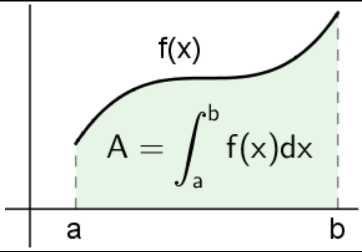
INTEGRALES DEFINIDAS

DEFINICIÓN, PROPIEDADES Y CÁLCULO

Definición de integral definida.

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in[a,b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función, $y=f(x)$, el eje de abscisas, $y=0$, y las rectas verticales que pasan por a, $x=a$, y por b, $x=b$.



Propiedades de la integral definida

Se verifican las dos propiedades que se verificaban para la integral indefinida:

$$\int_a^b \left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \qquad \int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

Además:

- $\int_a^a f(x)\,dx=0$
- $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$
- $Si\ c\in[a,b] \ \rightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$
- $f(x)\geq 0 \ \ \forall x\in[a,b] \ \rightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx\geq 0$
- $f(x)\leq g(x) \ \ \forall x\in[a,b] \ \rightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b k\,dx=k\cdot(b-a),\ \ k\in\mathbb{R}$
- $k\leq f(x)\leq K \ \ \forall x\in[a,b] \ \rightarrow\ k\cdot(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq K\cdot(b-a)$
- $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|\,dx$

Fórmula de Barrow

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva cualquiera de $f(x)$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se calcula como $F(b)-F(a)$. Se represente de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

Como todas las primitivas de $f(x)$ son de la forma $F(x)+C$ y se necesita una primitiva cualquiera, por comodidad se puede escoger $C=0$.Con cualquier otra primitiva se obtendría el mismo resultado:

Al resolver una integral definida mediante un cambio de variable, podemos simplificar el procedimiento, si en lugar de calcular la integral indefinida deshaciendo el cambio, se aplica también el cambio de variable a los límites de integración.

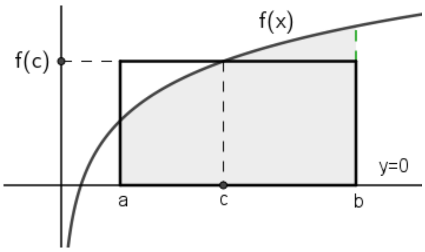
TEOREMAS DE INTEGRACIÓN

Teorema del valor medio

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ entonces existe al menos un valor $c\in(a,b)$ que verifica:

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)\cdot(b-a)$$

Gráficamente, si la función es positiva, el área del recinto limitado por la gráfica de la función y el eje de abscisas entre a y b, coincide con el área del rectángulo de base $b-a$ y altura $f(c)$.



Teorema fundamental del cálculo integral

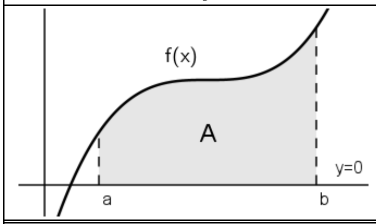
Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y se define la función $F(x)$ como $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, entonces $F(x)$ es derivable en el intervalo (a,b) y verifica que $F'(x)=f(x)$.

Si $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ entonces $F'(x)=f(v(x))\cdot v'(x)-f(u(x))\cdot u'(x)$

Luis Barrios Calmaestra

CÁLCULO DE ÁREAS

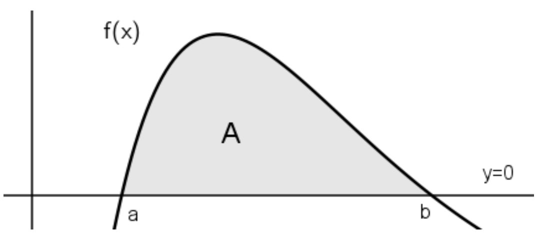
Área de la región limitada por la gráfica de una función continua y no negativa, el eje de abscisas y las rectas verticales x=a y x=b.



El área de una región con estas características coincide con la integral definida de la función $f(x)$ entre a y b.

$$f(x) > 0 \ \ \forall x \in [a,b] \quad \rightarrow \quad \mathrm{A} = \int_a^b f(x)\, dx$$

Área de la región limitada por la gráfica de una función continua y no negativa y el eje de abscisas.

