

Concepto de progresión geométrica

Una progresión geométrica (p.g.) es una sucesión cuya regla es multiplicar por un mismo número “r”, llamada razón de la progresión.

Ejemplos:

1) 2 , 6 , 18 , ... es una p.g. cuya regla de formación es “multiplicar por 3”. Luego, la razón es $r = 3$

2) 80, 40 , 20 , 10 , es una p.g. cuya regla de formación es “dividir entre 2”, que equivale a “multiplicar por $\frac{1}{2}$ “. Por tanto, la razón es $r = \frac{1}{2}$

Fíjate en los ejemplos anteriores que cuando dividimos cualquier término entre el término anterior obtenemos la razón de la p.g., r.

En la 1ª sucesión, como $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{a_3}{a_2} = \frac{18}{6} = 3 \end{array} \right.$, es una p.g., $r = 3$, $a_1 = 2$

En la 2ª sucesión, como $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_2}{a_1} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} \\ \frac{a_3}{a_2} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \\ \frac{a_4}{a_3} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$, es una p.g., $r = \frac{1}{2}$, $a_1 = 80$

En general, siempre se cumple que la razón de una p.g. se obtiene dividiendo cada término entre el término anterior y que para que una sucesión sea una p.g. al dividir cualquier término entre el anterior debe obtenerse el mismo valor. En tal caso, el valor que se obtiene es la razón de la p.g.
 Por ejemplo, la sucesión 3, 6, 12, 25, **NO** es una p.g. porque al dividir cada término entre el anterior no

se obtiene un valor constante: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2 \\ \frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{6} = 2 \\ \frac{a_4}{a_3} = \frac{25}{12} \neq 2 \end{array} \right. \Rightarrow$ No es una p.g.

Fórmula del término general de una p.g.

En una p.g. sabemos que cada término es igual al término anterior multiplicado por “r”. Luego:

$$a_2 = a_1 \cdot r \quad a_3 = a_2 \cdot r = (a_1 \cdot r) \cdot r = a_1 \cdot r^2 \quad a_4 = a_1 \cdot r^3 \quad \text{etc, etc}$$

Por tanto, la fórmula del término general de una p.g. es $a_n = a_1(r^{n-1})$

Ejemplo:

3, -6, 12, ... Como $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{3} = -2 \\ \frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{-6} = -2 \end{array} \right.$, es una p.g., $r = -2$, $a_1 = 3 \Rightarrow a_n = 3(-2)^{n-1}$

Si queremos expresar el término general en función de otro término a_k , la fórmula sería:

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$$

Actividades resueltas

En la sucesión 3, 6, 12, 24, ... , a) Calcula a_n y luego halla a_{15}

Resolución

Vemos que es una p.g. de razón $r = 2$, $a_1 = 3 \Rightarrow a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; $a_{15} = 3 \cdot 2^{14} = 49152$

Averigua si es una p.a. o una p.g. y luego halla el término general y el décimo segundo término:

a) 5, -15, 45, ... , b) 10, 3, -4, ... c) 3, 6, 12, 24, ... , d) 12; 8,5; 5; 1,5; ...

Resolución

a) p.g., $a_n = a_1(r^{n-1}) = 5 \cdot (-3)^{n-1}$ b) p.a., $a_n = a_1 + (n-1)d = 10 + (n-1)(-7) = 17 - 7n$

c) p.g., $a_n = a_1(r^{n-1}) = 3 \cdot 2^{n-1}$ d) p.a., $a_n = a_1 + (n-1)d = 12 + (n-1)(-3,5) = 15,5 - 3,5n$

Una pelota botando alcanza una altura de 64 cm en el primer bote. En cada bote la altura es las $\frac{3}{4}$ partes que en el bote anterior. ¿Qué altura alcanzará en el sexto bote? Redondea a las décimas

Resolución

La sucesión de las alturas alcanzadas, en cm, es $a_1 = 64$; $a_2 = \frac{3}{4}$ de 64 = 48; $a_3 = \frac{3}{4}$ de 48 = 36; etc

que es una p.g. de razón $r = \frac{3}{4}$. Se pide, $a_6 = 64 \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 64 \frac{243}{1024} = 15,1875 \cong 15,2$

Luego, en el sexto bote alcanzara una altura de 15,2 cm

La presa de Asuán situada sobre el río Nilo, en Egipto, contiene $164 \cdot 10^9$ litros de agua el día del comienzo del verano. Teniendo en cuenta que cada día pierde el 1,5% de su capacidad, ¿cuántos litros contendrá tras haber pasado 20 días? Utiliza la notación científica y la calculadora.

Resolución

Como pierde el 1,5% al día, cada día tendrá $100\% - 1,5\% = 98,5\%$ de capacidad que el día anterior.

La sucesión de litros en la presa es una p.g. de razón $r = 98,5\% = 0,985$ y con $a_1 = n^9$ de litros al pasar 1 día = $164 \cdot 10^9 \cdot 0,985 = 1,6154 \cdot 10^{11}$

Se pide, $a_{20} = 1,6154 \cdot 10^{11} (0,985)^{19} \cong 1,21 \cdot 10^{11}$. La presa tendrá 121 000 000 000 litros

Un caracol anda cada vez más despacio. El primer día recorre 600 m y cada día recorre los $\frac{2}{3}$ del día anterior. ¿Cuántos metros recorre el décimo día? Redondea a centésimas

Resolución

La sucesión de metros recorridos es una p.g. de primer término $a_1 = 600$ y razón $r = \frac{2}{3}$.

Se pide, $a_{10} = 600 \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cong 15,61$. Luego, el décimo día recorre 15,61 m

Una aldea tiene 1600 habitantes. Suponiendo que la población cada año decreciera un 0,5%, ¿qué población tendrá cuando pasen 20 años? Redondea el resultado a las unidades

Resolución

Como decrece un 0,5% al año, cada año tendrá un $100\% - 0,5\% = 99,5\%$ habitantes que el año anterior.

La sucesión de población es una p.g. de razón $r = 99,5\% = 0,995$ y con $a_1 = n^o$ de habitantes al pasar 1 año $= 1600 \cdot 0,995 = 1592$

Se pide, $a_{20} = 1592 \cdot 0,995^{19} \cong 1447,4$. La aldea tendrá 1448 habitantes aproximadamente

La maquinaria de una fábrica pierde cada año un 20% de su valor. Si costó 4 millones de euros, ¿en cuánto se valorará después de 10 años de funcionamiento? Redondea a las unidades

Resolución

Como pierde un 20% al año, cada año tendrá valdrá $100\% - 20\% = 80\%$ que el año anterior.

La sucesión de precios es una p.g. de razón $r = 80\% = 0,8$ y con $a_1 =$ valor al pasar 1 año $= 4 \cdot 10^6 \cdot 0,8 = 3,2 \cdot 10^6$

Se pide, $a_{10} = 3,2 \cdot 10^6 \cdot 0,8^9 \cong 429496,73$. La maquinaria se valorará en 429497 € aproximadamente

Se tiene una cuba de vino y cada día se saca la mitad de su contenido. El 1 de octubre había 2048 litros. ¿Qué cantidad de vino habrá el día del Pilar?

Resolución

Formamos la sucesión de litros vino que queda cada día empezando por el 1 de octubre

$$2048, 1024, 512, \dots \quad \text{Es una p.g. de razón } r = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vino que hay el 12 de octubre: } a_{12} = 2048 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 2^{11} \cdot 2^{-11} = 2^0 = 1 \text{ litro}$$

El número de bacterias que hay en un recipiente está aumentando un 25% cada hora. Si al pasar 1 hora hay $3 \cdot 10^9$ bacterias, ¿cuántas bacterias habrá al cabo de 5 horas?

