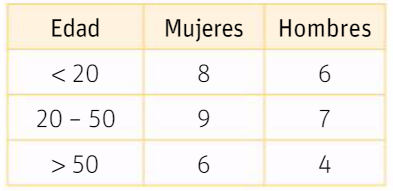
**CONCEPTO DE MATRIZ**

Introducción

Muchas veces se dispone de una serie de datos y queremos organizarlos para que su manipulación resulte sencilla. Una forma de hacerlo es en una tabla.

Veamos algunos ejemplos:

1) La distribución por sexo y edad de un grupo de personas viene dada por la tabla



De forma abreviada esta tabla la podemos escribir así:

2) Una cadena de tiendas de electrodomésticos dispone de cuatro almacenes. Al terminar la temporada de verano las existencias de lavadoras, frigoríficos y televisores son las siguientes:

A: 12 lavadoras, 8 frigoríficos y 5 televisores B: 20 lavadoras, 18 frigoríficos y 9 televisores

C: 2 lavadoras, 3 frigoríficos y 15 televisores D: 7 lavadoras, 6 frigoríficos y 1 televisor

Organizando los datos en una tabla:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Lavadoras | Frigoríficos | Televisores |
| A | 12 | 8 | 5 |
| B | 20 | 18 | 9 |
| C | 2 | 3 | 15 |
| D | 7 | 6 | 1 |

De forma abreviada esta tabla la podemos escribir así:

Este conjunto de números dispuestos en filas y columnas es lo que se llama **una matriz**.

En este tema vamos a estudiar estos nuevos objetos matemáticos, las matrices. Estudiaremos sus aplicaciones en el mundo real, los tipos de matrices, las operaciones con matrices y sus propiedades, el determinante de una matriz y sus propiedades, la matriz inversa, resolveremos ecuaciones donde la incógnita sea una matriz y veremos cómo las matrices nos ayudan a resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Definición de matriz

Una matriz A es un conjunto de números o expresiones dispuestos en filas y en columnas.

Por ejemplo, es una matriz de 2 filas y 3 columnas. Diremos que el orden o dimensión de A es 2 x 3. Para indicar esto podemos escribir .

Los elementos de una matriz 2 x 3 los podemos representar de forma genérica así:

donde el primer subíndice indica la fila en la que está y el segundo subíndice la columna.

Por ejemplo, es el elemento que está en la fila 2, columna 3.

En general, una matriz A de m filas y n columnas, Am x n, es un conjunto de números o expresiones dispuestos en m filas y n columnas. Su orden o dimensión es m x n y tiene mn elementos

Se puede expresar así:

En , el primer subíndice, i, indica la fila en la que está el elemento y el segundo, j, indica la columna.

Por ejemplo, es el elemento que está en la fila 2 y en la columna 1

**Actividades resueltas**

1. **Escribe la matriz A de orden 2 x 4 en la que**
2. **Resolución**

;

; ;

1. ; ;

Luego,

**Tres personas A, B y C, quieren comprar las siguientes cantidades de fruta:**

**A: 2 kg de peras, 1 kg de manzanas y 6 kg de naranjas.**

**B: 2 kg de peras, 2 kg de manzanas y 4 kg de naranjas.**

**C: 1 kg de peras, 2 kg de manzanas y 3 kg de naranjas.**

**Expresa matricialmente la cantidad de fruta (peras, manzanas y naranjas) que quiere comprar cada persona (A, B, C)**

**Resolución**

Matrices iguales: Dos matrices A y B son iguales si tienen el mismo orden y cada elemento de A coincide con su respectivo elemento de B.

1. **Actividad resuelta**
2. Calcula x, y, z para que las matrices y sean iguales.
3. **Resolución**

Si A = B, igualando los elementos correspondientes,

Sustituyendo x = 5, . Sumando, 2z = 8, z = 4

Luego, y + 4 = 1, y = –3. Resumiendo, x = 5, y = –3, z = 4

Tipos de matrices

Matriz nula o matriz cero: Es aquella en la que todos sus elementos son cero.

Por ejemplo, la matriz es la matriz nula de orden 3 x 2

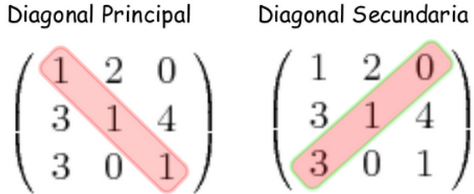
Matriz fila: Es la que tiene una sola fila. Por ejemplo, la matriz es una matriz fila de orden 5. Las matrices fila también se suelen llamar vectores fila.

Matriz columna: Es la que tiene una sola columna. Por ejemplo, es una matriz columna de orden 3. Las matrices columna también se suelen llamar vectores columna.

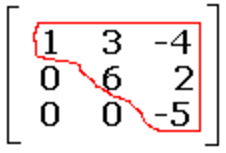
Matriz cuadrada: Es la que tiene el mismo número de filas que de columnas.

## Por ejemplo, es una matriz cuadrada de orden 3.

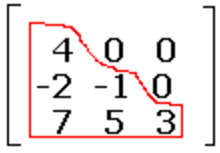
Todas las matrices cuadradas tienen una diagonal principal y otra secundaria:



## Matriz triangular: Una matriz cuadrada A es una matriz triangular superior, si los elementos por debajo la diagonal principal son cero.

Por ejemplo, A =  es una matriz triangular superior de orden 3

Una matriz cuadrada A es una matriz triangular inferior, si los elementos por encima de la diagonal principal son cero.

Por ejemplo, A = es una matriz triangular inferior de orden 3

Una matriz cuadrada A es una matriz triangular, si es triangular superior o triangular inferior.

Matriz escalar**:** Es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales

Por ejemplo, es la matriz escalar

Matriz diagonal: Es una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos de fuera de la diagonal principal. Por ejemplo, A =  es una matriz diagonal de orden 3

Matriz identidad: Es la matriz diagonal con unos en la diagonal principal.

Por ejemplo, e son las matrices identidad de orden 2 y 3, respectivamente

En general, la matriz identidad de orden n se representa por In o simplemente por I.

Traspuesta de una matriz: La traspuesta de una matriz A es la que se obtiene escribiendo las filas de A por columnas. Se representa por At.