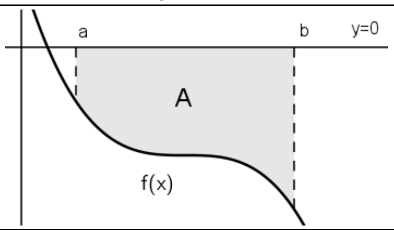


Hay que calcular los puntos de corte de la función con el eje de abscisas, que son las soluciones de la ecuación: $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a,b] \quad \rightarrow \quad \mathrm{A} = \int_a^b f(x)\, dx$$

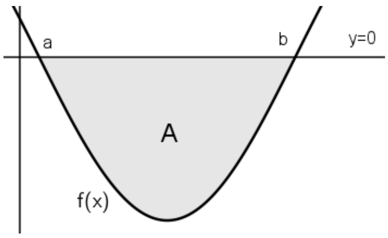
Área de la región limitada por la gráfica de una función continua y no positiva, el eje de abscisas y las rectas verticales x=a y x=b.



El área de una región con estas características coincide con la opuesta de la integral definida de la función $f(x)$ entre a y b.

$$f(x) < 0 \ \ \forall x \in [a,b] \quad \rightarrow \quad \mathrm{A} = -\int_a^b f(x)\, dx$$

Área de la región limitada por la gráfica de una función continua y no positiva y el eje de abscisas.

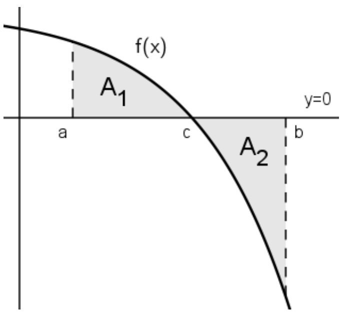


Hay que calcular los puntos de corte de la función con el eje de abscisas, que son las soluciones de la ecuación: $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$f(x) \leq 0 \ \ \forall x \in [a,b] \quad \rightarrow \quad \mathrm{A} = -\int_a^b f(x)\, dx$$

Área de la región limitada por la gráfica de una función continua y que cambia de signo, el eje abscisas y las rectas verticales x=a y x=b.

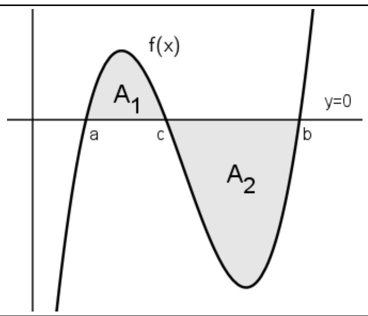


El área de la región que se quiere calcular está formada por dos recintos, uno situado por encima del eje de abscisas y otro por debajo. Hay que calcular el punto de corte de la función con el eje de abscisas resolviendo la ecuación $f(x) = 0$. Si tiene varias soluciones, escogemos solamente las comprendidas entre a y b.

$$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = c \in [a,b]$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a,c] \quad \rightarrow \quad \mathrm{A}_1 = \int_a^c f(x)\, dx \\ f(x) \leq 0 \ \ \forall x \in [c,b] \quad \rightarrow \quad \mathrm{A}_2 = -\int_c^b f(x)\, dx \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad A = A_1 + A_2$$

Área de la región limitada por la gráfica de una función continua y que cambia de signo y el eje abscisas.



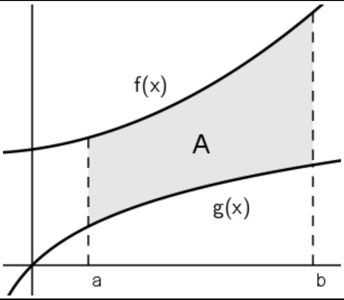
El área de la región que se quiere calcular está formada por dos recintos, uno situado por encima del eje de abscisas y otro por debajo. Hay que calcular los puntos de corte de la función con el eje de abscisas resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = a, \ \ x_2 = b, \ \ x_3 = c$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a,c] \quad \rightarrow \quad \mathrm{A}_1 = \int_a^c f(x)\, dx \\ f(x) \leq 0 \ \ \forall x \in [c,b] \quad \rightarrow \quad \mathrm{A}_2 = -\int_c^b f(x)\, dx \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad A = A_1 + A_2$$

Luis Barrios Calmaestra

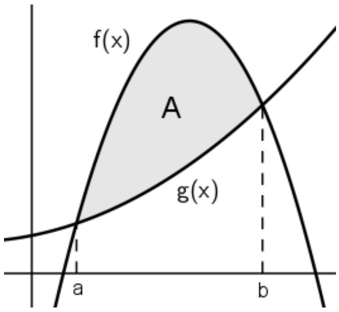
Área de la región limitada por la gráfica de dos funciones, de forma que una de ellas es mayor que otra para todos los puntos del intervalo [a,b], y las rectas verticales x=a y x=b.



El área de una región con estas características coincide con la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre a y b.

$$f(x) > g(x) \ \ \forall x \in [a,b] \ \ \rightarrow \ \ \mathrm{A} = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

Área de la región limitada por la gráfica de dos funciones que se cortan.