Resolución

Como aumenta un 25% por hora, cada hora habrá $100\% + 25\% = 125\%$ que la hora anterior.

La sucesión del n° de bacterias es una p.g. de razón $r = 125\% = 1,25$ y con $a_1 = 3 \cdot 10^9$

Se pide, $a_5 = 3 \cdot 10^9 \cdot 1,25^4 = 7324218750$. Habrá 7 324 218 750 bacterias

Paco quiere comprarse un coche. En el concesionario le han propuesto pagarlo en 16 meses con la siguiente forma de pago, bastante curiosa: debe pagar 1 € el primer mes; 2 € el segundo; 4 € el tercero; 8 € el cuarto y así sucesivamente. ¿Cuánto tendrá que pagar el último mes?

Resolución

Vemos que las cuotas forman una p.g. de razón $r = 2$. Piden $a_{16} = 1 \cdot 2^{15} = 32768$ €

Interpolación geométrica

Consiste en formar una progresión geométrica cuyos extremos sean los 2 números dados.

$$a_1, \dots, a_n.$$

Suma de los primeros términos de una p.g.

Vamos a obtener una fórmula para calcular la suma, S_n , de los n primeros términos de una p.g.

Observa que $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$

$$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + \dots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n$$

Luego $r \cdot S_n = a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1}$

Restando, $S_n - r \cdot S_n = a_1 - a_{n+1} = a_1 - a_1 \cdot r^n$

Sacando factor común S_n en el primer miembro y a_1 en el segundo: $(1 - r) \cdot S_n = a_1 \cdot (1 - r^n)$

Despejando, $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$

Ejemplo:

Hallemos la suma de los 12 primeros términos de la p.g. 3, 6, 12, 24, ...

Resolución

Observa que $a_1 = 3, r = 2$; $S_{12} = \frac{3(1 - 2^{12})}{1 - 2} = 3(2^{12} - 1) = 12285$

Actividades resueltas

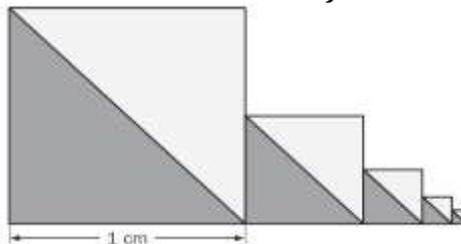
¿Cuánto vale la suma $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{25}$?

Resolución

Nos piden la suma de los 26 primeros términos de la p.g. 1, 2, 2^2, 2^3, ... cuya razón es $r = 2$.

$$S_{26} = \frac{1(1 - 2^{26})}{1 - 2} = 2^{26} - 1 = 67108863$$

Calcula el área de la región de gris teniendo en cuenta que el lado de cada cuadrado es la mitad del cuadrado anterior. (Redondea el resultado a las centésimas)



Resolución

El área de la región gris del 1er cuadrado es $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$

El área de la región gris del 2º cuadrado es $\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$

El área de la región gris del 3er cuadrado es $\frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{32}$

etc.

Nos piden la suma de los 5 primeros términos de la p.g. $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \dots$ cuya razón es $r = \frac{1}{4}$

$$S_5 = \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^5 \right]}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{10}} \right)}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \frac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \frac{2^{10} - 1}{3 \cdot 2^9} = \frac{1023}{1536} \cong 0,67$$

La Leyenda del ajedrez: El rey Sirham de la India, quería premiar a su gran visir Sisa Ben Dahir por haber inventado el juego del ajedrez.

- "Majestad", dijo, "dadme un grano de trigo para ponerlo en la primera casilla, dos para la segunda, cuatro para la tercera y así, oh rey, duplicando el número para cada casilla, dadme granos suficientes para cubrir todo el tablero"

- "No pides mucho, mi fiel servidor" contestó el rey y ordenó que se le trajese un saco de trigo como pago. Cuando comenzó el recuento, la bolsa se acabó antes de llegar a la casilla número 20.

¡Trajeron más sacos, pero el número de granos necesario aumentaba rápidamente y todo el trigo que producía el reino apenas era suficiente para cubrir la mitad del tablero!

Resolución

Si hacemos el cálculo veremos que el número de granos necesario sería la suma de los 64 primeros términos de la p.g. $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$ cuya razón es $r = 2$.

Esta suma vale $S_{64} = \frac{1(1-2^{64})}{1-2} = 2^{64} - 1 = 1,844674407 \cdot 10^{19}$ granos de trigo, que es aproximadamente 200 veces la producción mundial actual de trigo durante un año.

Rosa quiere comprarse una moto. En la tienda le han propuesto pagarla en 9 meses con la siguiente forma de pago, bastante curiosa: debe pagar 512 € el primer mes; 256 € el segundo; 128 € el tercero y así sucesivamente. Es decir, cada mes paga la mitad que el mes anterior.

Averigua si la sucesión que se forma con las cantidades que paga cada mes es una progresión aritmética o geométrica. Halla la fórmula del término general, lo que tendría que pagar el último mes y lo que le cuesta en total la moto.

Resolución

Las cantidades a pagar son 512, 256, 128, ... forman una p.g. cuya razón es $r = \frac{1}{2}$

La fórmula del término general es $a_n = 512 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^9 \cdot (2^{-1})^{n-1} = 2^9 \cdot 2^{1-n} = 2^{10-n}$

El último mes tendría que pagar $a_9 = 2^{10-9} = 2$ €

En total pagaría por la moto $S_9 = \frac{512 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^9 \frac{2^9 - 1}{2^9}}{\frac{1}{2}} = 2(2^9 - 1) = 1022$ €

A Borja le ofrecen dos contratos de trabajo:

Contrato A: 200 € el primer mes y le aumentarán un 15% cada mes

Contrato B: 400 € el primer mes y le aumentarán 60 € cada mes

Va a estar trabajando un año y medio.

Usa progresiones y averigua:

a) Lo que ganaría con el contrato A

Resolución

Como le aumentan un 15% por mes, cada mes cobrará $100\% + 15\% = 115\%$ que el mes anterior.

La sucesión de dinero que cobra es una p.g. de razón $r = 115\% = 1,15$ y con $a_1 = 200$

Como 1,5 años son 18 meses, en total cobraría $S_{18} = \frac{200(1 - 1,15^{18})}{1 - 1,15} = \frac{200(1,15^{18} - 1)}{0,15} \cong 15167,27$ €

b) Lo que ganaría con el contrato B

Resolución

La sucesión de dinero que cobra es una p.a. de diferencia $d = 60$ y primer término $a_1 = 400$

Se pide $S_{18} = \frac{(a_1 + a_{18})18}{2}$. Observa que $a_{18} = 400 + 17 \cdot 60 = 1420$

Luego, lo que ganaría con el contrato B es $S_{18} = \frac{(400 + 1420)18}{2} = 16380 \text{ €}$

c) El contrato que le conviene elegir explicando por qué.

Resolución

Le conviene el contrato B porque en año y medio gana más que con el A

Suma de los infinitos términos de una p.g.

Cuando la razón de una p.g. es, en valor absoluto, menor que 1 se puede calcular la suma de los infinitos términos de dicha p.g.

Para ello basta con observar que si $|r| < 1$ y n es infinitamente grande y r^n es aproximadamente cero y podemos eliminarlo en la fórmula de la suma de los n primeros términos.

