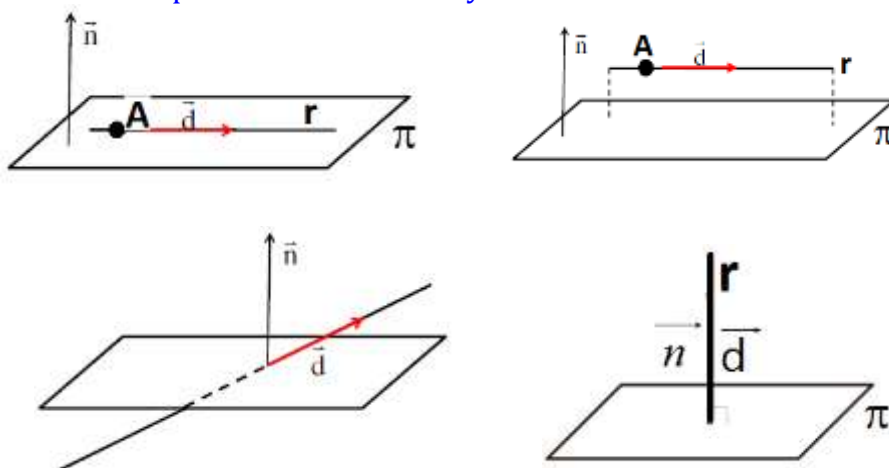
Los vectores $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (0, 0, \lambda) - (1, 0, 0) = (-1, 0, \lambda)$ son vectores directores del plano π que buscamos. Luego, un vector normal de π es

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda, \lambda, 1)$$

Como π pasa por $A(1, 0, 0)$, entonces $\pi: \lambda(x - 1) + \lambda(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \Rightarrow \pi: \lambda x + \lambda y + z - \lambda = 0$

Un vector director de r es $\vec{d} = (2, 1, 1)$; $\vec{d} \cdot \vec{n} = (2, 1, 1) \cdot (\lambda, \lambda, 1) = 2\lambda + \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1}{3}$

Las posibilidades en cuanto a la posición relativa de r y π son:



- Si $\lambda \neq \frac{-1}{3}$, entonces $\vec{d} \cdot \vec{n} \neq 0$ y, por tanto, r y π son secantes.

Obsérvese que r y π no pueden ser perpendiculares porque $\vec{d} \nparallel \vec{n}$ ya que si los vectores fuesen paralelos $\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{1} = \frac{1}{1}$ y sería $1 = \lambda = 2$ (absurdo)

- Si $\lambda = \frac{-1}{3}$, entonces $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow r \subset \pi$ ó $r \parallel \pi$

En este caso, $\pi: \frac{-1}{3}x + \frac{-1}{3}y + z + \frac{1}{3} = 0 \xrightarrow{\cdot(-3)} x + y - 3z - 1 = 0$

$B(-3, 0, -3) \in r$ pero $B \notin \pi$ porque no cumple su ecuación: $-3 + 0 - 3(-3) - 1 = 5 \neq 0$. Por tanto, $r \parallel \pi$

7.- Considera el punto $P(-1, 0, 1)$, el vector $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y el plano π de ecuación $y = 0$.

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por P , está contenida en π y cuyo vector director es perpendicular a $\vec{u}$.

Resolución

Como r está contenida en el plano π , el vector normal del plano, $\vec{n} = (0, 1, 0)$ y perpendicular a r .

Y como también $\vec{u} = (1, 2, 1)$ es perpendicular a r , un vector director de r es

$$\vec{d} = \vec{n} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, -1)$$

Como además r pasa por $P(-1, 0, 1)$, unas ecuaciones paramétricas de r son $r: \begin{cases} x = -1 + k \\ y = 0 \\ z = 1 - k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{R}$

b) Determina la ecuación del plano que pasa por P , es perpendicular a π y del que $\vec{u}$ es un vector director.

Resolución

Como el plano α que se pide es perpendicular a π y $\vec{u} = (1, 2, 1)$ es un vector director de α , los vectores $\vec{n} = (0, 1, 0)$ y $\vec{u} = (1, 2, 1)$ son vectores directores de α

Luego, un vector normal de α es $\vec{n}_\alpha = \vec{n} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, -1)$

Como α pasa por $P(-1, 0, 1)$, entonces $\alpha: 1(x + 1) + 0(y - 0) - 1(z - 1) = 0$, de donde $\alpha: x - z + 2 = 0$

8.- Considera los vectores $\vec{u} = (2, 3, 4)$, $\vec{v} = (-1, -1, -1)$ y $\vec{w} = (-1, \lambda, -5)$, siendo λ un número real.

a) Halla los valores de λ para los que el paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tiene volumen 6 u^3 .