Por ejemplo, la traspuesta de es

Observa que al ser resulta que . En general, si entonces

Puedes comprobar que, en general, siempre se cumple:

- Si A es de orden m x n entonces At es de orden n x m.

- La traspuesta de la traspuesta de una matriz es la propia matriz: (At)t = A

- La traspuesta de una matriz fila es una matriz columna y viceversa

Matriz simétrica: Una matriz cuadrada A es simétrica si es igual que su traspuesta, es decir si At = A

Por ejemplo, la matriz es simétrica, porque

Puedes observar que en las matrices simétricas los elementos que hay por encima y por debajo de la diagonal principal son simétricos. También, todas las matrices diagonales son simétricas

Matriz antisimétrica: Una matriz cuadrada A es antisimétrica si es igual que su traspuesta,

es decir, si At = A

Ejemplo: es antisimétrica, pues . Observa que los

elementos simétricos son opuestos entre sí. Las matrices antisimétricas cumplen que aji = –aij.

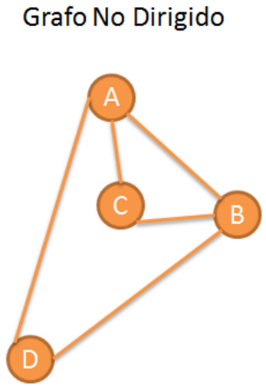
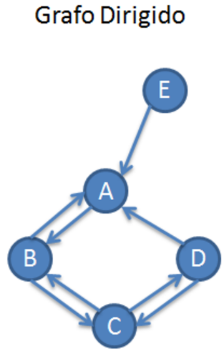
Matriz normal: Una matriz es normal si conmuta con su traspuesta, esto es, si AAt = AtA.

Obviamente, si A es simétrica, antisimétrica u ortogonal, es necesariamente normal.

Grafos

Un grafo es un esquema formado por una serie de puntos, llamados nodos o vértices, unidos por segmentos o arcos, llamados aristas, que sirve para representar las relaciones existentes entre los elementos de un conjunto.

Si las aristas son líneas sin orientación se llama grafo no dirigido. En otro caso, las aristas llevan punta de flecha y se llama grafo dirigido o digrafo

1.  

Cualquier grafo lleva asociada una matriz A, llamada matriz de adyacencia, que se obtiene poniendo el número de aristas que relacionan dos nodos.

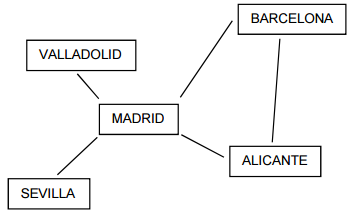
En el caso de los grafos no dirigidos la matriz de adyacencia es simétrica.

En los grafos dirigidos, la matriz A2 representa el número de caminos de dos aristas entre los nodos.

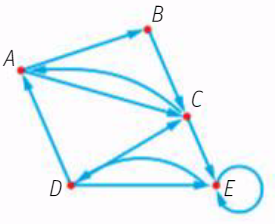
Es decir el número de conexiones con una escala.

1. De la misma forma A3 representa el número de conexiones con dos escalas

**Actividades resueltas**

**El siguiente grafo no dirigido indica si hay o no comunicación aérea directa entre las ciudades correspondientes  . Escribe la matriz de adyacencia asociada**

1. **Resolución**

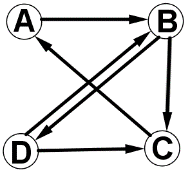
**Escribe la matriz de adyacencia del grafo **

1. **Resolución**

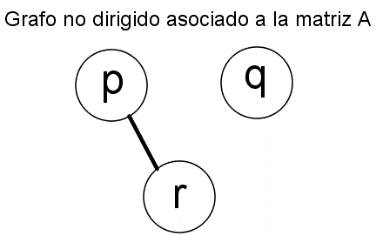
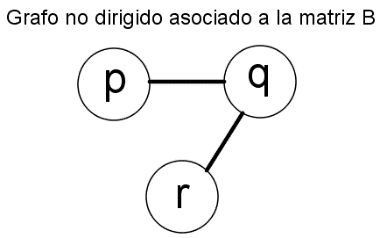
**La matriz de adyacencia que une los nodos A, B, C y D es**

**Dibuja el grafo dirigido asociado a dicha matriz.**

1. **Resolución**



**Dadas las siguientes matrices de adyacencia que unen los nodos p, q y r, dibuja los grafos no dirigidos que las representan: **

1. **Resolución**
2.  

Suma y resta de matrices

Para poder sumar o restar matrices, estas deben tener el mismo orden.

En tal caso, se suman o restan los elementos que ocupan el mismo lugar en las matrices.

*Ejemplos*:

Si , , entonces

En general, si , , entonces

Matrices opuestas: Son aquellas que tienen opuestos los elementos que ocupan el mismo lugar.

Por ejemplo, y son matrices opuestas

En general, y son matrices opuestas

**Actividad resuelta**

**Una firma de automóviles dispone de dos plantas de fabricación una en España y otra en Inglaterra, en los que fabrica dos modelos de coches M1 y M2, de tres colores x, y, z. Su capacidad de producción diaria en cada planta está dada por las siguientes matrices (A para España y B para Inglaterra).**

**, . Determina la matriz que expresa la producción total por día.**

**Resolución**

Habrá que sumar las producciones de las dos plantas. Luego, la matriz que se pide es

Propiedades más importantes de la suma y resta de matrices

1) *Conmutativa*: No importa el orden en que se sumen dos matrices: A + B = B + A

2) *Elemento neutro*: Si se suma la matriz nula queda la misma matriz: A + 0 = A

3) *Elemento opuesto*: Al sumar dos matrices opuestas nos da la matriz nula: A + (–A) = 0

4) *Asociativa*: Para sumar tres o más matrices no importa cómo se asocien: (A + B) + C = A + (B + C)

Producto de un número por una matriz

Para multiplicar un número (llamado escalar) por una matriz se multiplica el número por cada elemento de la matriz.

*Ejemplos*:

;

En general, si k es un escalar kA se obtiene multiplicando los elementos de A por k.