Por tanto, la fórmula de la suma de los infinitos términos de una p.g. en la que $|r| < 1$, es:

$$S_{\infty} = \frac{a_1(1 - 0)}{1 - r} \Rightarrow \boxed{S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r}}$$

Ejemplo:

Hallemos la suma de los infinitos términos de la p.g.: 8, 4, 2, ...

Observa que $a_1 = 8$, $r = \frac{1}{2} = 0,5$. Luego, $S_{\infty} = \frac{8}{0,5} = 16$

Producto de los primeros términos en una p.g.

Tomemos los primeros términos de una p.g., por ejemplo: 3, 6, 12, 24, 48, 96

Observa que $3 \cdot 96 = 6 \cdot 48 = 12 \cdot 24$. O sea, $a_1 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_5 = a_3 \cdot a_4$

En general, en cualquier p.g. el producto de los términos equidistantes de los extremos es igual al producto de los extremos: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n \rightarrow a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} \dots$

Usando esta propiedad, se obtiene una fórmula para calcular el producto, P_n , de los "n" primeros términos de una p.g.:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_2 \cdot a_1$$

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot \dots \cdot (a_n \cdot a_1) = (a_1 \cdot a_n)^n, \text{ luego } \boxed{P_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}}$$

Ejemplo:

Hallemos el producto de los 5 primeros términos de la sucesión 2, 6, 18, ...

$P_5 = \sqrt{(a_1 a_5)^5}$. Observa que $a_1 = 2$, $r = 3$, luego $a_5 = a_1 \cdot r^4 = 2 \cdot 3^4$.

Por tanto, $P_5 = \sqrt{(2 \cdot 3^4)^5} = \sqrt{(2^2 \cdot 3^4)^5} = \sqrt{2^{10} 3^{20}} = 2^5 3^{10} = 1889568$

ANEXO: MÁS ACTIVIDADES

- En una progresión geométrica cada término se obtiene:
 - a) Sumando un valor constante al término anterior.
 - b) Multiplicando cada término por un valor constante.
 - c) Sumando los dos términos anteriores.

- Si la razón de una progresión geométrica es mayor que 1 la progresión es creciente.
 - d) En ese caso es decreciente.
 - e) Siempre.
 - f) Sólo si el primer término es positivo.

- El valor por el que se multiplica cada término de una progresión geométrica para obtener el siguiente se llama:
 - g) Razón.
 - h) Factor.
 - i) Constante.

- La razón de la progresión 64, 32, 16, 8, 4, ... vale:

- En una progresión geométrica cuyo primer término vale 12 y el cuarto 1500 la razón vale:

- En la progresión geométrica 3, 6, 12, ..., a_6 vale:

- Halla el término general y el décimo término de las siguientes p.g.

$$a_1 = 2, r = 3 \quad a_1 = -5, r = 2 \quad r = 2, a_7 = 320$$

$$a_1 = 2 \quad a_6 = 486 \quad a_6 = 3125 \quad a_7 = 15625 \quad a_4 = 24 \quad a_9 = 192$$

- En la sucesión 5, 15, 45, ... , a) Calcula a_n b) Halla a_{12}

- Halla el lugar que ocupa el término 320 en una p.g. en la que $a_3 = 20$, $a_9 = 1280$

- En una progresión geométrica, los términos primero y decimoquinto son 6 y 54, respectivamente. Halla el término sexto.

- La suma de los ocho primeros términos de una progresión geométrica es 17 veces la suma de los cuatro primeros. Halla el valor de la razón.

- Halla tres números en progresión geométrica sabiendo que su suma es 26 y su producto 216.

- Tres números en progresión geométrica suman 525 y su producto vale un millón. Calcula dichos números.

- La suma de los tres primeros términos de una p.g. es 77 y su producto es 10648. Calcular los tres números.

- La suma de 3 números consecutivos que están en progresión geométrica es 28 y el producto es 512. Calcular los 3 números.

- En una progresión geométrica de cinco términos, el último es doble del tercero y el producto de todos ellos es igual a $4\sqrt{2}$. Hallar todos los términos de la progresión.

-
- Halla tres números en progresión geométrica cuyo producto es 328509, sabiendo que el mayor excede en 115 a la suma de los otros dos.
 - Descompón el número 124 en tres sumandos que formen progresión geométrica, siendo 96 la diferencia entre el mayor y el menor.
 - Calcular la razón de una p.g. de 5 términos; sabiendo que la suma de los dos primeros términos es 120 y la suma de los dos últimos es 960.
 - Una p.g. de razón positiva consta de 4 términos. Sabiendo que la suma de los dos primeros es 6 y que la correspondiente de los dos últimos es 24, determinar la razón y formar la progresión.
 - El valor del tercer término de una progresión geométrica es 32 y la diferencia entre el cuarto y el segundo término es 120. Calcular la razón y la suma de los 4 primeros términos.
 - La suma de 3 números positivos en una progresión geométrica es 210, el tercero excede al primero en 90. Hallar los 3 números positivos.
 - Hallar 3 números que están en p.g., sabiendo que su suma es 65 y su producto es 3375.
 - En una progresión geométrica de tres términos, la suma de ellos es 133 y el primero vale 1. ¿Cuál es la razón?
 - Averigua para qué valores de k las expresiones siguientes están en progresión geométrica:
 $k + 3, 6k + 3, 20k + 5.$
 - Halla el valor de x para que las siguientes expresiones formen una progresión geométrica:
 $x + 2, 3x + 2, 9x - 2.$
 - Halla x para que $x - 1, x + 1, 2(x + 1)$ estén en progresión geométrica.
 - Hallar el valor de "x" para que la sucesión $(2x - 5), (x - 4), (10 - 3x)$ sea una p.g.
 - Hallar el valor de "x" para que la sucesión $x, (x + 9), (x + 45)$ sea una p.g.
 - Hallar el valor de "x", de modo que los números $(x - 5), x, (x + 10)$; en ese orden, estén en p.g. Construir dicha progresión.
 - Demostrar que si los números a, b y c están en progresión geométrica, entonces la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones reales y que la ecuación $ax^2 + 2bx + c = 0$ tiene una raíz real doble.
 - Determina cuatro números en progresión geométrica de manera que los dos primeros sumen 0,5 y los dos últimos 0,125.
 - Tres números están en progresión geométrica; el segundo es 32 unidades mayor que el primero, y el tercero, 96 unidades mayor que el segundo. Halla los números.
 - Halla los cuatro primeros términos de una progresión geométrica, sabiendo que el segundo es 20 y la suma de los cuatro primeros es 425.
 - Divide el número 221 en tres partes enteras que forman una progresión geométrica tal que el tercer término sobrepasa al primero en 136.

