

Instrucciones: a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la

realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.

c) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios

cada uno.

d) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

e) Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a

dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer

lugar.

f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con

capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos

conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para

valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A. Resuelve solo uno de los siguientes ejercicios:

**EJERCICIO 1. (2,5 puntos)**

Sea la función f: (0, +∞) → R definida por f(x) = ln x y los puntos de su gráfica A(1, 0) y B(e, 1).

a) **[1,5 puntos]** Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica

es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B.

**Resolución**

Recordemos el teorema del valor medio de Lagrange, que dice:

Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe al menos un punto c ∈ (a, b) tal que f(b) – f(a) = f´(c)(b – a).

Geométricamente significa que hay al menos un c ∈ (a, b) (punto de la gráfica P(c, f(c)) tal que la recta tangente en x = c es paralela a la recta que pasa por A y B, siendo A(a, f(a)) y B(b, f(b)).

Vamos a aplicar el teorema a f(x) = ln x en el intervalo [1, e]. Vemos que cumple las hipótesis y

Sustituyendo, . Despejando, c = e – 1, f(c) = f(e – 1) = ln(e – 1)

Por tanto, el punto de la gráfica de f que se pide es P(e – 1, ln (e – 1)) y sólo existe este punto.

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A.

**Resolución**

f(x) = ln x . La ecuación de la recta normal es .

Como A(1, 0), , , .

**EJERCICIO 2. (2,5 puntos)**

Considera la función continua f definida por .

Calcula a y b.

**Resolución**

Para x ≠ 0, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de

operar con funciones continuas y derivables.

- Como debe ser continua en x = 0:

Indet.

Por L´Hôpital:

Como queremos que el límite sea finito, pues debe valer b – 1, debe ser 1 – a = 0 porque de lo contrario el

límite valdría ±∞. Luego, a = 1 y quedaría Indet

De nuevo por L´Hôpital:. Luego, ,

Conclusión: debe ser a = 1,

BLOQUE B. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

**EJERCICIO 3. (2,5 puntos)**

Considera la función f definida por , para x ≠ –1, x ≠ 1. Calcula una

primitiva de f cuya grafica pase por el punto (0, 1).

**Resolución**

Las infinitas primitivas de f son F(x) = .

Haciendo la división obtenemos la forma mixta de la fracción:

Luego,

Para calcular I1 descomponemos la fracción en suma de fracciones simples:

Multiplicando los dos miembros por tenemos x + 2 = A(x + 1) + B(x – 1)

para x = 1, sustituyendo 3 = 2A → ; para x = –1, sustituyendo 1 = –2B →

. Entonces

Como F(x) pasa por (0, 1), entonces

La primitiva que se busca es

**EJERCICIO 4. (2,5 puntos)**

Halla la función f: R → R tal que f´´(x) = x cos x y cuya gráfica pasa por los

puntos

**Resolución**

. Usemos el método de integración por partes:

; , con a ∈ R

. Usemos el método de integración por partes para hallar :

;

Sustituyendo,

Hallemos a y b:

La gráfica de f pasa por ⇒

Queda

La gráfica de f pasa por ⇒

Operamos:

La función que se pide es

BLOQUE C. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

**EJERCICIO 5. (2,5 puntos)**

Considera la matriz

a) **[1 punto]** Calcula A2024.

**Resolución**

En general, . Luego,

b) **[1,5 puntos]** Halla la matriz X, si es posible, que verifica A2XA + I = O, donde I y O son la matriz

identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

**Resolución**

De A2XA + I = O, trasponiendo términos A2XA = – I ⇒ AAXA = –I ;

det A = 1 ≠ 0, existe

Multiplicamos por A**‒**1, por la izquierda y por la derecha, en los dos miembros:

.

Multiplicamos por A**‒**1, por la izquierda, en los dos miembros:

**EJERCICIO 6. (2,5 puntos)**

Considera el sistema

a) **[1,75 puntos]** Discute el sistema según los valores de k.

**Resolución**

Las matrices de coeficientes y ampliada son y

det A = (k – 1)2 + 1 – 1 – (k – 1) = (k – 1)(k – 1 – 1) = (k – 1)(k – 2) = 0 ⇔ k = 1 ó k = 2

– Si k ≠ 1 ; k ≠ 2 , det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A\* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema

de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

- Si k = 1, det A = 0 y . Como , rg A = 2.

. Como , rg A\* = 2.

Luego, rg A\* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si k = 2, . La 2ª fila corresponde a la ecuación 0 = 2, que es

incompatible. Luego, el sistema es incompatible.

b) **[0,75 puntos]** Para k = 1 resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que y = 0?

En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

**Resolución**

Para k = 1, sabemos del apartado anterior que el sistema es compatible indeterminado y la matriz del sistema es equivalente a , que corresponde al sistema .

Despejando, y = 1 – z ; x = –z. Llamando z = k, las infinitas soluciones son , k ∈ R.

Si para alguna solución y =0, entonces 0 = y = 1 – k → k = 1.