Puedes comprobar que kA = Ak. Por ejemplo, 3A = A3

Curiosidad: Para dividir una matriz A entre un número k podemos usar el hecho de que

Eso equivale a dividir cada elemento de la matriz por dicho número.

Por ejemplo,



**Actividad resuelta**

**Sean las matrices y . Calcula:**

**a) –2A + 5B** **Resolución**

**b)**  **Resolución**

Ecuaciones y sistemas con matrices

Veamos las reglas que podemos usar para obtener una ecuación equivalente (con las mismas soluciones) cuando tenemos una ecuación donde la incógnita es una matriz:

- Regla de la suma: En una ecuación matricial si sumamos o restamos la misma matriz en los dos miembros se obtiene una ecuación equivalente. Observa:

, restando A en los dos miembros queda

Razonando de forma análoga,

, sumando A en los dos miembros queda

Esto significa que en una ecuación matricial podemos trasponer los términos igual que se hacía en las ecuaciones no matriciales.

- Regla del producto: En una ecuación matricial si se multiplican o dividen los dos miembros por un mismo número no nulo se obtiene una ecuación equivalente. Por ejemplo,

, dividiendo entre 3 (multiplicando por ) en los dos miembros queda

Razonando de forma análoga,

, multiplicando por 5 en los dos miembros queda

En general, si k ≠ 0:

, dividiendo entre k (multiplicando por ) en los dos miembros queda

, multiplicando por k en los dos miembros queda

Esto significa que en una ecuación matricial si la incógnita X si está multiplicada por un número podemos despejarla igual que se hacía en las ecuaciones no matriciales.

Como consecuencia, en los sistemas de ecuaciones matriciales podemos usar entonces los métodos de sustitución, igualación y reducción igual que se hacía en los sistemas no matriciales.

**Actividad resuelta**

**Resuelve el sistema de ecuaciones matriciales siguiente:**

**Resolución**

Llamamos , . Queda

Restando las ecuaciones obtenemos 13A = 5D – C. Dividiendo entre 13, queda

Producto de una matriz fila por una matriz columna

Para multiplicar una matriz fila por una matriz columna deben tener el mismo número de elementos.

En tal caso, se multiplican elemento a elemento y luego se suman los resultados.

*Ejemplo*:

En general, la regla es

Producto de dos matrices

Dadas dos matrices A y B, para poder realizar el producto AB es imprescindible que el nº de columnas de A sea igual al nº de filas de B. En tal caso, se multiplican las filas de A por las columnas de B.

Veamos cómo se hace en un caso particular

**Actividad resuelta**

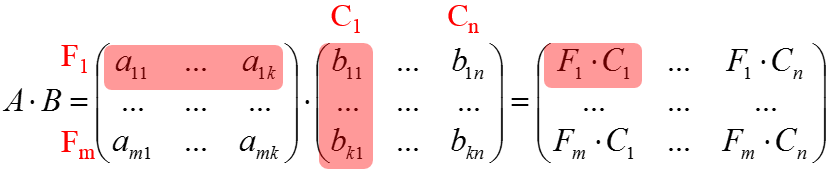
**Si . Realiza AB**

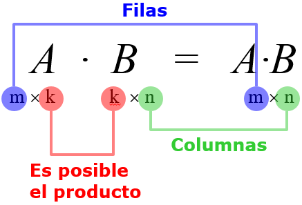
**Resolución**

Sean F1, F2 las filas de A y C1, C2, C3 las columnas de B.

Según la definición

Luego, .

La regla general es: 

Si A es de orden m x k , B de orden k x n entonces A.B es de orden m x n 

**Actividades resueltas**

**Sean las matrices , y . Analiza cuáles de las siguientes operaciones, sin efectuarlas, se pueden realizar y justifica las respuestas: BC + 2A, AC + C, BtC, CB – A**

**Resolución**

a) , . Luego, se puede realizar BC y .

No se puede realizar BC + 2A porque y no tienen el mismo orden

b) , . Luego, se puede realizar AC y .

Se puede realizar AC + C porque y tienen el mismo orden

c) , . Luego, no se puede realizar BtC porque el nº de columnas de Bt no

coincide con el de filas de C

d) , . Luego, se puede realizar CB y .

Se puede realizar CB + A porque y tienen el mismo orden

**Sean las matrices , y**

**Justifica cuales de las siguientes operaciones se pueden realizar B + 2CA, A – (BC)t y efectúalas cuando sea posible.**

**Resolución**

A2 x 2 , B2 x 1 , C1 x 2

B + 2CA NO: Se puede realizar 2CA porque el nº de columnas de C coincide con el nº de filas de A. Además, (2CA)1x2. No se puede realizar la suma B2x1 + (2CA)1x2 por no tener el mismo orden

A – (BC)t SÍ: Se puede realizar BC, y por tanto (BC)t, porque el nº de columnas de B coincide con el nº de filas de C. Además, como BC2x2 , entonces (BC)t2x2. Sí se puede realizar la resta A2x2 – (BC)t2x2 por tener el mismo orden

No conmutatividad del producto de matrices

No se puede cambiar el orden para multiplicar matrices. De hecho, aunque se puedan realizar tanto AB como BA no siempre dan el mismo resultado.

**Actividad resuelta**

**Sean las matrices y . Calcula los valores de a y b para que AB = BA.**

**Resolución**

Igualando los elementos correspondientes, . Conclusión: a = 1, b = 4

Otras propiedades del producto de matrices

- *Asociativa*: Para multiplicar tres o más matrices no importa cómo se asocien: (AB)C = A(BC)

- *Distributivas respecto de la suma y la resta*: Para multiplicar una matriz por una suma o resta de términos entre paréntesis, se multiplica la matriz por cada término

A(B + C) = AB + AC (B + C)A = BA + CA A(B – C) = AB – AC (B – C)A = BA – CA

- Si se multiplica por la matriz nula nos da la matriz nula: A . 0 = 0 . A = 0, siendo 0 la matriz cuadrada del mismo orden que A

- Si se multiplica una matriz por la matriz identidad, I, queda la misma matriz: A I = I A = A.