Resolución

$$6 = V_{\text{paralelepípedo}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= |10 + 3 - 4\lambda - 4 - 15 + 2\lambda| = |-2\lambda - 6|. \text{ Luego, } -2\lambda - 6 = 6 \Rightarrow \lambda = -6 \text{ ó } -2\lambda - 6 = -6 \Rightarrow \lambda = 0$$

Conclusión: $\lambda = -6$ ó $\lambda = 0$

b) Determina el valor de λ para el que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

Resolución

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ son linealmente dependientes} \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow -2\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3$$

9.- Sea r la recta que pasa por $A(4, 3, 6)$ y $B(-2, 0, 0)$ y sea s la recta dada por $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$

a) Determina la posición relativa de r y s .

Resolución

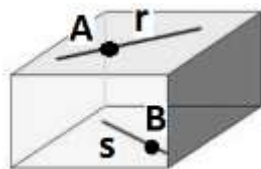
- La recta r tiene de vector director $\vec{d}_r = \vec{AB} = (-6, -3, -6) // (2, 1, 2)$ y $B(-2, 0, 0) \in r$

- La recta s tiene de vector director $\vec{d}_s = (1, 1, -2)$ y s pasa por el punto $P(2, 0, 1)$.

El vector $\vec{BP} = (4, 0, 1)$

$$\text{Como } \det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{BP}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 8 - 8 - 1 = -15 \neq 0, \text{ los vectores } \vec{d}_r, \vec{d}_s \text{ y } \vec{AB} \text{ son}$$

linealmente independientes. Luego, r y s se cruzan



b) Calcula, si existen, los puntos C de s tales que los vectores $\vec{CA}$ y $\vec{CB}$ son ortogonales.

Resolución

$A(4, 3, 6)$ y $B(-2, 0, 0)$ y los puntos de s son de la forma $C(2 + k, k, 1 - 2k)$, con $k \in \mathbb{R}$

$$\vec{CA} = (2 - k, 3 - k, 5 + 2k) \text{ y } \vec{CB} = (-4 - k, -k, -1 + 2k)$$

Como tienen que ser ortogonales, debe ser $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0$

$$\text{Luego, } (2 - k)(-4 - k) + (3 - k)(-k) + (5 + 2k)(-1 + 2k) = 0$$

$$-8 - 2k + 4k + k^2 - 3k + k^2 - 5 + 10k - 2k + 4k^2 = 0; 6k^2 + 7k - 13 = 0; k = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 6 \cdot (-13)}}{2 \cdot 6} = \frac{-7 \pm 19}{12}$$

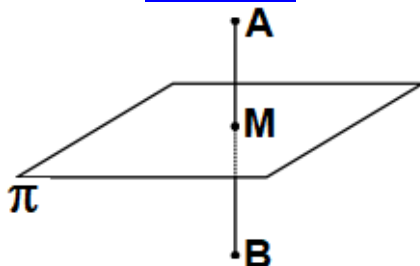
$$\text{Para } k = 1, C(2 + 1, 1, 1 - 2 \cdot 1) \Rightarrow C(3, 1, -1)$$

$$\text{Para } k = \frac{-13}{6}, C\left(2 + \frac{-13}{6}, \frac{-13}{6}, 1 - 2 \cdot \frac{-13}{6}\right) \Rightarrow C\left(\frac{-1}{6}, \frac{-13}{6}, \frac{32}{6}\right)$$

10.- Considera los puntos $A(-1, -2, -1)$ y $B(1, 0, 1)$.

a) Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

Resolución



El plano π que se pide pasa por M, punto medio de AB. El punto es $M\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{-2+0}{2}, \frac{-1+1}{2}\right)$; $M(0, -1, 0)$

Un vector normal $\vec{n}$ del plano es el vector $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 2) // (1, 1, 1)$

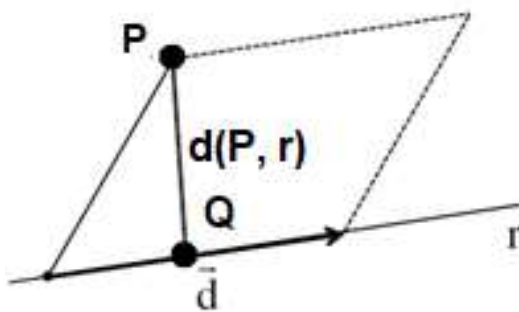
Y como π pasa por $M(0, -1, 0)$, $\pi: 1(x - 0) + 1(y + 1) + 1(z - 0) = 0$, de donde $\pi: x + y + z + 1 = 0$

b) Calcula la distancia de $P(-1, 0, 1)$ a la recta que pasa por los puntos A y B.

