PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

– El examen consta de 3 tareas obligatorias (1 por cada apartado). En caso de responder a más preguntas o tareas de los establecidos en cada apartado sólo se corregirá la que aparezca físicamente en primer lugar.

– Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. Durante el desarrollo del ejercicio no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.

– Los teléfonos móviles deberán estar apagados durante el examen.

APARTADO 1 [3 puntos]

Opción A

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Se pide hallar la matriz $X$ que satisface la ecuación $X^{-1}A + A = B$.

**Resolución**

Trasponiendo términos en la ecuación, $X^{-1}A = B - A$. Multiplicando por X, por la izquierda,

$XX^{-1}A = IA = A = X(B - A)$. Sea $C = B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Queda la ecuación $XC = A$ ; $\det C = 1 \neq 0$, $\exists\, C^{-1}$. Multiplicando por $C^{-1}$, por la derecha,

$XCC^{-1} = XI = X = AC^{-1}$ ; $X = AC^{-1} = A\frac{1}{\det C}(adj\ C)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Se pide hallar la matriz Y que satisface la ecuación $AYA^{-1} = I$

**Resolución**

Multiplicando por $A^{-1}$, por la izquierda, y por A por la derecha, $A^{-1}AYA^{-1}A = IYI = Y = A^{-1}IA = I$

O sea, $Y = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Opción B

La editorial "EcoReads", comprometida con la sostenibilidad ambiental, planea lanzar dos nuevas líneas de libros: una serie de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800g de papel de bambú para su próxima producción. Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.

1) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
2) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
3) ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?
4) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

## Resolución

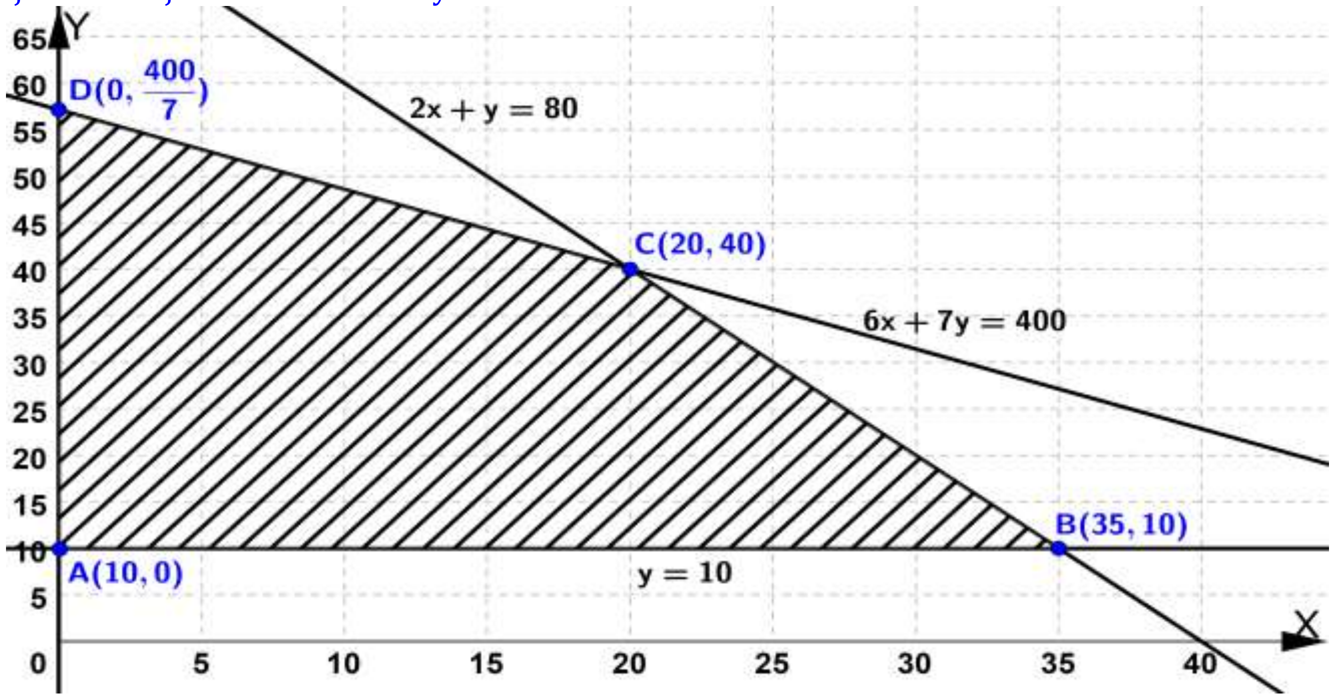
1) Representamos los datos del problema:

| | nº de ejemplares | g de papel reciclado | g de papel de bambú | beneficio (en €) |
|---|---|---|---|---|
| **guías prácticas** | x | 60x | 20x | 5x |
| **libros de cocina** | y | 70y | 10y | 4y |
| **total** | x + y | 60x + 70y | 20x + 10y | 5x + 4y |

Función a optimizar (maximizar), el beneficio $f(x, y) = 5x + 4y$.

Las restricciones son $\begin{cases} 60x + 70y \leq 4000 \\ 20x + 10y \leq 800 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 7y \leq 400 \\ 2x + y \leq 80 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada




Veamos en qué vértice alcanza el valor máximo el beneficio $f(x, y) = 5x + 4y$

$f(A) = f(10, 0) = 5.10 + 4.0 = 50 \qquad f(B) = f(35, 10) = 5.35 + 4.10 = 215$

$f(C) = f(20, 40) = 5.20 + 4.40 = 260 \qquad f(D) = f\left(0, \frac{400}{7}\right) = 5.0 + 4\,\frac{400}{7} = \frac{800}{7} \cong 114,29$

El beneficio máximo es 260 € y se obtiene con 20 guías prácticas y 40 libros de cocina.

APARTADO 2 [4 puntos]

Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 4, & si\ x \le -1 \\ x^3 - x + 3, & si -1 < x \le 2 \\ \frac{x+3b-2}{x-1}, & si\ x > 2 \end{cases}$

1) Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.

**Resolución**

Para $x \neq -1$, $x \neq 2$, f es continua independientemente de los valores de a y b por serlo las funciones polinómicas y racionales.

Por ser continua en $x = -1$: $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) \Rightarrow a(-1)^2 - 4 = (-1)^3 - (-1) + 3 \Rightarrow a = 7$

Por ser continua en $x = 2$: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow 2^3 - 2 + 3 = \frac{2+3b-2}{2-1} \Rightarrow 9 = 3b + 1 \Rightarrow b = 3$

Conclusión: debe ser $a = 7$, $b = 3$

2) Utilizando los valores de los parámetros a y b del apartado anterior, analice si la función $f(x)$ es creciente o decreciente en el intervalo $(2, +\infty)$.

**Resolución**

Como $a = 7$, $b = 3$, $f(x) = \begin{cases} 7x^2 - 4, & si\ x \le -1 \\ x^3 - x + 3, & si -1 < x \le 2 \\ \frac{x+7}{x-1}, & si\ x > 2 \end{cases}$.

En $(2, +\infty)$, $f(x) = \frac{x+7}{x-1}$; $f'(x) = \frac{1(x-1)-(x+7)1}{(x-1)^2} = \frac{-8}{(x-1)^2} < 0$ . Luego, f es decreciente en $(2, +\infty)$.

3) Calcule la integral definida $\int_0^2 f(x)\ dx$

**Resolución**

En $(0, 2)$, $f(x) = x^3 - x + 3$ . Una primitiva de f $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 3x = \frac{x^4 - 2x^2 + 12x}{4}$

Por la regla de Barrow, $\int_0^2 f(x)\ dx = F(2) - F(0) = \frac{2^4 - 2.2^2 + 12.2}{4} - \frac{0^4 - 2.0^2 + 12.0}{4} = \frac{32}{4} = 8$

APARTADO 3 [3 puntos]

Opción A

Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. De una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula un tiempo medio de 90 minutos por examen.