Se dice que la matriz identidad, I, es el elemento neutro del producto de matrices

- La traspuesta de un producto no es igual al producto de las traspuestas, sino que (AB)t = BtAt.

Problemas usando el producto de matrices

**Actividades resueltas**

**Los alumnos de 2º de Bachillerato organizan una venta de pasteles para el viaje de fin de curso. Venden pasteles grandes, que necesitan 2 huevos, 5 terrones de azúcar y 100 g de harina cada uno, y pasteles pequeños, que necesitan 1 huevo, 3 terrones de azúcar y 80 g de harina cada uno.**

**a) Presenta en una matriz M, de dimensión 3x2, las cantidades de los elementos necesarios para la**

**elaboración de un pastel grande y uno pequeño.**

**Resolución**

Representando por Hu, A, Ha a las cantidades huevos, azúcar y gramos de harina, respectivamente

y G, P al número de pasteles grandes y pequeños, respectivamente

**b) Si desean fabricar 20 pasteles de una clase y 30 de otra, escribe las dos matrices columna,**

**A (20 grandes y 30 pequeños) y B (30 grandes y 20 pequeños) que representan este reparto.**

**Resolución**

**c) Calcula los productos MA y MB e indica si con 8 docenas de huevos, 200 terrones de azúcar**

**y 5 kg de harina se pueden elaborar 20 pasteles grandes y 30 pequeños. ¿Y 30 grandes y 20 pequeños?**

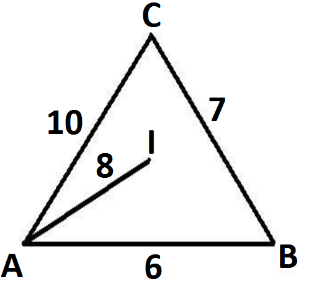
**Resolución**

Para hacer 20 pasteles grandes y 30 pequeños hacen falta 70 huevos, 190 terrones de azúcar y 4400 g de harina. Por tanto, con 8 docenas de huevos (96 huevos), 200 terrones de azúcar y 5 kg (5000 g) de harina

tenemos suficiente y nos sobran 26 huevos, 10 terrones de azúcar y 600 g de harina

Para hacer 30 pasteles grandes y 20 pequeños hacen falta 80 huevos, 210 terrones de azúcar y 4600 g de harina. Por tanto, con 8 docenas de huevos (96 huevos), 200 terrones de azúcar y 5 kg (5000 g) de harina NO tenemos suficiente. Aunque nos sobran 16 huevos y 400 g de harina, nos faltan 10 terrones de azúcar

**En un instituto I hay alumnos de tres pueblos, A, B y C. Una empresa de transporte escolar hace dos rutas: la ruta 1 parte de B y recorre sucesivamente C, A e I; la ruta 2 parte de C y recorre sucesivamente B, A e I.**

****

**a) Determina la matriz M, de orden 2 x 3, que expresa los km que recorren los alumnos de cada pueblo por cada ruta.**

**Resolución**

**b) El número de alumnos que siguen cada ruta de cada pueblo es:**

**Pueblo A: 10 alumnos la ruta 1 y 9 alumnos la ruta 2.**

**Pueblo B: 15 alumnos la ruta 1 y 8 alumnos la ruta 2.**

**Pueblo C: 5 alumnos la ruta 1 y 9 alumnos la ruta 2.**

**Determina la matriz N, de orden 3 x 2, que indique los alumnos que siguen cada ruta de cada pueblo.**

**Resolución**

**c) Si la empresa cobra 12 céntimos por km a cada persona, determina la matriz P = 0,12 MN**

**e interpreta cada uno de sus elementos.**

**Resolución**

Sólo tienen significado los elementos diagonales: por la ruta 1 se recauda 65,40 € y por la ruta 2, 44,76 €

Potencias de una matriz cuadrada

Dada una matriz cuadrada A, se pueden calcular las sucesivas potencias de A de la siguiente forma:

A2 = A A A3 = A2A A4 = A3A o también A4 = A2 A2 , etc, etc

Se puede comprobar que In = I 0n = 0 (kA)n = kn An, donde k ∈ R.

**Actividades resueltas**

**Si A es una matriz con tres filas y dos columnas, determina razonadamente la dimensión que deben tener las matrices B, C y D para que se puedan efectuar las siguientes operaciones: 2A – 3B ; AAt – C2  ; AD**

**Resolución**

A3 x 2 , Bm x n , Cp x q , Dr x s

2A3 x 2 – 3Bm x n se puede realizar si m = 3, n = 2.

A3 x 2 At2 x 3 ⇒ (AAt)3 x 3 ; Para poder hacer C2 = Cp x q Cp x q debe ser p = q y entonces (C2)p x p.

Para poder hacer la resta (AAt)3 x 3 – (C2)p x p debe ser p = 3. Luego, p = q = 3.

Para poder hacer A3 x 2 Dr x s debe ser r = 2.

Resumiendo, deben ser B3 x 2 , C3 x 3 , D2 x s

**Determina el valor de b para el que A2 – 2A + I = O, siendo**

1. **Resolución**

A2 – 2A + I = 0 ⇔

Operando,

Es decir, . Igualando los elementos correspondientes,

. Luego, b = 2

Como el producto de matrices no es conmutativo, no se pueden aplicar las fórmulas de las identidades notables.

;

Excepcionalmente si se verificarían las identidades notables para dos matrices A y B que

cumplan AB = BA

**Actividad resuelta**

**Sean A y B dos matrices que verifican y**

**Halla las matrices (A + B)(A – B) y A2 – B2.**

**Resolución**

Llamamos , . Queda

Sumando las ecuaciones obtenemos 2A = C + D. Dividiendo entre 2, queda

Restando las ecuaciones obtenemos 2B = C – D. Dividiendo entre 2, queda

Observa que (A + B)(A – B) ≠ A2 – B2 porque AB ≠ BA (lo puedes comprobar)

En algunos casos se puede calcular An en función de n, siempre que las sucesivas potencias de A sigan una cierta regularidad.

**Actividades resueltas**

**Se considera la matriz siendo a un número real cualquiera. Obtén la matriz A2014**

**Resolución**

; ; ….

