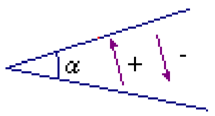
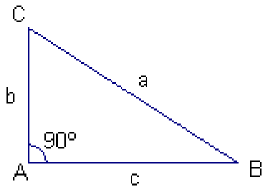
TRIGONOMETRÍA

Ángulo y sistemas de medidas.

Ángulo: región del plano comprendida entre dos semirrectas con el mismo origen.		Grado sexagesimal: ángulo que resulta al dividir la circunferencia en 360 partes iguales.	Radián: ángulo cuya longitud de arco es igual al radio de la circunferencia.	360º : 2π radianes 180º : π radianes 90º: π / 2 radianes 1 rad : 57º 17' 44.81''

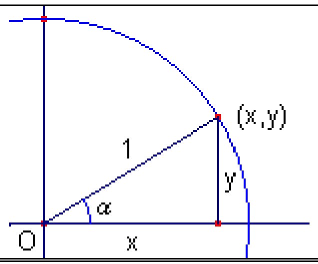
Definición de razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo



$$seno = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad coseno = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} \qquad tangente = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo}$$

$$cosecante = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} \qquad secante = \frac{hipotenusa}{cateto\ contiguo} \qquad cotangente = \frac{cateto\ contiguo}{cateto\ opuesto}$$

Definición de razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. Relación entre ellas.



$$sen\ \alpha = \frac{y}{1} = y \quad cos\ \alpha = \frac{x}{1} = x \quad tg\ \alpha = \frac{y}{x} \quad cosec\ \alpha = \frac{1}{y} \quad sec\ \alpha = \frac{1}{x} \quad cotg\ \alpha = \frac{x}{y}$$

$$-1 \le sen\ \alpha \le 1 \qquad -1 \le cos\ \alpha \le 1$$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{1}{cotg\ \alpha} \quad cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} \quad sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha} \quad cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$$

Teorema fundamental

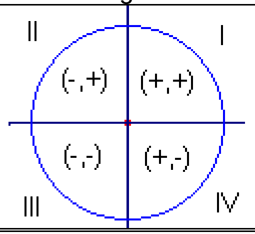
$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$\Downarrow$$

$$sen\ \alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}$$

$$cos\ \alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha}$$

Signo de las razones trigonométricas en los distintos cuadrantes.



	I	II	III	IV
seno	+	+	-	-
coseno	+	-	-	+
tangente	+	-	+	-

Razones trigonométricas de los ángulos principales.

grados	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
radianes	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π	7π/6	5π/4	4π/3	3π/2	5π/3	7π/4	11π/6	2π
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Relación de las razones trigonométricas de un ángulo en cualquier cuadrante con un ángulo del primero.

I : ángulos complementarios	II	II : ángulos suplementarios	III
$sen(\pi/2 - \alpha) = cos\ \alpha$ $cos(\pi/2 - \alpha) = sen\ \alpha$ $tg(\pi/2 - \alpha) = cotg\ \alpha$	$sen(\pi/2 + \alpha) = cos\ \alpha$ $cos(\pi/2 + \alpha) = -sen\ \alpha$ $tg(\pi/2 + \alpha) = -cotg\ \alpha$	$sen(\pi - \alpha) = sen\ \alpha$ $cos(\pi - \alpha) = -cos\ \alpha$ $tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha$	$sen(\pi + \alpha) = -sen\ \alpha$ $cos(\pi + \alpha) = -cos\ \alpha$ $tg(\pi + \alpha) = tg\alpha$

III	IV	IV : ángulos negativos
$sen(3\pi/2 - \alpha) = -cos\ \alpha$ $cos(3\pi/2 - \alpha) = -sen\ \alpha$ $tg(3\pi/2 - \alpha) = cotg\ \alpha$	$sen(3\pi/2 + \alpha) = -cos\ \alpha$ $cos(3\pi/2 + \alpha) = sen\ \alpha$ $tg(3\pi/2 + \alpha) = -cotg\ \alpha$	$sen(2\pi - \alpha) = sen\ (-\alpha) = -sen\ \alpha$ $cos(2\pi - \alpha) = cos(-\alpha) = cos\ \alpha$ $tg(2\pi - \alpha) = tg(-\alpha) = -tg\alpha$

Funciones trigonométricas recíprocas.

