

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Justifique las respuestas usando lenguaje matemático y/0 no matemático, según

corresponda. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se

obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni

programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.- Sean las matrices , y

(a) [3 puntos] Calcula la matriz M = ATA – BBT, donde AT y BT representan las matrices transpuestas

de A y B respectivamente.

**Resolución**

(b) [3 puntos] Justiﬁca si M es o no invertible. En caso aﬁrmativo, resuelve los sistemas de ecuaciones

 y para calcular la inversa de la matriz M.

Comprueba que la matriz para los valores de a, b, c y al calculados, es la matriz inversa de M.

**Resolución**

det M = –2 ≠ 0 ⇒ M es invertible.

. Resolviendo, c = 1 ,

. Resolviendo, d = –1 , b = 1

Observa que . Luego, la inversa de M es

(c) [4 puntos] Calcula la matriz X que cumple la igualdad XM + A = C

**Resolución**

Trasponiendo términos, XM = C – A. Multiplicando por M–1, por la derecha, XMM–1 = XI = X = (C – A)M–1

P2.- Sea I3 la matriz identidad de orden 3x3 y A la matriz

(a) [4 puntos] Calcula la matriz B = 3A – kI3, indicando su expresión en función del parámetro real k.

**Resolución**

(b) [4 puntos] Discute el rango de la matriz B según el parámetro k.

**Resolución**

Sabemos que ; det B = –k(3 – k)2 = 0 ⇔ k = 0 ó k = 3

– Si k ≠ 0, k ≠ 3, det B ≠ 0 y rg B = 3

– Si k = 0, det B = 0, . Como el menor , rg B = 2

– Si k = 3, det B = 0, . Luego, rg B = 1

(c) [2 puntos] ¿Para qué valores de k se puede calcular la inversa de B? Justiﬁca la respuesta

**Resolución** Sólo si k ≠ 0 y k ≠ 3 se puede calcular la inversa de B porque det B ≠ 0

P3.- Sean P = (–1, 1, 1), Q = (7, 1, 7) y R = (–4, 1, 5) puntos de R3.

(a) [3 puntos] Comprueba que los tres puntos forman un triángulo rectángulo. Indica cuál de los tres

ángulos es recto.

**Resolución**

 ; ; . Luego, y, por tanto, PQR es un triángulo rectángulo en P



(b) [3 puntos] ¿Se podría construir un cuadrado añadiendo un solo vértice más? Justiﬁca la respuesta.

**Resolución**

Como , PQR no es un triángulo rectángulo isósceles y, por tanto, no se pude construir un cuadrado añadiendo un vértice más

(c) [4 puntos] Prueba que, para todo valor de a real, el punto S = (a, 1, 0) es coplanario con P, Q y R.

**Resolución**

Como , entonces S es coplanario con P, Q y R para todo a ∈ R

P4.- Sean las rectas y . Calcula:

(a) [5 puntos] La posición relativa de las dos rectas. Es decir, si son coincidentes, paralelas, se cortan, o se

cruzan. En los últimos dos casos especifica si lo hacen perpendicularmente.

**Resolución**

r está dada como intersección de dos planos. Luego, su vector director se puede obtener como el

producto vectorial de los vectores normales de los planos:

 ; Para y = 0, . Luego, A(–1, 0, 1) ∈ r

s tiene vector director y pasa por el punto B(–1, 1, 0).

Como , los vectores

son linealmente independientes. Luego, r y s se cruzan

Al ser , y, por tanto, r y s se cruzan perpendicularmente

(b) [5 puntos] La ecuación del plano que es paralelo a las dos rectas r y s, y pasa por el

punto A = (2, 2, 1).

**Resolución**

Al ser el plano π que se pide paralelo a r y s, los vectores y son vectores directores de π

Luego, un vector normal de π es

Y como π pasa por (2, 2, 1), entonces π: 1(x ‒ 2) + 2(y – 2) – 5(z – 1) = 0 ⇒ π: x +2y – 5z – 1 = 0

P5.- Resuelve los siguientes apartados:

(a) [5 puntos] Dada la función , determina los valores de a y b sabiendo que f(x) tiene

su máximo en x = 100 y que pasa por el punto (49, 91).

**Resolución**

 . Según el enunciado,

Sustituyendo,

Conclusión: a = –1, b = 20 y ,

(b) [5 puntos] Dada la función indica cuál es su dominio. ¿Es g(x) una función continua

en su dominio? Justiﬁca la respuesta y, en caso negativo, indica qué tipo de discontinuidad presenta.

**Resolución**

Para que se pueda calcular g(x) debe ser x ≥ 0 y x ≠ ±1. Luego, Dom g = [0, +∞) – {1}

En su dominio sí que es continua. Donde no es continua es en x = 1 por no estar definida

Además, como , la discontinuidad es evitable

P6.- [10 puntos] Calcula el área de la superficie comprendida entre las curvas

f(x) = 6x – x2, g(x) = x2 – 2x y sus puntos de corte.

**Resolución**

 ⇒ ⇒ ⇒ ; x = 0 ; x = 4

Área que piden:

Una primitiva de la función del integrando es . Por la regla de Barrow,

P7.- El 38% de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que

el 21% prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al

azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula. la probabilidad de los siguientes sucesos:

(a) [3 puntos] Que las dos personas sean aficionadas a la natación.

(b) [3 puntos] Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.

(c) [4 puntos] Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

**Resolución**

A = ser aficionado a la natación B = ser aficionado al ciclismo. C = ser aficionado a otros deportes

a) Piden =

b) Piden + =

c) Si 21% prefieren ciclismo, 100% – 21% = 79% no lo prefieren, o sea 79 de cada 100.

Se pide

P8.- El peso, en gramos, de las judías en lata se distribuye normalmente con media, μ y desviación

típica 7,8. Teniendo en cuenta que el 10% de estas latas contienen menos de 200 g, calcula:

(a) [6 puntos] El valor de la media μ redondeándola a las unidades.

**Resolución**

X = peso ⇒

 ⇒

Usando la tabla de las N(0, 1) por interpolación, .

Despejando, la media es μ = 200 + 1,285.7,8 = 210,023 ≅ 210

(b) [2 puntos] El porcentaje de latas que contienen más de 225 g de judías. Nota: utiliza la media

redondeada a las unidades.

**Resolución**

Sabemos que X = peso ⇒

Como

el porcentaje es del 2,74%

(c) [2 puntos] El porcentaje de latas que contienen entre 190 g y 225 g de judías, Nota: utiliza la media

redondeada a las unidades.

**Resolución**

Sabemos que X = peso ⇒

Como

 , el porcentaje es del 96,74%