En general, y en particular,

**Sea la matriz . Deduce cuánto vale An y calcula A2018 + A2019.**

**Resolución**

. Luego, A3 = A2.A = I . A = A ; A4 = A3.A = AA = A2 = I ; etc.

Luego, ⇒ A2018 + A2019 = I + A = A

**Considera las siguientes matrices y**

**Calcula A2, A3, A2021 y A2020.**

1. **Resolución**

; A3 = A2A = IA = A

A2020 = (A2)1010 = I1010 = I A2021 = A2020A = IA = A

En general, todas las potencias de A de exponente par dan I y las de exponente impar dan A

**ANEXO: MÁS ACTIVIDADES**

– Escribe una matriz en los casos:

a) nula de orden 3x2 b) cuadrada de orden 3 c) diagonal de orden 2 d) identidad de orden 4

e) fila de orden 2 f) columna de orden 4 g) simétrica de orden 2

– Comprueba que se cumplen las siguientes afirmaciones poniendo un ejemplo en cada caso:

a) La traspuesta de una matriz fila es una matriz columna

b) La traspuesta de una matriz triangular superior es una matriz triangular inferior

c) Si A es una matriz 2 x 4, entonces (At)t = A

d) Si A es una matriz de orden 2 x 3 entonces At es de orden 3 x 2

– Escribe la matriz 2 x 3 en la que aij = 5i – 4j

1. – Construye la matriz A de orden 3 x 2 cuyos elementos son
2. a11 = 4 a31 = 0 a22 = –3 a12 = 5 a32 = –7 y a21 = 1

– Escribe la matriz cuyos términos son: aij = (i – j – 1)3, i,j = 1, 2, 3.

– Escribe las matrices de orden 3 definidas como sigue y luego calcula sus respectivas trazas.

– Dadas las siguientes matrices de adyacencia que unen los nodos a, b y c, dibuja los grafos que representan: y

– Sean las matrices y

Si las matrices A y B son las matrices de adyacencia de dos grafos, de vértices a, b, c y 1, 2, 3, respectivamente, haz la representación gráfica de dichos grafos.

– Determina la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

La suma de matrices diagonales es una matriz diagonal

La suma de matrices simétricas es una matriz simétrica

La suma de matrices antisimétricas es una matriz antisimétrica

– Dadas las matrices , y , halla –B + (C – A)

– Demuestra que para cualquier matriz cuadrada A, se verifica que A + At es simétrica.

– Demuestra que toda matriz cuadrada A es la suma de una matriz simétrica S y otra matriz

antisimétrica T. Aplica este resultado a una matriz cualquiera 3 x 3.

– Resuelve las ecuaciones matriciales usando las reglas de equivalencia:

a) 2X – 3A = B b) (2A – B)t = 4X , siendo y

– Resuelve las ecuaciones: a) 2X – 4A = Bt b) ,

siendo y

– Sean las matrices y , resuelve la ecuación

matricial 2X – AB = (I + B)A

– Determine las matrices X e Y, sabiendo que

– Resuelve el sistema matricial formado por las

ecuaciones

– Resolver el sistema de ecuaciones , siendo ,

– Calcula las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema:

– Obtén las matrices A y B que verifiquen el sistema:

– Determina las matrices X e Y, sabiendo que

– Sean las matrices ,

Calcula las matrices X e Y para las que se verifica X + Y = A y 3X + Y = B

– Sean A y B las matrices ,

Calcula las matrices X e Y para las que 2X − Y = A y X − 3Y = B.

– Sean las matrices ,

Calcula las matrices X e Y si X + Y = 2A y X + B = 2Y

– Sean las matrices ,

Calcula las matrices X e Y para las que se verifica X + Y = A y 3X + Y = B

– Calcula X e Y tales que 5X + Y = 3At y X − Y = –B, siendo ,

– Dadas las matrices , . Calcula X e Y tales que X − Y = At y 2X − Y = B

– Sean A y B dos matrices que verifican y

– Si , y resuelve las ecuaciones y sistemas matriciales:

a) X + 2A = B – C b)

c) d)

– Sean A una matriz de dimensión 5 x 4, B de dimensión m x n y C de dimensión 3 x 7.

Se sabe que se puede obtener la matriz producto ABC.

a) ¿Cuál es la dimensión de B? b) ¿Y la del producto ABC?

– Si A es una matriz, ¿es posible siempre hacer el producto AAt? Razona la respuesta.

– Sea A una matriz de 3 filas y 4 columnas, y C una matriz de 2 filas y 3 columnas. ¿Qué dimensión tiene la matriz B sabiendo que existe el producto ABC?

– Dada una matriz A, ¿existe una matriz B, tal que el producto AB, o bien BA, sea una matriz de una sola fila? Pon un ejemplo con una matriz A ∈ M3 x 4.

– ¿Cómo tienen que ser dos matrices A y B para que su producto AB sea un número real?

– Demostrar que, si A es una matriz cuadrada de orden 3, entonces el producto AAt es una matriz simétrica.

– Demuestra que el producto de dos matrices ortogonales es otra matriz ortogonal

– Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. El producto de matrices diagonales es una matriz diagonal
2. El producto de dos matrices simétricas es una matriz simétrica
3. El producto de dos matrices antisimétricas es una matriz antisimétrica

– Si A y B son matrices simétricas de orden 2, determina la condición que debe cumplir la matriz AB para que sea también simétrica.

– Halla todas las matrices A ∈ M2 x 2 ortogonales.

– Si la matriz A es antisimétrica, ¿qué se puede decir de BtAB?

– Sean A una matriz de dimensión 5 x 4, B de dimensión m x n y C de dimensión 3 x 7.

Se sabe que se puede obtener la matriz producto ABC.

a) ¿Cuál es la dimensión de B? b) ¿Y la del producto ABC?

– Dadas las matrices y , razona, sin efectuarlas, cuáles de las siguientes operaciones tiene sentido realizarlas y en caso afirmativo indica el orden de la matriz resultante: M + Nt , MtN , MN.

– Sean las matrices ,

Determine en cada caso la dimensión de la matriz D para que se puedan realizar las siguientes operaciones: a) CD + A b) CtDC c) DCt d) CDCt

– Sean las matrices , y

Justifica cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y en dichos casos calcule el resultado:

AB , BA , BC y CtBt.

