**1.- (prueba ordinaria)**

a) Halla el punto simétrico de P(2, 2, 1) respecto de la recta

**Resolución**



El punto simétrico de P respecto de la recta r sería el punto P´(a, b, c) del dibujo. Vamos a hallarlo:

- Hallamos el plano π que pasa por P y es ortogonal a la recta r:

La recta r es y está dada como intersección de dos planos. Luego, su vector director se puede obtener como el producto vectorial de los vectores normales de los planos:

 . Además, haciendo z = 0, y = 1, x = 4 con lo

que A(4, 1, 0) ∈ r y

Un vector normal del plano es el vector director de r:

Y como π pasa por P(2, 2, 1) , π: 1(x **‒** 2) **+** 1(y **‒** 2) + 1(z –1) = 0, de donde π:x + y +z **–** 5 = 0

– Hallamos M, punto de corte de r y π, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

 , π:x + y +z **–** 5 = 0

Sustituyendo en la ecuación del plano se tiene 4 + k + 1 + k **–** 5 = 0 ⇒ 2k = 0 ⇒ k = 0,

El punto de corte es M = A(4, 1, 0)

– Hallamos el simétrico P´(a, b, c) de P(2, 2, 1) usando que M es el punto medio del segmento PP´:

 . El punto simétrico que se pide es P´(6, 0, –1)

b) Halla el punto simétrico de Q(1, –1, –3) respecto del plano π: x – 2y + z + 6 = 0

**Resolución**



Como la recta r es perpendicular a π,

Y como r pasa por Q, unas ecuaciones paramétricas son

Hallamos el punto de corte, M, entre el plano y la recta r:

Sustituyendo en la ecuación del plano se tiene

1 + k – 2(–1 – 2k) – 3 + k + 6 = 0 ⇒ 6k + 6 = 0 ⇒ k = –1. Luego, ⇒

Por último, hallamos el simétrico Q´(a, b, c) de Q(1, –1, –3) usando que M es el punto medio del

segmento QQ´: . El punto simétrico que se pide es

**2.- (prueba ordinaria)** Considera las rectas y

a) Estudia la posición relativa de r y s.

**Resolución**

La recta r está dada como intersección de dos planos:

Hallemos un punto de r: Para x = 1, 2.1 – z = 0, z = 2 ⇒ A(1, 0, 2) ∈ r

La recta s está dada como intersección de dos planos

Hallemos un punto de s: para y = 0, x = –7 ⇒ B(–7, 0, 0) ∈ s

El vector

Como , los vectores son linealmente independientes. Luego, r y s se cruzan



b) Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.

**Resolución**

El plano π que se pide es paralelo a r, s ⇒ un vector normal es perpendicular a

y a ⇒ ⇒ π: 2x + 2y – z + D = 0

Observa que A(1, 0, 2) ∈ r y B(–7, 0, 0) ∈ s y al ser π paralelo a r, s y equidistar de r y s:

d(A, π) = d(B, π) ⇒

Por tanto, el plano que se pide es π: 2x + 2y – z + 7 = 0

**3.- (prueba extraordinaria)** Considera el plano π: x – 2y + z – 2 = 0 y la recta , λ ∈ R

(a) Estudia la posición relativa de π y r.

**Resolución**

Un vector normal de π es

Un vector director de r es ; ⇒ ⇒ r // π ó r ⊂ π

A(1, 0, 1) ∈ r y como 1 – 2.0 + 1 – 2 = 0, A ∈ π . Esto quiere decir que r ⊂ π.



(b) Calcula la ecuación de la recta contenida en π que pasa por el punto P(2, –1, –2) y es perpendicular

a r.

**Resolución**

Sea s la recta que nos piden. Como s ⊂ π, entonces y como s ⊥ r, entonces

Como ⇒ .

Al ser P(2, –1, –2) ∈ s, se tiene que la recta que piden es

**4.- (prueba extraordinaria)** Considera los puntos A(4, 0, 0) y B(0, 2, 0). Calcula los puntos del plano OXZ

que forman un triángulo equilátero con A y B.

**Resolución**

El plano OXZ tiene ecuación y = 0. Los puntos que se piden son de la forma C(a, 0, b)

El lado del triángulo equilátero es

Al ser equilátero, todos los lados miden lo mismo.

Igualando las longitudes de los lados queda el sistema .

Simplificando, . Restando las ecuaciones, 8a = 12,

Como

Los puntos que se piden son dos: y

5.- Considera los puntos P(1, 0, 1) y Q(3, –2, 1).

a) Calcula el plano perpendicular al segmento PQ que pasa por su punto medio.

**Resolución**

El plano π que se pide pasa por M, punto medio de PQ ;

Un vector normal del plano es el vector

Y como π pasa por M(2, –1, 1) , π: 1(x **‒** 2) – 1(y + 1) + 0(z – 1) = 0, de donde π:x – y – 3 = 0

b) Calcula el plano paralelo a la recta que pasa por P y Q.

**Resolución**

Observa que . Al ser , vectores directores del

plano α que piden, un vector normal de α es

Y como α pasa por P(1, 0, 1), entonces α: 1(x ‒ 1) + 1(y – 0) – 2(z ‒ 1) = 0 ; α: x + y – 2z + 1 = 0

6.- Considera los puntos A(1, 1, 2), B(1, 0, 1) y C(1, –1, 2).

a) Determina el área del triángulo de vértices A, B y C.

**Resolución**



Sabemos que el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo generado por los vectores

 y . O sea,

 ;

b) Calcula D para que los puntos A, B, C y D sean los vértices consecutivos de un paralelogramo.