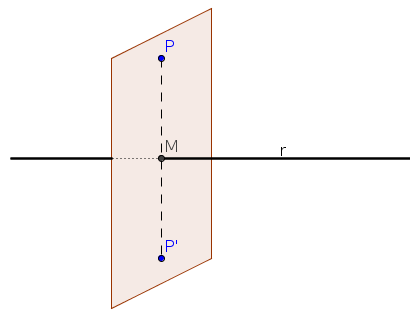
Sustituyendo, la solución en la que y = 0 es

BLOQUE D. Resuelve solo uno de los siguientes ejercicios:

**EJERCICIO 7. (2,5 puntos)**

a) **[1,25 puntos]** Halla el punto simétrico de P(2, 2, 1) respecto de la recta

**Resolución**



El punto simétrico de P respecto de la recta r sería el punto P´(a, b, c) del dibujo. Vamos a hallarlo:

- Hallamos el plano π que pasa por P y es ortogonal a la recta r:

La recta r es y está dada como intersección de dos planos. Luego, su vector director se puede obtener como el producto vectorial de los vectores normales de los planos:

. Además, haciendo z = 0, y = 1, x = 4 con lo

que A(4, 1, 0) ∈ r y

Un vector normal del plano es el vector director de r:

Y como π pasa por P(2, 2, 1) , π: 1(x **‒** 2) **+** 1(y **‒** 2) + 1(z –1) = 0, de donde π:x + y +z **–** 5 = 0

– Hallamos M, punto de corte de r y π, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

, π:x + y +z **–** 5 = 0

Sustituyendo en la ecuación del plano se tiene 4 + k + 1 + k **–** 5 = 0 ⇒ 2k = 0 ⇒ k = 0,

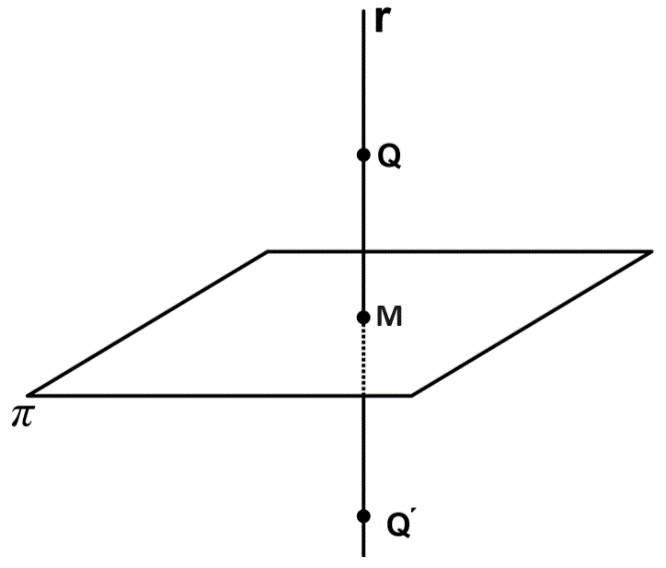
El punto de corte es M = A(4, 1, 0)

– Hallamos el simétrico P´(a, b, c) de P(2, 2, 1) usando que M es el punto medio del segmento PP´:

. El punto simétrico que se pide es P´(6, 0, –1)

b) **[1,25 puntos]** Halla el punto simétrico de Q(1, –1, –3) respecto del plano π: x – 2y + z + 6 = 0

**Resolución**



Como la recta r es perpendicular a π,

Y como r pasa por Q, unas ecuaciones paramétricas son

Hallamos el punto de corte, M, entre el plano y la recta r:

Sustituyendo en la ecuación del plano se tiene

1 + k – 2(–1 – 2k) – 3 + k + 6 = 0 ⇒ 6k + 6 = 0 ⇒ k = –1. Luego, ⇒

Por último, hallamos el simétrico Q´(a, b, c) de Q(1, –1, –3) usando que M es el punto medio del

segmento QQ´: . El punto simétrico que se pide es

**EJERCICIO 8. (2,5 puntos)**

Considera las rectas y

a) **[1 punto]** Estudia la posición relativa de r y s.

**Resolución**

La recta r está dada como intersección de dos planos:

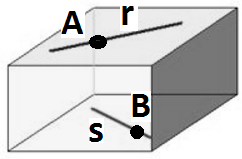
Hallemos un punto de r: Para x = 1, 2.1 – z = 0, z = 2 ⇒ A(1, 0, 2) ∈ r

La recta s está dada como intersección de dos planos

Hallemos un punto de s: para y = 0, x = –7 ⇒ B(–7, 0, 0) ∈ s

El vector

Como , los vectores son linealmente independientes. Luego, r y s se cruzan



b) **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.

**Resolución**

El plano π que se pide es paralelo a r, s ⇒ un vector normal es perpendicular a

y a ⇒ ⇒ π: 2x + 2y – z + D = 0

Observa que A(1, 0, 2) ∈ r y B(–7, 0, 0) ∈ s y al ser π paralelo a r, s y equidistar de r y s:

d(A, π) = d(B, π) ⇒

Por tanto, el plano que se pide es π: 2x + 2y – z + 7 = 0