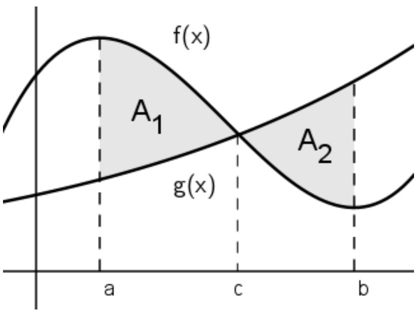


El área de una región con estas características coincide con la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre los puntos de corte de ambas. Hay que calcular los puntos de corte de las dos gráficas resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \ \ \rightarrow \ \ \begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$f(x) \geq g(x) \ \ \forall x \in [a,b] \ \ \rightarrow \ \ \mathrm{A} = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

Área de la región limitada por la gráfica de dos funciones que se cortan y las rectas verticales x=a y x=b.

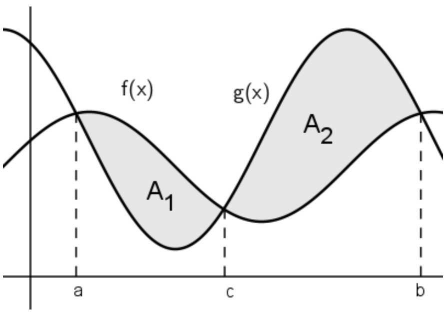


El área de la región que se va a calcular está formada por dos recintos, en cada uno de ellos una de las gráficas está por encima de la otra. Hay que calcular el punto de corte de las dos gráficas resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$. Si tiene varias soluciones, escogemos solamente las comprendidas entre a y b.

$$f(x) = 0 \ \ \rightarrow \ \ x = c \in [a,b]$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \geq g(x) \ \ \forall x \in [a,c] \ \ \rightarrow \ \ \mathrm{A}_1 = \int_a^c \left(f(x) - g(x) \right) dx \\ f(x) \leq g(x) \ \ \forall x \in [c,b] \ \ \rightarrow \ \ \mathrm{A}_2 = \int_c^b \left(g(x) - f(x) \right) dx \end{array} \right\} \ \ \rightarrow \ \ A = A_1 + A_2$$

Área de la región limitada por la gráfica de dos funciones.

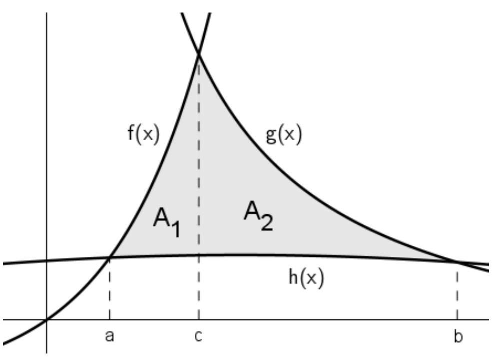


El área de la región que se quiere calcular está formada por dos recintos, en cada uno de ellos una de las gráficas está por encima de la otra. Hay que calcular los puntos de corte de las dos gráficas resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \ \ \rightarrow \ \ x_1 = a, \ x_2 = b, \ x_3 = c$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \geq g(x) \ \ \forall x \in [a,c] \ \ \rightarrow \ \ \mathrm{A}_1 = \int_a^c \left(f(x) - g(x) \right) dx \\ f(x) \leq g(x) \ \ \forall x \in [c,b] \ \ \rightarrow \ \ \mathrm{A}_2 = \int_c^b \left(g(x) - f(x) \right) dx \end{array} \right\} \ \ \rightarrow \ \ A = A_1 + A_2$$

Área de una región limitada por las gráficas más de dos funciones.



Se descompone la región en recintos más pequeños mediante rectas verticales que pasan por los puntos de intersección de las gráficas. Para calcular los puntos de corte de las gráficas se resuelven las ecuaciones que se obtienen al igualar dos a dos las expresiones de las funciones.

$$f(x) = h(x) \ \ \rightarrow \ \ x = a$$

$$g(x) = h(x) \ \ \rightarrow \ \ x = b$$

$$f(x) = g(x) \ \ \rightarrow \ \ x = c$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \geq h(x) \ \ \forall x \in [a,c] \ \ \rightarrow \ \ \mathrm{A}_1 = \int_a^c \left(f(x) - h(x) \right) dx \\ g(x) \geq h(x) \ \ \forall x \in [c,b] \ \ \rightarrow \ \ \mathrm{A}_2 = \int_c^b \left(g(x) - h(x) \right) dx \end{array} \right\} \ \ \rightarrow \ \ A = A_1 + A_2$$