GEOMETRÍA

Componentes de un vector.

Origen: $A:(a_1,a_2)$

Extremo: $B:(b_1,b_2)$

Componentes:

Diferencia entre las coordenadas del extremo y las coordenadas del origen:

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2)$$

Módulo de un vector

$$\vec{v}=(a,b)\Rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Vector unitario: $|\vec{v}|=1$

Si $\vec{v}$ no es unitario, entonces el vector

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

es unitario

Operaciones con vectores.

$\vec{u}=(a_1,a_2)\quad \vec{v}=(b_1,b_2)\quad \alpha\in\mathbb{R}$

Suma y diferencia:

$$\vec{u}\pm\vec{v}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2)$$

Producto por un número:

$$\alpha\cdot\vec{u}=(\alpha\cdot a_1,\alpha\cdot a_2)$$

Producto escalar:

$$\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2\end{cases}$$

Punto medio M de un segmento AB.

$$2\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\quad\Rightarrow\quad M:\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)$$

Ecuaciones de la recta r que pasa por el punto $P:(x_0,y_0)$ y tiene por vector director $\vec{v}=(a,b)$.

Ecuación vectorial:

$$(x,y)=(x_0,y_0)+\alpha\cdot(a,b)$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases}x=x_0+\alpha\cdot a\\ y=y_0+\alpha\cdot b\end{cases}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$$

Ecuación punto-pendiente:

$$y-y_0=\frac{b}{a}\cdot(x-x_0)$$

Pendiente: $m=\frac{b}{a}=tg(OX,r)$

Ecuación general:

$$Ax+By+C=0$$

$$\vec{v_r}=(-B,A)\quad o\quad \vec{v_r}=(B,-A)$$

Vector perpendicular: $\vec{n}=(A,B)$

Ecuación explícita:
(despejando y en la ec. general)

$$y=mx+n$$

Para calcular la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $A:(x_1,y_1)$ y $B:(x_2,y_2)$, se calcula la ecuación de la recta que pasa por cualquiera de ellos y tiene como vector director $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

Posición relativa de dos rectas. $r:Ax+By+C=0$ y $s:A'x+B'y+C'=0$

Secantes: $\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}$
Sistema compatible determinado

Iguales: $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$
Sistema compatible indeterminado

Paralelas: $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$
Sistema incompatible

Ángulo de dos vectores.

$$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Ángulo de dos rectas. (r,s)

$$\cos(r,s)=\cos(\vec{v_r},\vec{v_s})=\left|\frac{\vec{v_r}\cdot\vec{v_s}}{|\vec{v_r}|\cdot|\vec{v_s}|}\right|$$

$$tg(r,s)=\left|\frac{m_r-m_s}{1+m_r\cdot m_s}\right|$$

Rectas paralelas. $r\,//\,s$

Vectores directores
$\vec{v_r}=\vec{v_s}\quad o\quad \vec{v_r}=\alpha\cdot\vec{v_s}$

Pendientes
$m_r=m_s$

Ecuaciones generales
$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$

$r:Ax+By+C=0$
Recta paralela:
$s:Ax+By+C'=0$

Rectas perpendiculares. $r\perp s$

Vectores directores
$\vec{v_r}\cdot\vec{v_s}=0$

Pendientes
$m_r\cdot m_s=-1\quad m_r=-\frac{1}{m_s}$

Ecuaciones generales
$A\cdot A'+B\cdot B'=0$

$r:Ax+By+C=0$
Recta perpendicular:
$s:Bx-Ay+C'=0$

Distancias.

Distancia entre dos puntos: $A:(x_1,y_1)$ y $B:(x_2,y_2)$

$$d(A,B)=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Distancia entre un punto y una recta:

$A:(x_1,y_1)$
$r:Ax+By+C=0$

$$d(A,r)=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

Distancia entre dos rectas: $d(r,s)=\min\{d(P,Q)\,/\,P\in r\,,Q\in s\}$

Si las rectas son secantes o iguales $d(r,s)=0$

Si las rectas son paralelas, se coge un punto de una recta y se calcula la distancia del punto a la otra recta.

Luis Barrios Calmaestra