Resolución

Un vector director de r es $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $B(1, 0, 1) \in r$, $r: \begin{cases} x = 1 + k \\ y = k \\ z = 1 + k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{R}$

$P(-1, 0, 1) \notin r$ porque no cumple sus ecuaciones, $r: \begin{cases} -1 = 1 + k \\ 0 = k \\ 1 = 1 + k \end{cases}$. Como $k = 0$, se tendría $-1 = 1$ (absurdo)



Halleemos el punto Q de r de forma que $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{d}$. Una vez calculado, $d(P, r) = d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$.

Un punto Q de r es de la forma $Q(1 + k, k, 1 + k)$; $\overrightarrow{PQ} = (2 + k, k, k)$ Como $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{d} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{d} = 0$

Luego, $(2 + k) \cdot 1 + k \cdot 1 + k \cdot 1 = 0$; $3k + 2 = 0$; $k = -\frac{2}{3}$.

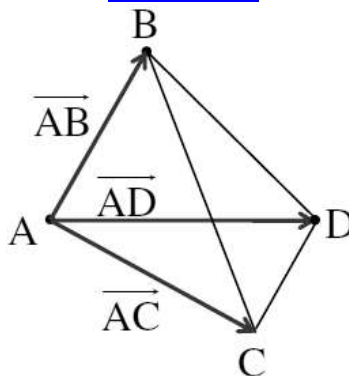
Por tanto, $\overrightarrow{PQ} = (2 + \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}) = (\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3})$

$d(P, r) = |\overrightarrow{PQ}| = \left| \left(\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3} \right) \right| = \frac{2}{3} |(2, -1, -1)| = \frac{2}{3} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3} u$

11.- Considera los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(0, -2, 2)$, $C(-1, 0, 2)$ y $D(2, -1, -2)$.

a) Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

Resolución



$$\overrightarrow{AB} = (-1, -3, 1) ; \quad \overrightarrow{AC} = (-2, -1, 1) ; \quad \overrightarrow{AD} = (1, -2, -3)$$

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} V_{\text{paralelepípedo}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{6} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \right|$$

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} \left| -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} |-(3 + 3 - 4 - 1 - 18 + 2)| = \frac{1}{6} 15 = \frac{5}{2} u^3$$

b) Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C.

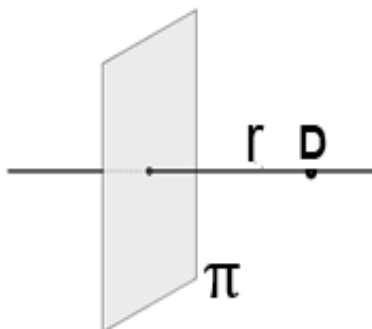
Resolución

El plano π que pasa por $A(1, 1, 1)$, $B(0, -2, 2)$ y $C(-1, 0, 2)$ tiene como vectores directores

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -3, 1) // (1, 3, -1) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (-2, -1, 1) // (2, 1, -1)$$

$$\text{Un vector normal de } \pi \text{ es } \overrightarrow{n} = (1, 3, -1) \times (2, 1, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, -1, -5) // (2, 1, 5)$$

Como pasa por $A(1, 1, 1)$, $\pi: 2(x - 1) + 1(y - 1) + 5(z - 1) = 0$. De donde, $\pi: 2x + y + 5z - 8 = 0$



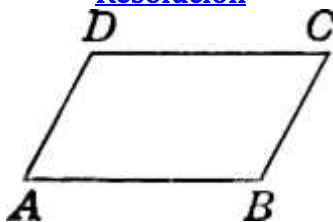
Un vector director de la recta es un vector normal del plano $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{n} = (2, 1, 5)$

Y como la recta r pasa por el $D(2, -1, -2)$, $r: \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = -1 + k \\ z = -2 + 5k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{R}$

12.- (prueba extraordinaria) Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$ y $C(1, 3, 3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD.

a) Calcula el área del paralelogramo.

Resolución



Sea $D(x, y, z)$ el cuarto vértice. Entonces, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (1, 1, 1) = (1 - x, 3 - y, 3 - z)$

Luego, $1 = 1 - x$; $x = 0$; $1 = 3 - y$; $y = 2$; $1 = 3 - z$; $z = 2$. Por tanto, $D(0, 2, 2)$

$\overrightarrow{AD} = (-1, 1, 1)$. Sabemos que $A(\text{paralelogramo}) = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, 2)$$

$$A(\text{paralelogramo}) = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ u}^2$$

b) Halla la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.

Resolución

El plano π que se pide pasa por $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$ y $C(1, 3, 3)$.