– Sean las matrices , y

Analiza cuáles de las siguientes operaciones con matrices se pueden realizar, indicando en los casos afirmativos las dimensiones de la matriz D: A + D = C , AD = Ct , DA = C , DA = Ct.

– Sean las matrices , y

Razona cuáles de las siguientes operaciones son posibles: ABt , B + 3C , CBt , AB + C

– Se consideran las matrices , y

Razona qué dimensiones deben tener las matrices P y Q para que los productos APBt y QAC den como resultado una matriz cuadrada.

– Sean A una matriz de dimensión 5 x 4, B de dimensión m x n y C de dimensión 3 x 7.

Se sabe que se puede obtener la matriz producto ABC.

a) ¿Cuál es la dimensión de B? b) ¿Y la del producto ABC?

– Sean las matrices , y

Justifica cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y en dichos casos calcule el resultado:

AB , BA , BC y CtBt.

producto

– Calcula el producto AB, siendo y

1. – Considera las matrices y . Calcula BM.

producto con parámetros

– Considera las matrices y . Determina x e y tal que AB = BA.

– Dadas las matrices y , calcula los valores de a y b para que se verifique la ecuación MA = A

– Considera la matriz .

Calcula, si existen, los números reales x e y que verifican

– Dadas las matrices y . Calcule los valores a y b para que AB = BA

– Se consideran las matrices y

Calcula el valor del parámetro a para que se verifique (BA)t = A Bt.

– Determina los valores de x e y que hacen cierta la igualdad

– Calcula las incógnitas para que

– Determina los valores de x e y que hacen cierta la siguiente igualdad

Sea

a) Calcula los valores de x e y para los que se verifica

b) Calcula, si existen, los valores de x e y para los que se verifica

– Encontrar todas las matrices que verifican la igualdad

– Halla una matriz B, sabiendo que su primera fila es (1, 0), y que verifica ,

siendo

– De una matriz A se sabe que su segunda fila es (–1 2) y su segunda columna es

Halle los restantes elementos de A sabiendo que

– Halla todas las matrices X que cumplan

– Dadas las matrices y explica si hay alguna matriz X, tal que AX = BX

– Halla todas las matrices X que satisfacen la ecuación

– Sea . Encuentra una matriz cuadrada triangular B tal que A = B⋅Bt. ¿Hay una sola?

– Siendo , hallar las matrices B ≠ (0)∈M2 x 2 tales que AB = (0) y obtener el valor de x para que exista solución.

– Resuelve la ecuación

– Halla todas las matrices que conmutan con

– Hallar una matriz que conmuta con la matriz

– Dada la matriz halla las matrices P que anticonmutan con M, es decir MP = – PM

– Si A y B son matrices simétricas probar que AB es simétrica si y sólo si A y B conmutan

– Demuestra que si A ∈ M2 x 2 conmuta con las 4 matrices de la base canónica, entonces, A conmuta también con toda matriz de M2 x 2.

– Sean las matrices y

a) Determina la dimensión que debe tener una matriz A para que se verifique la igualdad AB = 2Ct.

b) Halla la matriz A anterior, sabiendo que de ella se conocen los elementos a31 = 2 , a12 = –3 , a22 = 1

operaciones combinadas

– Considera , y

Determina la matriz C – 2BtAt.

– Dadas las matrices , y . Calcula (2A – Bt)tC

– Considera las matrices y . Calcula:

a) BtA b) A2 – BBt c) (AB – 3B)Bt  d) verificar que BtAB es simétrica

– Se consideran las matrices , , y

a) Estudia cuáles de los siguientes productos de matrices se pueden realizar, indicando las dimensiones de la matriz resultante: ABt , CtD , BtD , DBt.

b) Calcula la matriz A(Bt – 2DtC

– Dadas , y . Resuelve la ecuación: PM + 2X = QP

operaciones combinadas con parámetros

– Sean las matrices , y

a) Halla los valores de a y b para que se verifique A – B + ABt = C

b) ¿Existe algún valor de b para que el producto BBt sea igual a la matriz nula?

– Sean , , , y

Sabiendo que AB = Ct y calculando previamente el valor de y, z, determina la matriz X en términos de p tal que

– Considerando las matrices y , determina:

a) los valores de a, b y c de modo que

b) usando los valores de a, b, c calculados anteriormente, obtén la matriz X que satisface

– Dada la siguiente ecuación matricial , obtener de forma razonada los

valores de x, y, z

– En una empresa de fabricación de móviles hay 3 categorías de empleados: A, B y C y se fabrican dos tipos de móviles: M y P.

Diariamente cada empleado de la categoría A fabrica 4 móviles del tipo M y 3 del tipo P, mientras que cada uno de la categoría B fabrica 5 móviles del tipo M y 4 del tipo P, y cada uno de la categoría C

fabrica 6 móviles del tipo M y 5 móviles del tipo P.

Para fabricar cada móvil del tipo M se necesitan dos chips y 4 conexiones y para fabricar cada móvil del tipo P 4 chips y 6 conexiones.

a) Escribe una matriz X, 3x2, que describa el número de móviles de cada tipo y otra matriz Y, de

orden 2, que exprese el número de chips y conexiones de cada tipo de móvil.

b) Realiza el producto de matrices XY e indique qué expresa dicho producto.

– Un proveedor que suministra materia prima a 3 fábricas, F, G y H, transporta una parte de sus envíos a cada fábrica por carretera y la otra parte por tren, según se indica en la matriz T, cuyos elementos son las toneladas de materia prima que recibe cada fábrica por cada vía de transporte.

F G H

Los precios del transporte de cada tonelada de materia prima son 200 € por carretera y 180 €

por tren, como indica la matriz C = (200 180).

Explica qué operación debe efectuarse con estas matrices para determinar una nueva matriz cuyos elementos sean los costes de llevar este material a la fábrica.

– Una empresa constructora está fabricando e instalando puertas, ventanas y armarios en unos bloques de viviendas. Las viviendas pueden ser apartamentos o pisos.

Los apartamentos tienen 3 puertas, 3 ventanas y 1 armario. Los pisos constan de 5 puertas, 6 ventanas

y 2 armarios. Cada artículo necesita un tiempo de fabricación y un tiempo de instalación en las viviendas.