**Resolución**



Sea D(x, y, z) el cuarto vértice. Entonces, ⇒ (0, –1, –1) = (1 – x, –1 – y, 2 – z)

Igualando componentes, 0 = 1 – x ; x = 1 ; –1 = –1 – y ; y = 0 ; –1 = 2 – z ; z = 3. Por tanto, D(1, 0, 3)

7.- Considera el plano π: x – y = 0 y la recta

a) Calcula, si es posible, el plano perpendicular a π que contiene a r.

**Resolución**

Al ser y el vector normal de π , vectores directores del plano α que

piden, un vector normal de α es

Y como α pasa por A(1, 0, 2) ∈ r, entonces α: 1(x ‒ 1) + 1(y – 0) – 5(z ‒ 2) = 0 ; α: x + y – 5z + 9 = 0

b) Calcula, si es posible, la recta perpendicular a r, contenida en π y que pasa por el origen.

**Resolución**

Al ser y el vector normal de π , vectores perpendiculares a la recta s que se pide, un vector director de s es

Y como s pasa por el origen, O(0, 0, 0), entonces

8.- Considera los puntos O(0, 0, 0), A(a, –1, 2) y B(a, 1, 0).

a) Determina a para que el triángulo OAB tenga área 3 unidades cuadradas.

**Resolución**

Sabemos que el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo generado por los vectores

 y . O sea,

 .

Elevando al cuadrado, 2a2 + 1 = 9, a2 = 4. Las soluciones son a = ± 2

b) Calcula a para que O, A y B sean coplanarios con el punto C(1, 1, 0).

**Resolución**

Como los puntos deben ser coplanarios, serán l.d. , y

Luego, ⇒ . De donde, 2(a – 1) = 0. Por tanto, debe ser a = 1

9.- Considera la recta y el punto P(0, 2, –4).

a) Calcula el punto de r a menor distancia de P.

**Resolución**

Observa que , ; r: (x, y, z) = (–1 + 2k, 2 + 2k, 3 – k).

El punto Q de r que se pide será de la forma Q(–1 + 2k, 2 + 2k, 3 – k),

Al ser Q el más próximo a P, entonces . Operando, 4k – 2 + 4k – 7 + k = 0

9k – 9 = 0, k = 1 y Q(–1 + 2.1, 2 + 2.1, 3 – 1). El punto buscado es Q(1, 4, 2)

b) Halla los puntos de r cuya distancia a P sea igual a

**Resolución**

Ahora se buscan los Q(–1 + 2k, 2 + 2k, 3 – k), , .

Elevando al cuadrado, .

Queda . Hay dos puntos que son solución:

Si k = 0, Q1(–1, 2, 3) y si k = 2, Q2(–1 + 2.2, 2 + 2.2, 3 – 2) ⇒ Q2(3, 6, –1)

10.- Sea π1 el plano determinado por los puntos A(1, 0, 0), B(1, 1, –3) y C(0, 1, 1), y

sea π2:x – y + z – 1 = 0. Determina la ecuación de la recta paralela a ambos planos que pasa por el origen.

**Resolución**

Un vector normal de π1 es

Un vector normal de π2 es . Al ser y, vectores perpendiculares a la recta r que se

pide, un vector director de r es

Y como r pasa por el origen, O(0, 0, 0), entonces

11.- Considera las rectas y

a) Calcula a para que las rectas se corten.

**Resolución**

La recta r tiene de vector director y A(0, –a, –1) ∈ r

La recta s está dada como intersección de dos planos. Luego, su vector director se puede obtener como el

producto vectorial de los vectores normales de los planos:

Hallemos un punto de s: para y = 0, , x = 3a ; z = 2 – x = 2 – 3a. Luego, B(3a, 0, 2 – 3a) ∈ s

Para que r y s se corten, deben ser l.d.

Luego,

Por tanto, debe ser a = 0

b) Para a = –1, halla la recta que corta perpendicularmente a r y s.

**Resolución**

Para a = –1, y

La recta r tiene de vector director y A(0, 1, –1) ∈ r

La recta s tiene vector director y B(–3a, 0, 2 – 3a) ∈ s ⇒ B(–3, 0, 5) ∈ s

. Como ,

los vectores son l.i. Luego, r y s se cruzan



Sabemos que y A(0, 1, –1) ∈ r ; y B(–3, 0, 5) ∈ s

Sea t la recta que se pide. Como t debe ser perpendicular a r y a s, tendrá de vector director

- Hallamos el plano, α, perpendicular a r y que contiene a s:

Al tener como vectores directores , un vector normal de α es

Y como α pasa por B(–3, 0, 5), entonces α: 1(x + 3) + 1(y **–** 0) – 2(z **‒** 5) = 0 ; α:x+y – 2z + 13 = 0

- Hallamos el plano, β, perpendicular a s y que contiene a r:

Al tener como vectores directores , un vector normal de β es

Y como β pasa por A(0, 1, –1), entonces β: 1(x **‒** 0) + 1(y **–** 1) –1(z + 1) = 0 ; β:x + y – z – 2 = 0

La recta perpendicular común es , o sea

12.- Considera los vectores y

a) Calcula a para que ambos vectores formen un ángulo de π/3 radianes.

**Resolución**

Operando, . Por tanto, debe ser a = 3

b) Calcula a para que el vector sea ortogonal a .

**Resolución**

 ;

Para que sea ortogonal a debe ser

Operando, , imposible.

Por tanto, no existe ningún valor de a para que el vector sea ortogonal a .