- La suma de tres números en progresión geométrica es 248 y la diferencia entre los extremos 192. Halla dichos números.
- Halla cuatro números en progresión geométrica sabiendo que la suma de los dos primeros es 28 y la suma de los dos últimos 175.
- Una progresión geométrica tiene cinco términos, la razón es igual a la cuarta parte del primer término y la suma de los dos primeros términos es 24. Halla los cinco términos.
- Demuestra que la sucesión $\frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{3}, \frac{8}{9(\sqrt{2} + \sqrt{6})}, \dots$ es una progresión geométrica.
- Resuelve el sistema $\begin{cases} 6x - y - z = 0 \\ x + y + z = 7 \end{cases}$ sabiendo que x, y, z forman una progresión geométrica.
- Tres números, x, y, z, suman 19. Colocados en ese orden forman una progresión geométrica, pero si se disminuye el primero en una unidad están en progresión aritmética. Calcula esos números.
- Hallar la suma de los 5 primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es igual a $\sqrt[5]{\frac{1}{a}}$ y el primer término es igual a \sqrt{a}
- Halla la suma de los siete primeros términos de la progresión cuyos tres primeros términos son:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{3\sqrt{2}}{2}$$
- La suma de los 5 términos que forman una progresión geométrica es $(b^2 + 1)(b + 1)$ y la razón es b. ¿Cuánto vale el primer término?
- El primer término de una progresión geométrica es 1 y la razón 3. Halla la suma de los términos comprendidos entre el segundo y el noveno.
- En una progresión geométrica la suma de los dos primeros términos es 12 y la suma del primero con el tercero es 30. Halla la suma de los cinco primeros términos.
- Los dos primeros términos de una progresión geométrica son $\frac{9}{16}$ y $\frac{9}{4}$
 Halla dos términos consecutivos de dicha progresión cuyas raíces cuadradas se diferencien en 48.
- En una progresión geométrica de 14 términos la suma de los términos que ocupan lugar impar es 16383 y la suma de los términos que ocupan lugar par es 32766. Halla el primer término y la razón.
- La razón de una progresión geométrica es $r = \sqrt{3}$ y su tercer término es $a_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$
 Calcula el sexto término y la suma de los seis primeros.
- ¿Cómo tiene que ser la razón de una progresión geométrica para que todos sus términos vayan cambiando alternativamente de signo?
- ¿Cuántos términos se han tomado en una progresión geométrica, sabiendo que el primer término es 7, el último 448 y su suma 889?
- La suma de los siete primeros términos de una progresión geométrica de razón 3 es 7651. Halla el primero y el séptimo términos.

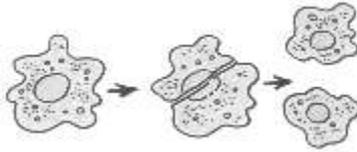
-
- En una progresión geométrica de razón 0,2, la suma de todos los términos es 11,232. Halla el término décimo de la progresión.
 - En una progresión geométrica de razón positiva, la suma del tercer término con el cuarto es 240 y la suma del quinto con el sexto es 3840. Calcular la diferencia y formar la progresión.
 - ¿Cuántos términos debemos considerar en la p.g. 3, 6,..... para obtener una suma de 1533 ?
 - Dado un cierto número entero de 6 cifras, agrupamos sus cifras de dos en dos: centenas de millar con decenas de millar, millares con centenas y decenas con unidades. Los tres números de dos cifras que se obtienen forman una progresión geométrica de razón 2. Si a 1000 veces la suma de los términos de dicha progresión se le agrega el número inicial se obtiene 412896. ¿Cuál era ese número?
 - Halla los ángulos de un cuadrilátero, si se sabe que están en progresión geométrica y que el mayor es 27 veces el menor.
 - El volumen de un ortoedro es de 3375 cm^3 . Halla la longitud de sus aristas, sabiendo que están en progresión geométrica y que la arista intermedia mide 10 cm más que la menor.
 - Las dimensiones de un ortoedro están en progresión geométrica. Calcula estas dimensiones sabiendo que su perímetro es 420 m. y su volumen 8000 m^3 .
 - Hallar las dimensiones de un estanque de las que se sabe que suman 21 m y que están en progresión geométrica. La capacidad del estanque es de 216 m^3 .
 - Interpola tres medios geométricos entre los números 8 y 128.
 - Interpolar cuatro medios geométricos entre 128 y 4.
 - Interpolar tres medios geométricos entre 3 y 48.
 - Interpolar 4 medios proporcionales entre 0,96 y 0,03.
 - Interpolar tres medios proporcionales entre a y ab^2 .
 - ¿Qué términos faltan en la siguiente p.g. 8, __, __, __, 128 ?
 - Averiguar cuántos medios proporcionales pueden interpolarse entre 3 y 384 siendo 2 la razón de la progresión.
 - Una pelota se deja caer y rebota. Tras cada rebote alcanza la mitad que en el bote anterior. Si en el quinto rebote alcanza 10 cm. ¿Desde qué altura se dejó caer?
 - Se conoce que una pelota recorre cada minuto el doble de la distancia que recorrió en el minuto anterior; si ha recorrido 15 metros, tres minutos después habrá recorrido..... metros
 - Lanzamos una pelota a lo largo de un pasillo. En cada bote que da avanza una distancia igual a la mitad de la distancia anterior. Si al octavo bote cae en un foso de tierra y se para ¿qué distancia habrá recorrido si antes del primer bote ha recorrido 2 m?

- Durante los 8 primeros meses, un bebé aumenta su estatura un 2% cada mes. Si el primer mes mide 70 cm, ¿Cuánto medirá el octavo mes?

- En la clase de ciencias naturales se ha explicado que una determinada bacteria se reproduce por bipartición cada 10 minutos. Al principio hay 12 bacterias.

- Halla el término general de la progresión formada por el nº de bacterias cada 10 minutos
- ¿Cuántas bacterias habrá cuando pase 1 hora?

- Las amebas, seres unicelulares, se reproducen por bipartición, es decir cada una se parte en dos. Cada una de estas mitades, se desarrolla, y cuando llega el momento, vuelven a partirse en dos. Partiendo de 1 ameba y suponiendo que la bipartición se produce cada hora.



- Cuántas amebas habrá a las 24 horas?
- ¿Y a la semana?
- Si el tamaño de una ameba es de 1 mm, ¿qué longitud ocuparían si se colocaran en fila? Exprésalo en notación científica

- Un especialista en biología molecular ha conseguido preparar una cepa de una extraña espora que cada hora se divide en tres, todas del mismo tamaño que la primitiva. A su vez, al cabo de una hora, cada una de las esporas hijas se divide en otras tres, prosiguiendo indefinidamente este proceso. El experimentador coloca una única espora en un tubo de ensayo perfectamente limpio a mediodía. Al dar la medianoche, el tubo estaba a punto de desbordarse. ¿A qué hora estaba el tubo a un tercio de su altura? Las condiciones son exactamente las mismas, pero ahora el biólogo ha puesto no una, sino tres esporas en el tubo de ensayo. ¿A qué hora se habrá llenado del todo?

- Una araña teje su tela en el marco de una ventana. Cada día duplica la superficie hecha hasta entonces. De esta forma tarda 30 días en cubrir el hueco de la ventana. Si en vez de una araña, fueran dos, ¿Cuánto tardarían en cubrir dicho hueco?

- En un lago hay un nenúfar (planta acuática) que se duplica cada día. Tras un mes (30 días), el lago está completamente cubierto. ¿En qué momento exacto estuvo cubierta de nenúfares la mitad del lago? ¿Cuánto tiempo hubiesen necesitado dos nenúfares para cubrir completamente el lago?

- Un árbol dobla su altura cada año hasta que alcanza su altura máxima al cabo de 10 años. ¿Cuántos años tardará el árbol en alcanzar la mitad de su altura?

- Un árbol de rápido crecimiento multiplica su altura por 1,2 cada año. Si al comenzar el año medía 0,75 m, ¿qué altura tendrá dentro de 8 años?

- En una isla del Pacífico reside una especie de tortugas en peligro de extinción. Los biólogos afirman que cada año muere una sexta parte de la población y nace un 10% ¿En qué porcentaje disminuye cada año la población? ¿Qué clase de progresión formarán las poblaciones de estas tortugas en los próximos años? Si sigue este ritmo de crecimiento, ¿cuántos años faltan para que se extinga la especie?

- El número inicial de moscas de una población es de 50 y cada tres días el número de moscas se duplica, ¿cuántas moscas habrá a los 30 días?