$sen\ \alpha = s$	$cos\ \alpha = c$	$tg\ \alpha = t$
$\alpha = arcsen\ s \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha \\ \alpha_2 = \pi - \alpha \end{cases}$	$\alpha = arccos\ c \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha \\ \alpha_2 = -\alpha = 2\pi - \alpha \end{cases}$	$\alpha = arctg\ t \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha \\ \alpha_2 = \pi + \alpha \end{cases}$

Razones trigonométricas del ángulo suma.

$$sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot sen\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-sen\alpha\cdot sen\beta$$
$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Razones trigonométricas del ángulo diferencia.

$$sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot sen\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+sen\alpha\cdot sen\beta$$
$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble.

$$sen\,2\alpha=2\cdot sen\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha$$
$$tg\,2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad.

$$sen\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Transformación de sumas y diferencias en productos.

$$sen\,\alpha+sen\,\beta=2\cdot sen\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$sen\,\alpha-sen\,\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sen\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot sen\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sen\frac{\alpha-\beta}{2}$$

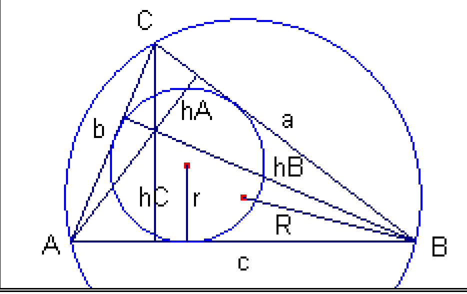
Transformación de productos en suma y diferencias.

$$sen\,\alpha\cdot\cos\beta=\frac{sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)}{2}$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$
$$sen\,\alpha\cdot sen\,\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Teorema del seno.

$$\frac{a}{sen\,A}=\frac{b}{sen\,B}=\frac{c}{sen\,C}=2R$$

R: radio de la circunferencia circunscrita



Teorema del coseno.

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos C$$

Superficie del triángulo.

$$S=\frac{base\cdot altura}{2}$$
$$S=\frac{a\cdot h_A}{2}=\frac{b\cdot h_B}{2}=\frac{c\cdot h_C}{2}$$

Fórmula de Herón

$$S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$$
$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

$$S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$$

R: radio de la circunferencia circunscrita

$$S=p\cdot r=\frac{(a+b+c)\cdot r}{2}$$

r: radio de la circunferencia inscrita

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot sen\,C=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot sen\,B=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot sen\,A$$
$$S=\frac{a^2\cdot sen\,B\cdot sen\,C}{2\cdot sen\,A}=\frac{b^2\cdot sen\,A\cdot sen\,C}{2\cdot sen\,B}=\frac{c^2\cdot sen\,A\cdot sen\,B}{2\cdot sen\,C}$$

Algunas fórmulas trigonométricas de interés para integración.

$tg\,x=t$	$sen\,x=\frac{tg\,x}{\sqrt{1+tg^2x}}$	$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}$	$tg\,x$	$dx=\frac{dt}{1+tg^2x}$
$tg\frac{x}{2}=t$	$sen\,x=\frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$	$\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$	$tg\,x=\frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}$	$dx=\frac{2\,dt}{1+tg^2\frac{x}{2}}$

Fórmulas de Briggs.

$$sen\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{2}}\qquad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p\cdot(p-a)}{b\cdot c}}\qquad tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}}$$

de igual forma se pueden deducir las fórmulas correspondientes para los ángulos B y C

Luis Barrios Calmaestra