En la matriz H se reflejan esos tiempos en horas. Las filas corresponden a puertas, ventanas y armarios; las columnas a las horas de fabricación y a las de instalación, respectivamente.

Cada hora de fabricación le supone a la empresa un coste de 20 €, y cada hora de instalación, 15 €, como se refleja en la matriz C.

y

1. Representa los datos relativos a las cantidades de artículos por tipo de vivienda en una matriz A de dimensiones 2 x 3 en la que las filas correspondan a los tipos de vivienda y las columnas a los artículos, en el orden en que aparecen en el enunciado.
2. Indica, a partir de los datos de la matriz H, cuántas horas de fabricación se requieren para una ventana y cuántas horas son necesarias para instalar una puerta.
3. Calcula la matriz T = AH e interprete los resultados.
4. Utiliza el producto de matrices para hallar los costes que tiene la empresa por cada apartamento y por cada piso en los que realiza trabajos.

– Una persona tiene que comprar 2 kg de manzanas, 1 kg de ciruelas y 1,5 kg de plátanos y otra

necesita 0,5 kg de manzanas, 2,5 de ciruelas y 3 de plátanos. En la frutería A, los precios de las manzanas

son 1,8 euros/kg, los de las ciruelas 2,1 y los de los plátanos 1,9 y en la frutería B son 1,7 ; 2,3 y 1,75, respectivamente. Se escriben las matrices y

a) Determina MN e indique qué representa cada uno de los elementos de la matriz producto.

b) ¿En qué frutería le conviene a cada persona hacer la compra?

– Un fabricante de productos lácteos, que vende 3 tipos de productos, leche, queso y nata, a dos supermercados, S y H, ha anotado en la matriz A los pesos en kg de cada producto que vende a cada supermercado y , en la matriz B, las ganancias que obtiene en cada supermercado por cada kg de

esos productos

leche queso nata leche queso nata

Efectúa el producto ABt y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la

diagonal principal de la matriz resultante

– Un supermercado quiere ofertar tres clases de bandejas: A, B y C. La bandeja A contiene 40 g de queso manchego, 160 g de roquefort y 80 g de camembert; la bandeja B contiene 120 g de cada uno de los tres tipos de queso anteriores; y la bandeja C, contiene 150 g de queso manchego, 80 g de roquefort y 80 g de camembert.

Si se quiere sacar a la venta 50 bandejas del tipo A, 80 de B y 100 de C, obtén matricialmente la cantidad que necesitarán de cada una de las tres clases de quesos.

A B C

– Tres familias, A, B, y C, van a ir de vacaciones a una ciudad en la que hay tres hoteles, H1, H2 y H3.

La familia A necesita 2 habitaciones dobles y 1 sencilla; la B, 3 dobles y 1 sencilla y la C, 1 doble y 2 sencillas.

En el hotel H1 el precio de la habitación doble es 84 €/día y el de la habitación sencilla 45 €/día. En el hotel H2 la doble cuesta 86 €/día y la sencilla 43 €/día; En H3 85 €/día la doble y 44 €/día la sencilla

a) Escribe en forma de matriz el número de habitaciones (dobles o sencillas) que necesita cada una de las tres familias.

b) Expresa matricialmente el precio de cada tipo de habitación en cada uno de los tres hoteles.

c) Obtén, a partir de las dos matrices anteriores, una matriz en la que se refleje el gasto diario que tendría cada una de las tres familias en cada uno de los tres hoteles

– En una academia de idiomas se imparte inglés y alemán en cuatro niveles La matriz

expresa el número de personas por nivel, donde la primera columna corresponde a los cursos de inglés, la segunda a los de alemán y las filas a los niveles primero a cuarto respectivamente. Las columnas de la matriz reflejan el porcentaje de aprobados por nivel y las filas por idioma (inglés y alemán) y nivel. Calcula la matriz que exprese el número de aprobados por idioma y nivel.

– En un edificio hay tres tipos de viviendas: L1, L2 y L3. Las viviendas L1 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L2 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L3, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.

a) Escribe una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda

– Los precios, en euros, de las entradas a un parque matemático para Adultos (AD) y niños y Jubilados (NJ) en Temporada Alta(A), Temporada Media (M) y Temporada Baja(B) vienen dados por la matriz P.

El número de asistentes, en miles, a dicho parque a lo largo de un año viene dado por la matriz N.

A M B AD NJ

Se pide: Obtener, si es posible, las matrices R1 = PN y R2 = NP

¿A cuántos euros asciende la recaudación total correspondiente a Niños y Jubilados? ¿Y la de la Temporada Baja?

¿Qué elemento de R1 o de R2 nos proporciona información sobre la recaudación total correspondiente a los adultos?

¿A cuántos euros asciende la recaudación total?

– Las exportaciones, en millones de euros, de 3 países A, B, C a otros tres X, Y, Z, en los años 2000 y 2001 vienen dadas por las matrices:

Calcula y expresa en forma de matriz el total de exportaciones para el conjunto de los dos años.

¿Cuántos millones ha exportado el país B al Z en total? Calcula el incremento de las exportaciones del año 2000 al 2001 con los datos del ejemplo anterior.

– Los ingresos, en millones de euros, de cuatro heladerías durante los tres meses de verano vienen expresados mediante las matrices:

En los mismos meses, los gastos de esos establecimientos se contabilizan por las matrices:

Calcula mediante una matriz 1 x 4 el beneficio obtenido por cada heladería en el verano.

– Las cantidades compradas, en litros, de tres clases de vino, se reflejan en la matriz:

donde B = Blanco, T = Tinto y R = Rosado, y los precios pagados por cada litro en la matriz

Halla los productos LP y PL dando una interpretación de los resultados obtenidos.

– Una fábrica de alimentos produce dos tipos de turrones X e Y. Se elaboran de 3 calidades, Normal(N), Extra(E) y Suprema(S), al precio, en euros que muestra la matriz A:

X

Si cada día se producen las unidades que se indica en la matriz B.

a) Calcula los productos AB y BA.

b) ¿Qué información proporciona la diagonal principal de AB y de BA?