- Una máquina costó inicialmente 10480 €. Al cabo de unos años se vendió a la mitad de su precio. Pasados unos años, volvió a venderse por la mitad, y así sucesivamente. ¿Cuánto le costó la máquina al quinto propietario?

-
- Luis quiere comprarse un coche de segunda mano. En el concesionario le han propuesto pagarlo en un año con la siguiente forma de pago, un poco curiosa: debe pagar 3000 € el mes de Enero; 1500 € en Febrero; 750 € en Marzo y así sucesivamente. ¿Cuánto tendrá que pagar el mes de Diciembre?
 - De un vaso lleno de leche se vacía la mitad y se rellena de agua. Se retira la mitad del nuevo contenido y se vuelve a rellenar con agua. Si este proceso se repite seis veces, ¿qué parte de agua contiene el vaso?
 - Un pueblo, que hace unos años tenía una población de 10000 habitantes, hoy sólo tiene 6561. Cada año la disminución ha sido del 10% de sus habitantes. ¿Cuántos años hace que la población era de 10000?
 - Una ciudad tiene 24000 habitantes en el año 2010. Suponiendo que la población cada año sea 1,05 veces la del año anterior. ¿Qué población tendrá en el 2018? ¿Cuántos habitantes habrá aumentado en esos 8 años?
 - La tasa anual de crecimiento demográfico de un país es del 18‰ (18 por mil). Si al finalizar el año 2000 tiene una población de 16 millones de habitantes, ¿qué población tendrá en el año 2025, si se mantiene esa tasa?
 - La población de una provincia ha aumentado durante 5 años en progresión geométrica, pasando de 200000 a 322102 habitantes. ¿Cuál ha sido la razón de la progresión? Exprésala en %.
 - Supongamos que uno tuviera una hoja de papel. Para fijar las ideas, digamos que tiene un grosor de 1 milésima de centímetro. O sea, 10^{-3} cm = 0,001 cm
 Ahora, empecemos a doblarlo por la mitad. ¿Cuántas veces creen ustedes que podrían doblarlo? Y tengo otra pregunta: si lo pudieran doblar y doblar tantas veces como quisieran, digamos unas *treinta veces*, ¿cuál creen que sería el grosor del papel que tendrían en la mano entonces?
 Antes de seguir leyendo, les sugiero que piensen un rato la respuesta y sigan después (si les parece). Volvamos al planteo entonces. Luego de doblarlo una vez, tendríamos un papel de un grosor de 2 milésimas de centímetro. Si lo dobláramos una vez más, sería de 4 milésimas de centímetro. Cada doblez que hacemos a la hoja, se *duplica* el grosor. Y si seguimos doblándolo una y otra vez (siempre por la mitad) tendríamos la siguiente situación, después de diez *doblezas*: 2^{10} (esto significa multiplicar el número 2 diez veces por sí mismo) = 1024 milésimas de cm = 1 cm aproximadamente.
 ¿Qué dice esto? Que si uno doblara el papel 10 (diez) veces, obtendríamos un grosor de un poco más de un centímetro.
 Supongamos que seguimos doblando el papel, siempre por la mitad. ¿Qué pasaría entonces?
 Si lo dobláramos 17 veces, tendríamos un grosor de $2^{17} = 131072$ milésimas de cm = un poco más de un metro. Si pudiéramos doblarlo 27 veces, se tendría: $2^{27} = 134217728$ milésimas de cm, o sea un poco más de ¡1342 metros! O sea, ¡casi un kilómetro y medio!
 Vale la pena detenerse un instante doblando un papel, sólo veintisiete veces, tendríamos un papel que casi alcanzaría el kilómetro y medio de espesor.
 ¿Cuántas veces tenemos que doblar una hoja de papel para, al aumentar así su grosor, alcanzar la distancia Tierra-Luna? Para ponernos de acuerdo, supondremos que el grosor de la hoja de papel es de 0,1 mm y que la distancia Tierra-Luna es de 384000 km.
 Piénsese en un folio de 1/20 mm de espesor; es decir, veinte folios bien prensados tendrían un grosor de 1 mm. Si se dobla el papel por su mitad; se vuelve a doblar otra vez por la mitad, y se continúa este proceso hasta repetirlo 50 veces, ¿qué grosor tendría el trozo de papel resultante?
 - Un padre planea meter en una hucha 1 € el día que su hijo recién nacido cumpla un año y duplicar la cantidad en cada uno de sus cumpleaños. ¿Cuánto debe meter en la hucha el día que su hijo cumple 5 años?

– Muchos turistas que van a Rusia traen como recuerdo una muñeca que contiene en su interior otra e igual forma y de menor tamaño. Esta a su vez contiene otra muñeca y así sucesivamente. El volumen de cada muñeca es $\frac{2}{3}$ de la anterior. El volumen que ocupa la mayor es 360 cm^3 .

¿Cuántas muñecas hay si la más pequeña tiene $31,6 \text{ cm}^3$?

– La masa de un elemento químico radiactivo va disminuyendo un $0,3\%$ cada año.

Se sabe que en el año 2013 la masa es de $3 \cdot 10^4 \text{ g}$. ¿Cuál será la masa cuando pasen 50 años?

– La masa de un elemento químico radiactivo va disminuyendo de forma que cada año su masa es $0,8$ veces la del año anterior. Se sabe que en el año 2010 la masa es de 50 kg .

a) Halla los 3 primeros términos de la sucesión de masas y explica si es una progresión aritmética o geométrica

b) Halla el término general de la sucesión anterior c) Calcula la masa que tendrá en el año 2015

Suma de términos

– El valor de la suma de los 5 primeros términos de la p.g. cuyo primer término es 2 y el cuarto término es $0,016$ vale

– La suma de todos los términos de una progresión geométrica cuyo primer término es 5 y la razón $0,5$ vale:

– Halla la suma de los 6 primeros términos de las p.g.: a) $a_1 = 2, a_2 = 5$ b) $a_1 = 6, r = -3$

– ¿Cuántos términos hay que sumar en una pg de primer término 7 y último 448 para que nos dé 889?

– Halla la suma de las 12 primeras potencias de 2.

– Halla la suma de los diez primeros términos de la progresión cuyos primeros términos son:

$$2, -2^2, 2^3, -2^4$$

– Halla las siguientes sumas:

a) $3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{10}$.

b) Los diez primeros términos de la sucesión $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$

c) Los 20 primeros términos de la sucesión $1, \frac{-1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{-1}{64}, \dots$

– Calcula $\frac{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^9}{3^{10} - 1}$

– Demuestra que $1 + p + p^2 + \dots + p^n = \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p}$

– Considera el siguiente razonamiento

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots = 1 + 2(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots) = 1 + 2S$$

$$S = 1 + 2S$$

$$S = -1$$

¿Dónde está el error?

– A Pedro le ofrecen dos contratos de trabajo:

Contrato A: 800 € el primer mes y le aumentarán 90 € cada mes

Contrato B: 400 € el primer mes y le aumentarán un 20% cada mes

Si va a estar trabajando un año, haz los cálculos necesarios para averiguar lo que ganaría con cada contrato y explica el contrato que le conviene elegir.

- A Sofía le ofrecen dos contratos de trabajo:

Contrato A: 500 € el primer mes y le aumentarán 80 € cada mes

Contrato B: 100 € el primer mes y le aumentarán un 25% cada mes

Va a estar trabajando un año y medio. Usa progresiones y averigua:

a) Lo que ganaría con el contrato A

b) Lo que ganaría con el contrato B

c) El contrato que le conviene elegir explicando por qué.