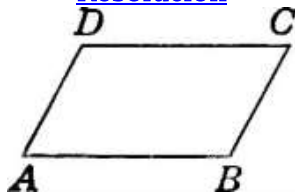
Luego, tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 2) \parallel (0, 1, 1)$

Un vector normal de π es $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, 1, 1) \times (0, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1)$

Como pasa por $A(1, 1, 1)$, $\pi: 0(x - 1) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0$. De donde $\pi: -y + z = 0$

c) Calcula las coordenadas del vértice D.

Resolución



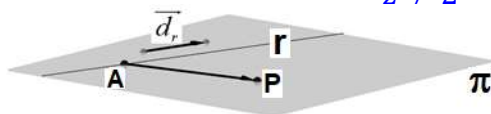
Sea $D(x, y, z)$ el cuarto vértice. Entonces, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (1, 1, 1) = (1 - x, 3 - y, 3 - z)$

Luego, $1 = 1 - x$; $x = 0$; $1 = 3 - y$; $y = 2$; $1 = 3 - z$; $z = 2$. Por tanto, $D(0, 2, 2)$

- 13.- (prueba extraordinaria) Considera el punto $P(0, 1, 1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ z = 2 \end{cases}$
 a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r .

Resolución

Observamos que $P \notin r$ porque no cumple sus ecuaciones, $\begin{cases} 0 - 2 \cdot 1 \neq -5 \\ z \neq 2 \end{cases}$



Por otra parte, la recta r está dada como intersección de dos planos.

Luego, su vector director se puede obtener como el producto vectorial de los vectores normales de los

planos: $\overrightarrow{d_r} = (1, -2, 0) \times (0, 0, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -1, 0) // (2, 1, 0)$

Hallemos un punto de r . Para $y = 0$, $x = -5$; $z = 2$. Luego, $A(-5, 0, 2) \in r$

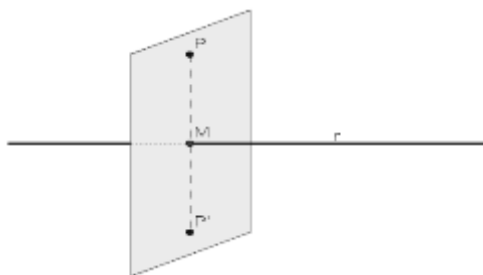
El plano π que nos piden pasa por $P(0, 1, 1)$ y tiene vectores directores $\overrightarrow{d_r} = (2, 1, 0)$ y $\overrightarrow{AP} = (5, 1, -1)$

Un vector normal de π es $\overrightarrow{n_\pi} = (2, 1, 0) \times (5, 1, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 2, -3) // (1, -2, 3)$

$\pi: 1(x - 0) - 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0$. De donde $\pi: x - 2y + 3z - 1 = 0$

- b) Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r .

Resolución



El punto simétrico de P respecto de la recta r sería el punto $P'(a, b, c)$ del dibujo. Vamos a hallarlo:

- Hallamos el plano α que pasa por P y es ortogonal a la recta r :

Un vector normal $\overrightarrow{n}$ del plano es el vector director de r : $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{d_r} = (2, 1, 0)$

Y como α pasa por $P(0, 1, 1)$, $\alpha: 2(x - 0) + 1(y - 1) + 0(z - 1) = 0$, de donde $\alpha: 2x + y - 1 = 0$

- Hallamos M , punto de corte de r y α , resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

La forma paramétrica de r es $r: \begin{cases} x = -5 + 2k \\ y = k \\ z = 2 \end{cases}$, con $k \in \mathbb{R}$

Sustituyendo en la ecuación del plano se tiene $2(-5 + 2k) + k - 1 = 0 \rightarrow 5k - 11 = 0$; $k = \frac{11}{5}$

Luego, $\begin{cases} x = -5 + 2 \cdot \frac{11}{5} = \frac{-3}{5} \\ y = \frac{11}{5} \\ z = 2 \end{cases}$. El punto de corte es $M\left(\frac{-3}{5}, \frac{11}{5}, 2\right)$

- Por último, hallamos el simétrico $P'(a, b, c)$ de $P(-1, 0, 1)$ usando que M es el punto medio del segmento PP' :

$\begin{cases} \frac{a+0}{2} = \frac{-3}{5} \Rightarrow a = \frac{-6}{5} \\ \frac{b+1}{2} = \frac{11}{5}, 5b+5=22 \Rightarrow b = \frac{17}{5} \\ \frac{c+1}{2} = 2 \Rightarrow c = 3 \end{cases}$. El punto simétrico que se pide es $P'\left(\frac{-6}{5}, \frac{17}{5}, 3\right)$