– Un almacén de ruedas, de vehículos de distinto tipo, tiene un stock de componentes de las mismas (en cientos de unidades) dado por la matriz A, donde C = Cubiertas, T = Tapacubos y L = Llantas:

C T L acero caucho

La cantidad de kilogramos de materia prima necesaria para cada componente (en media) viene dada por la matriz B.

a) Calcula los kilogramos de material almacenados por cada tipo de rueda.

b) Calcula el total de metal acumulado en el almacén

– En un colegio se imparten los cursos 1º, 2º y 3º de ciertas enseñanzas. Los profesores tienen asignado un nº de horas de clase(C), tutorías (T) y guardias (G) a cubrir, de acuerdo con la siguiente matriz:

C G T

El colegio paga cada hora de clase a 12 €, cada hora de guardia a 3 €, y cada hora de tutoría a 6 €, según la matriz

El colegio dispone de 5 profesores para el primer curso, 4 para el segundo y 6 para el tercero, representados por

Calcular los siguientes productos de matrices e interpretar los resultados: PM, MC, PMC

– Una empresa fabrica 3 tipos de artículos R, S y T. Los precios y de coste y los de venta por unidad y el número de unidades vendidas de cada artículo quedan reflejadas en esta tabla:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | precio de coste | precio de venta | unidades vendidas anualmente |
| R | 6 | 18 | 2240 |
| S | 9,2 | 28 | 1625 |
| T | 14,3 | 40 | 842 |

Sabemos que las matrices de costes e ingresos, C e I, son diagonales y que la matriz de venta , V, es una matriz fila.

a) Determina las matrices C, I y V. b) Obtén, a partir de los anteriores, la matriz de ingresos anuales, A, correspondiente a los tres artículos, la matriz de gastos anuales, G, y la de beneficios anuales, B.

– En la sala de un hospital dedicado al tratamiento de diabéticos se administra insulina de tres clases: semilenta, lenta y ultralenta. El número de unidades diarias que se aplica a los pacientes de los cinco ingresados viene dado por la siguiente tabla:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Pac. 1 | Pac. 2 | Pac. 3 | Pac. 4 | Pac. 5 |
| Semilen­ta | 15 | 15 | 20 | 30 | 10 |
| Lenta | 20 | 20 | 15 | 5 | 20 |
| Ultralen­ta | 10 | 5 | 10 | 10 | 15 |

El número de días que ha estado internado cada paciente es:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Pac. 1 | Pac. 2 | Pac. 3 | Pac. 4 | Pac. 5 |
| Nº de días | 3 | 7 | 5 | 12 | 20 |

Calcula, con ayuda del producto de matrices, las unidades de cada clase que les fue administrada a los pacientes.

– En un hospital oncológico se aplica a un grupo de cuatro pacientes un tratamiento de quimioterapia mediante un protocolo CMF (C = ciclofosfamida, M = metrotexate, F = 5-fluoracilo). Las cantidades diarias que necesita cada paciente de cada uno de los compuestos varían según la superficie total corporal, del siguiente modo:

Paciente 1: 1200 mg de C, 80 mg de M y 1200 mg de F.

Paciente 2: 900 mg de C, 60 mg de M y 950 mg de F.

Paciente 3: 1100 mg de C, 70 mg de M y 1000 mg de F.

Paciente 4: 1150 mg de C, 80 mg de M y 1100 mg de F.

Teniendo en cuenta que el tratamiento se va a aplicar durante tres semanas a los pacientes 1, 3 y 4 y dos semanas al paciente 2, hallar la matriz de necesidades diarias y las cantidades de cada compuesto necesarias para poder atender correctamente los tratamientos de los cuatro pacientes.

– En el pueblo en el que vivo hay dos fruterías F1 y F2.

En F1 las peras cuestan 1,5 €/kg, las manzanas 1 €/kg y las naranjas 2 €/kg

En F2 las peras cuestan 1,8 €/kg, las manzanas 0,8 €/kg y las naranjas 2 €/kg

a) Expresa matricialmente la cantidad de fruta (peras, manzanas y naranjas) que quiere comprar cada persona (A, B, C).

b) Escribe una matriz con los precios de cada tipo de fruta en cada una de las dos fruterías.

c) Obtén una matriz, a partir de las dos anteriores, en la que quede reflejado lo que se gastaría cada persona haciendo su compra en cada una de las dos fruterías.

– En una pastelería elaboran tres tipos de postres: A, B y C, utilizando leche, huevos y azúcar (entre otros ingredientes) en las cantidades que se indican:

A: 3/4 de litro de leche, 100 g de azúcar y 4 huevos.

B: 3/4 de litro de leche, 112 g de azúcar y 7 huevos.

C: 1 litro de leche y 200 g de azúcar.

El precio al que se compran cada uno de los tres ingredientes es de 0,6 euros el litro de leche, 1 euro el kg de azúcar, y 1,2 euros la docena de huevos.

Obtén matricialmente el gasto que supone cada uno de estos tres postres (teniendo en cuenta solamente los tres ingredientes indicados).

– Es posible usar la multiplicación de matrices para codificar y decodificar mensajes secretos.

Primero, las letras del alfabeto se convierten en números; a = 1, b = 2, ... , z = 27. Entonces los números se convierten en las entradas de una matriz cuadrada M. Para completar el código, M se multiplica por alguna matriz K “clave” no singular que tenga el mismo orden que M.

Por ejemplo, HELP → 8 5 12 17 →

Si entonces

La matriz C contiene el mensaje “HELP” codificado.

a) ¿Cómo puede decodificarse C para obtener la matriz M?

b) Si y decodifique C y determine el mensaje.

– Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿son ciertas las propiedades siguientes, que son ciertas para las operaciones con números reales?:

a) (A + B)2 = A2 + B2 + 2 AB b) (A – B)2 = A2 + B2 – 2AB c) (A + B)(A – B) = A2 – B2

– Sean las matrices , , y

Razona si se pueden efectuar las siguientes operaciones AD + BC , DtB – A2 y, en caso afirmativo, realízalas

– Sean las matrices y

Justifica cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse y, en tal caso, calcula el resultado:

A2 , A – B , AB , ABt.