- Juan envía dos postales a sendos amigos a principios de enero pidiéndole que cada uno de ellos envíe otras dos postales al mes siguiente a personas que no hayan recibido postales y pidiéndole que repitan el proceso a principio de cada mes siguiente. ¿Cuántas postales se han enviado al acabar el año?

a) 4096 b) 8190 c) 10860.

- Una motocicleta de gran cilindrada costó inicialmente 15020 €. Al cabo de un año se vendió por la mitad de su precio, pasado otro año se volvió a vender a la mitad del último precio, y así sucesivamente.

a) ¿Cuánto le costó la motocicleta al quinto propietario? ¿Y al décimo?

b) ¿Qué cantidad pagaron entre los seis primeros propietarios? ¿Y entre los diez primeros?

- Radio Macuto: A las 9 de la mañana una persona cuenta un secreto a tres amigos con la condición de que no se lo cuenten absolutamente a nadie. A las 9'30 horas de la mañana cada uno de esos tres "amigos" se lo ha contado a otros tres con la misma condición. A las 10 de la mañana cada uno de estos amigos se lo ha contado a otros tres y así sucesivamente cada media hora. Suponiendo que se ha tenido la inmensa suerte de que a nadie se lo han contado por dos vías diferentes, ¿cuánta gente estaría enterada del "secreto" a las 4 de la tarde?

- Un espía les cuenta un secreto a tres personas a las 8 de la mañana, con la condición de que no deben contárselo absolutamente a nadie. A las 8:30, cada una de estas personas se lo ha contado a otras tres bajo la misma condición. A las 9 de la mañana cada una de estas nueve personas se lo cuenta a otras tres. Si esta situación se sigue manteniendo cada media hora y se supone que no hay cruces (es decir, no hay dos personas que le cuenten el secreto a la misma persona), ¿cuánta gente estará enterada del secreto a las 8 de la tarde? Escribe el resultado de forma exacta y en notación científica con 3 cifras decimales. ¿De qué orden de magnitud estamos hablando? ¿Sería esto posible? ¿Por qué? Razona la respuesta.

- En un pueblo de 2550 habitantes, 3 personas se enteran de una noticia a las 8 de la mañana. Cada persona comunica este hecho a tres nuevas al cabo de media hora. ¿A qué hora conocerá el rumor la totalidad del pueblo?

- Un secreto incontable resulta conocido por una persona. Al cuarto de hora ya se lo había contado a otras dos, que al cuarto de hora se lo cuentan a otras dos que no lo conocían, y así sucesivamente: Indica cuánta gente conocería el chisme a las 24 horas.

- A las ocho de la mañana, el alcalde de una población de 50000 habitantes cuenta un chiste al secretario y a dos ayudantes. Un cuarto de hora después cada uno de éstos se lo ha contado a otras tres personas, cada una de las cuales se lo cuenta a otros tres en el mismo periodo de tiempo, y así sucesivamente. ¿Cuánta gente conocerá el chiste al cabo de dos horas y media? Razona la respuesta.

- Un filántropo muy rico decidió destinar su fortuna a una asociación dedicada a la lucha contra el cáncer. Entregó 10 € el primer mes, 20 € el segundo, 40 € el tercero y así sucesivamente. ¿Qué cantidad entregó a los dos años de su primera donación? (Utiliza tu calculadora.)

- Un padre piensa colocar 5 € en una cartilla el día que su hijo cumpla un año, e ir duplicando la cantidad sucesivamente en todos los cumpleaños.

a) ¿Cuánto tendrá que colocar el día que su hijo cumpla 12 años?

b) ¿Cuánto habrá en la cartilla en total?

- Si hoy me das 1 céntimo de euro, mañana 2, pasado 4, al siguiente día 8, y así sucesivamente, ¿cuántos euros me habrás dado al cabo de un mes?

-
- El padre de Juan decide guardar un euro el día que Juan cumple un año. Irá duplicando la cantidad en todos los cumpleaños de su hijo. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado el día que cumpla 13 años?
 - La asociación de vecinos de un barrio realiza un “rastrillo” de venta de objetos usados cuya recaudación donarán a la gente necesitada del barrio. ¿Cuánto dinero recaudaron a lo largo de una semana si las recaudaciones de cada día forman una progresión geométrica de razón 2 y el primer día recaudaron 15 €?
 - Se compra 1 artículo a pagar en 15 meses de este modo: 1 € el primer mes; 3 € el segundo; 9 € el 3^{er} mes y así sucesivamente. Cuál es el importe del artículo.
 - El dinero que tengo en el Banco aumenta en un 3% cada 6 meses. Al principio tengo 2000 €.
 - a) Escribe la progresión del dinero que tengo cada 6 meses y halla el término general
 - b) ¿Cuánto tendré al cabo de 2 años y medio?
 - Una persona gana en su establecimiento un 7% más de lo que ganó el año anterior. Si el primer año ganó 28000 €, ¿cuánto habrá obtenido en media docena de años?
 - Un ahorrador inicia un plan de pensiones a los 45 años, con cuotas anuales de 1200 € que paga al principio de cada año. Su contrato con el banco le asegura un 8% fijo de interés compuesto anual. ¿De qué capital dispondrá a los 65 años?
 - En un depósito de una entidad financiera ofrecen un 6% de interés simple anual. Si se depositan 7500 € durante 2 años y Hacienda retiene el 18%, calcula el capital acumulado al finalizar el período.
 - Un estanque de 28800 m³ de capacidad se llena de agua en dos horas por medio de cuatro caños cuyos caudales de agua (en metros cúbicos por segundo) están en progresión geométrica de razón 3. Averigua el caudal de cada uno de los caños.
 - El juego del ajedrez fue inventado en la India. Cuando el rey hindú Sheram lo conoció, quedó maravillado de lo ingenioso que era y de la variedad de posiciones que en él son posibles. Al enterarse de que el inventor era uno de sus súbditos, el rey lo mandó llamar con objeto de recompensarle personalmente por su acertado invento. El inventor, llamado Seta, se presentó ante el soberano. Era un sabio vestido con modestia, que vivía gracias a los medios que le proporcionaban sus discípulos.

—Seta, quiero recompensarte dignamente por el ingenioso juego que has inventado —dijo el rey.

El sabio contestó con una inclinación. —Soy bastante rico como para poder cumplir tu deseo más elevado —continuó diciendo el rey—. Di la recompensa que te satisfaga y la recibirás. Seta continuó callado.

—No seas tímido —le animó el rey—. Expresa tu deseo. No escatimaré nada para satisfacerlo.

—Grande es tu magnanimidad, soberano. Pero concédeme un corto plazo para meditar la respuesta. Mañana, tras maduras reflexiones, te comunicaré mi petición.

Cuando al día siguiente Seta se presentó de nuevo ante el trono, dejó maravillado al rey con su petición, sin precedente por su modestia.

—Soberano —dijo Seta—, manda que me entreguen un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez.

—¿Un simple grano de trigo? —contestó admirado el rey.

—Sí, soberano. Por la segunda casilla, ordena que me den dos granos; por la tercera, 4; por la cuarta, 8; por la quinta, 16; por la sexta, 32... —

—Basta —interrumpió irritado el rey—. Recibirás el trigo correspondiente a las 64 casillas del tablero de acuerdo con tu deseo: por cada casilla doble cantidad que por la precedente. Pero has de saber que tu petición es indigna de mi generosidad. Al pedirme tan mísera recompensa

menosprecias, irreverente, mi benevolencia. En verdad que, como sabio que eres, deberías haber dado mayor prueba de respeto ante la bondad de tu soberano. Retírate. Mis servidores te sacarán un saco con el trigo que solicitas.