1) Calcule el intervalo de confianza del 93% para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar el examen.

**Resolución**

X = tiempo, en minutos $\rightarrow N(\mu, 10)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del 93% para el tiempo medio, μ, es $I_c = (\overline{x} - E, \overline{x} + E)$, siendo $\overline{x} = 90$ la media de una muestra de tamaño $n = 100$ y $E = z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

$z_{\alpha/2}$ es el valor de la N(0, 1) que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0{,}93}{2} = 0{,}965$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0{,}965 \xrightarrow{usando\ la\ tabla\ de\ la\ N(0,1)} z_{\alpha/2} = 1{,}81$. Sustituyendo,

$E = z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}81.\frac{10}{\sqrt{100}} = 1{,}81$ ; $I_c = (90 - 1{,}81\,; 90 + 1{,}81) = (88{,}19\,; 91{,}81)$

2) ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio de completar el examen, con un nivel de confianza del 97%, sea de 2 minutos?

**Resolución**

En este caso, $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0{,}97}{2} = 0{,}985$ ; además, la desviación típica es $\sigma = 10$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0{,}985 \xrightarrow{usando\ la\ tabla\ de\ la\ N(0{,}1),\ \ por\ interpolación} z_{\alpha/2} = 2{,}17$

Nos piden hallar n para que $E = z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \Leftrightarrow z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{2} = \sqrt{n} \xrightarrow{elevando\ al\ cuadrado} (z_{\alpha/2})^2.\frac{\sigma^2}{2^2} = n$

O sea, $n = 2{,}17^2.\frac{10^2}{2^2} = 117{,}7225 \Rightarrow$ El tamaño mínimo es 118 estudiantes

Opción B

En un instituto, se sabe que el 45% de los estudiantes practican algún deporte, el 30% participan en actividades artísticas y el 25% están involucrados en actividades de voluntariado. Además, se sabe que el 60% de los estudiantes que practican deportes, el 40% de los que participan en actividades artísticas y el 20% de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:

1) ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil?

2) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil?

3) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil?

4) Si un estudiante no es miembro del consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?

**Resolución**

A = practicar algún deporte   B = participar en actividades artísticas

C = participar en actividades de voluntariado   D = ser miembro del consejo estudiantil

Según el enunciado, $p(A) = 0{,}45$   $p(B) = 0{,}3$   $p(C) = 0{,}25$

$p(D/A) = 0{,}6$   $p(D/B) = 0{,}4$   $p(D/C) = 0{,}2$

1) Se pide $p(A \cap D) = p(A)\, p(D/A) = 0{,}45 \,.\, 0{,}6 = 0{,}27 = 27\%$

2) Se pide $p(B \cap D^c) = p(B)\, p(D^c/B) = p(B)\, [1 - p(D/B)] = 0{,}3(1 - 0{,}4) = 0{,}18 = 18\%$

3) Piden p(D), que, usando el teorema de probabilidad total, es

$p(D) = p(A)p(D/A) + p(B)p(D/B) + p(C)p(D/C) = 0{,}45 \,.\, 0{,}6 + 0{,}3 \,.\, 0{,}4 + 0{,}25 \,.\, 0{,}2 = 0{,}44 = 44\%$

b) Se pide $p(C/D^c) = \frac{p(C \cap D^c)}{p(D^c)} = \frac{p(C) - p(C \cap D)}{p(D^c)} = \frac{p(C) - p(C)p(D/C)}{1 - p(D)} = \frac{0{,}25 - 0{,}25\,.\,0{,}2}{1 - 0{,}44} \cong 0{,}3571 = 35{,}71\%$