Seta sonrió, abandonó la sala y quedó esperando a la puerta del palacio. Durante la comida, el rey se acordó del inventor del ajedrez y envió a que se enteraran de si habían ya entregado al irreflexivo Seta su mezquina recompensa.

—Soberano, están cumpliendo tu orden —fue la respuesta—. Los matemáticos de la corte calculan el número de granos que le corresponden.

El rey frunció el ceño. No estaba acostumbrado a que tardaran tanto en cumplir sus órdenes. Por la noche, al retirarse a descansar, el rey preguntó de nuevo cuánto tiempo hacía que Seta había abandonado el palacio con su saco de trigo.

—Soberano —le contestaron—, tus matemáticos trabajan sin descanso y esperan terminar los cálculos al amanecer.

—¿Por qué va tan despacio este asunto? —gritó iracundo el rey—. Que mañana, antes de que me despierte, hayan entregado a Seta hasta el último grano de trigo. No acostumbro a dar dos veces una misma orden.

Por la mañana comunicaron al rey que el matemático mayor de la corte solicitaba audiencia para presentarle un informe muy importante. El rey mandó que le hicieran entrar.

—Antes de comenzar tu informe —le dijo Sheram—, quiero saber si se ha entregado por fin a Seta la mísera recompensa que ha solicitado.

—Precisamente para eso me he atrevido a presentarme tan temprano —contestó el anciano—. Hemos calculado escrupulosamente la cantidad total de granos que desea recibir Seta.

Resulta una cifra tan enorme...

—Sea cual fuere su magnitud —le interrumpió con altivez el rey— mis graneros no empobrecerán. He prometido darle esa recompensa, y por lo tanto, hay que entregársela.

—Soberano, no depende de tu voluntad el cumplir semejante deseo. En todos tus graneros no existe la cantidad de trigo que exige Seta. Tampoco existe en los graneros de todo el reino. Hasta los graneros del mundo entero son insuficientes. Si deseas entregar sin falta la recompensa prometida, ordena que todos los reinos de la Tierra se conviertan en labrantíos, manda desecar los mares y océanos, ordena fundir el hielo y la nieve que cubren los lejanos desiertos del Norte. Que todo el espacio sea totalmente sembrado de trigo, y ordena que toda la cosecha obtenida en estos campos sea entregada a Seta. Sólo entonces recibirá su recompensa.

El rey escuchaba lleno de asombro las palabras del anciano sabio.

—Dime cuál es esa cifra tan monstruosa —dijo reflexionando—. ¡Oh, soberano! Dieciocho trillones cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones setenta y tres mil setecientos nueve millones quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince.

Preguntas:

1. ¿En qué país se inventó el juego del ajedrez?
2. ¿Cuántas casillas hay en un tablero de ajedrez?
3. Escribe con cifras la cantidad de trigo que el rey debía entregar a Seta como recompensa.
4. ¿Por qué razón tenía el rey Sheram tanto interés en recompensar a Seta?
5. ¿Por qué al rey le indignó la petición de Seta?
6. ¿Por qué los matemáticos de la corte tardaron tanto en calcular la cantidad que debía entregarse a Seta?
7. ¿Llegó el rey a entregar a Seta lo que había pedido? ¿Por qué?
8. Calcula cuántos granos de trigo debería haber recibido Seta si el tablero de ajedrez tuviera sólo 10 casillas.
9. ¿Qué lección pudo haber aprendido el rey del sabio Seta con todo lo sucedido? Explica tu opinión con tus propias palabras.
10. ¿Has jugado al ajedrez; conoces el juego? Explica brevemente en qué consiste y por qué te parece interesante.

SOLUCIONES:

1. En India.

2. 64 casillas.
3. 18446744073709551615 granos de trigo.
4. Porque le gustaba mucho su invento, el ajedrez.
5. Porque le pareció muy poca cosa, y pensó que menospreciaba su generosidad.
6. Porque era una cantidad inmensa, que requería de enormes cálculos.
7. No. No existía tanto trigo en todo su reino.
8. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1023$ granos de trigo
9. Una lección de humildad. Respuesta abierta.
10. Respuesta abierta.

– Cuenta la leyenda que el inventor del ajedrez recibió como recompensa por su invento la cantidad de trigo consistente en colocar un grano en la primera casilla del tablero, dos en la segunda, cuatro en la tercera, ocho en la cuarta; y así sucesivamente, duplicando en cada casilla el número de granos de la casilla anterior.

- a) ¿Cuántos granos de trigo habría que depositar en la casilla número 27? Expresa el resultado en notación científica
- b) ¿Cuántos granos de trigo se depositaron en la casilla número 64? Expresa también el resultado en notación científica.
- c) Suponiendo que en 100 gramos de trigo hay 2500 granos, ¿cuánto pesará el trigo de la casilla 64? Expresa el resultado en notación científica.
- d) ¿Cuántos camiones de 40 toneladas de capacidad de carga serían necesarios para transportar el trigo? Otra vez debes dar el resultado en notación científica.

– En una bodega hay dos enormes depósitos de vino A y B. Todos los días se sacan ciertas cantidades de vino de cada uno de los depósitos. Del depósito A se extrajeron 5 litros el primer día, 10 el segundo, 20 el tercero y así sucesivamente. Del depósito B se extrajo 2 litros el primer día, 4 el segundo, 8 el tercero y así sucesivamente. El último día se extrajeron del depósito A 96 litros más que del depósito B. ¿Cuántos litros de vino se extrajeron en total de cada depósito y durante cuántos días?

– Un equipo de ciclismo programa su entrenamiento semanal en cinco etapas. En la primera etapa recorre una distancia de 40 kilómetros y cada etapa sucesiva es $\frac{5}{4}$ más larga que la anterior. ¿Cuántos kilómetros recorre el equipo a lo largo de la semana?

– Hemos comprado un coche para pagar de la siguiente manera: el primer mes, 2 000 €; el segundo mes, 1 500 € y así sucesivamente, cada mes $\frac{3}{4}$ partes de lo pagado el mes anterior.

- a) ¿Qué cantidad total hemos de pagar el primer año?
- b) ¿Cuál será la suma de todas las mensualidades?

– El primer año de su apertura al público, un museo fue sido visitado por 250000 personas. En los años posteriores se registra un descenso del 8% anual en el número de visitantes. Bajo estas condiciones,

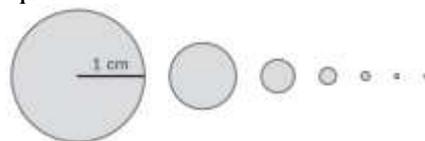
- a) ¿cuál ha sido, en estas condiciones, el número de visitantes del segundo año?
- b) ¿Cuál ha sido el número total de visitantes de los dos primeros años?
- c) ¿cuál ha sido el número de visitantes del 5º año?
- d) ¿Cuál sido el número total de visitantes durante los cinco primeros años?
- e) ¿cuál será el número de visitantes del n-ésimo año?
- f) ¿Cuál será el número total de visitantes de los n primeros años?
- g) Se han impreso 2000000 de entradas. ¿Serán estas entradas suficientes para los 10 primeros años?

– Halla las siguientes sumas infinitas: a) 0,3 ; 0,03 ; 0,003 ; ... b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots$

– En una progresión geométrica de razón 0,2 , la suma de sus infinitos términos es 11,232. Halla el término décimo de la progresión

- La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente es 2, y el primer término es $\frac{1}{2}$. Calcula la razón.
- El primer término de una progresión geométrica ilimitada de razón menor que 1 es $\frac{2}{3}$, y el límite de la suma de todos sus términos es 1. Calcula la razón de la progresión.
- En una progresión geométrica ilimitada de razón menor que uno, el segundo término vale 16 y el límite de la suma de todos sus términos es 64. Calcula el primer término y la razón.
- En una progresión geométrica ilimitada de razón menor que 1 el límite de la suma de todos sus términos es doble de la suma de los cinco primeros términos. Halla la razón de dicha progresión.
- El límite de la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada es 6 y la suma de los dos primeros términos es 4,5. Calcula el primer término.
- La suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada es 4 y el primer término vale 3. ¿Cuál será la suma de los términos de la progresión que tuviera como términos a los cuadrados de los de la anterior?
- La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es 6 y su primer término es 4. Halla la razón.
- Sabiendo que la suma de infinitos términos de una progresión geométrica es 4 y que la razón es 0,75, calcular el octavo término.
- Halla, mediante aplicaciones con progresiones, las fracciones generatrices de los números decimales periódicos: a) 3,222... b) 24,111... ; c) 0,272727 ... d) 0,737373... e) 0,432323232...
- Halla, razonadamente, los valores de x para que las expresiones $x - 2$, $2x - 1$ y $4x + 13$ estén en progresión geométrica. Para esos valores determina la suma de la progresión geométrica ilimitada $\frac{1}{x - 2}, \frac{1}{2x - 1}, \frac{1}{4x + 13}, \dots$
- En una sucesión de cuadrados el área de cada cuadrado es la mitad que el área del cuadrado anterior. El área del primer cuadrado vale 256 cm^2
 - a) Calcula el término general
 - b) Usando la fórmula de la suma de los primeros términos, calcula la suma de las áreas de los 4 primeros cuadrados

- El radio de cada círculo es la mitad que el del anterior

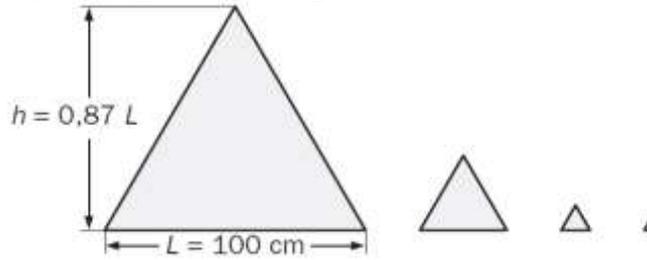


Calcula:

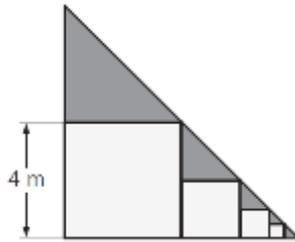
- a) El área del círculo que ocupa el quinto lugar.
 - b) La suma de las áreas de los 6 primeros círculos de la sucesión.
- Halla la suma de las áreas de los cuatro cuadrados de la figura, sabiendo que el lado de cada uno es cuatro veces mayor que el del siguiente cuadrado



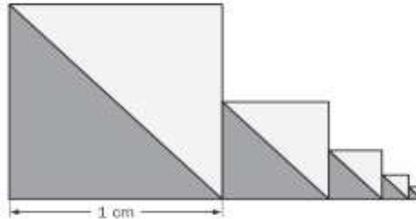
– Calcula la suma de las áreas de los cuatro triángulos equiláteros de la figura sabiendo que el lado de cada uno es tres veces menor que el siguiente triángulo.



– Halla el área de la figura sombreada



– Calcula el área de la región coloreada teniendo en cuenta que el lado de cada cuadrado es la mitad del anterior. (Redondea el resultado a las centésimas)



– En un cuadrado se inscribe un círculo. Sobre el círculo se inscribe un cuadrado, y se repite el proceso hasta obtener 10 cuadrados y 10 círculos. Si el lado del cuadrado inicial mide 4 centímetros, calcula:

- a) La suma de las áreas de los 10 círculos obtenidos.
- b) La suma de las áreas de los 10 cuadrados obtenidos.

– Dado un círculo de radio r , se construye un segundo círculo cuyo diámetro sea el radio del anterior, un tercero cuyo diámetro sea el radio del segundo y así sucesivamente. ¿Cuál será la suma de las áreas de todos los círculos así formados?

– Halla la suma de las áreas de los cuadrados construidos a partir de un cuadrado de lado l , en el que se inscriben cuadrados de lado mitad del anterior.

– Dado un círculo de radio R , se construye un segundo círculo cuyo diámetro es el radio del anterior, un tercero cuyo diámetro es el radio del segundo y así sucesivamente. ¿Cuál será la suma de las áreas de todos los círculos así formados?

– En una sucesión de triángulos, cada triángulo tiene una superficie que es los $3/4$ del triángulo anterior. Se sabe que el área del primer triángulo es 48 cm^2 .

- a) ¿Cuánto vale la suma de las áreas de los 5 primeros triángulos?
- b) ¿Cuánto vale la suma de los infinitos triángulos?

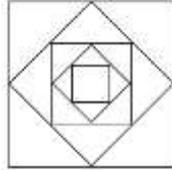
– En una sucesión de triángulos el área de cada triángulo es la mitad que el anterior. El área del primer triángulo vale 2048 cm^2

- a) ¿Cuánto vale el área del décimo triángulo?
- b) ¿Cuánto vale la suma de las áreas de los diez primeros triángulos?
- c) Si la serie de triángulos continuara hasta el infinito, ¿cuánto valdría la suma de las áreas de los infinitos triángulos?

– En un triángulo equilátero de 6 m de lado, se unen los puntos medios de sus lados, obteniéndose así otro triángulo inscrito en el primero. Este proceso se repite indefinidamente. Calcular la suma de las áreas de todos los triángulos formados.

– Dado un cuadrado de 1 m de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados; obtenemos un nuevo cuadrado, en el que volvemos a efectuar la misma operación, y así sucesivamente. Halla la suma de las infinitas áreas así obtenidas.

– Si en un cuadrado de área 8 m^2 se unen los puntos medios, se obtiene otro cuadrado, y así sucesivamente. Calcula la suma de las áreas de dichos cuadrados. ¿Qué tipo de progresión es?



– En un círculo de 1 m de radio se inscribe un cuadrado; en éste se inscribe un círculo; en éste otro cuadrado y así sucesivamente. Halla el límite de la suma de las áreas de todos los círculos así construidos.

– Se tiene una sucesión indefinida de círculos concéntricos en los que cada radio mide la mitad del anterior. Hallar la suma de las áreas de todos estos círculos sabiendo que el radio del primero vale 4 cm

– Las amplitudes de las sucesivas oscilaciones de un péndulo forman una progresión geométrica: 16,12,9, ... cm . Halla la distancia total recorrida por la bolita del péndulo hasta llegar a pararse.

– Una rana da saltos en línea recta hacia adelante, y cada vez salta los $\frac{2}{3}$ del salto anterior. Quiere atravesar una charca circular de 5 m de radio, y el primer salto es de 2 m. ¿Llegará al centro de la charca? ¿Llegará al otro lado de la charca siguiendo el diámetro?

– Usando la fórmula del producto de términos de una p.g. halla el producto de los 6 primeros términos de la p.g. 3, 6, 12,...

– Calcula el producto de los once primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el término central vale 2.

– Calcular el producto de los 8 primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el segundo término es 4 y el quinto es 32.

– El primer término de una progresión geométrica es 1, el producto de todos sus términos es 32768 y el número de términos es 6. Calcula su suma.