INTEGRALES

Definición de primitiva de una función f(x)

F(x) es una primitiva de f(x) $\Leftrightarrow$ F'(x) = f(x)

Si F(x) es una primitiva de f(x) $\Rightarrow$ F(x) + C, C$\in$ R también es una primitiva de f(x)

Integral indefinida

Se llama integral indefinida de f(x) al conjunto de todas las primitivas de f(x). Se representa por: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Propiedades de la integral indefinida

Integral de una suma o una diferencia: $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Integral del producto de un número por una función: $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$

Integrales inmediatas

Integral de la función potencial de exponente real

$\int x^{\alpha}\, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$	$\int u' \cdot u^{\alpha}\, dx = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$	$\int \dfrac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \dfrac{u'}{u}\, dx = \ln\lvert u\rvert + C$

Integral de las funciones exponenciales

$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int u' \cdot a^u dx = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int u' \cdot e^u dx = e^u + C$

Integral de las funciones trigonométricas

$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$	$\int u' \cdot \operatorname{sen} u\, dx = -\cos u + C$	$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int u' \cdot \cos u\, dx = \operatorname{sen} u + C$

$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + tg^2 x) dx = tg\, x + C$	$\int \dfrac{u'}{\cos^2 u} dx = \int u' \cdot (1 + tg^2 u) dx = tg\ u + C$
$\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int (1 + \operatorname{cotg}^2 x) dx = -\operatorname{cotg} x + C$	$\int \dfrac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} dx = \int u' \cdot (1 + \operatorname{cotg}^2 u) dx = -\operatorname{cotg} u + C$

Integral de las funciones trigonométricas recíprocas

$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$	$\int \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \operatorname{arcsen} u + C$	$\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$	$\int \dfrac{u'}{1+u^2} dx = \operatorname{arctg} u + C$
$\int \dfrac{1}{x \cdot \sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsec} x + C$	$\int \dfrac{u'}{u \cdot \sqrt{1-u^2}} dx = \operatorname{arcsec} u + C$		

Integración por partes

$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\, dx$ ó $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Integración de funciones racionales $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)} dx$

1º Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador $\Rightarrow$ P(x) = Q(x) · C(x) + R(x) $\Rightarrow$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{Q(x) \cdot C(x) + R(x)}{Q(x)} dx = \int C(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

2º El grado del numerador es menor que el grado del denominador $\Rightarrow$ se descompone Q(x) $\Rightarrow$

a) las raíces son reales y distintas $\Rightarrow$ se descompone la fracción de la forma: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_1}{x-\alpha_1} + \dfrac{A_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \dfrac{A_n}{x-\alpha_n}$

b) las raíces son reales y múltiples $(x-\alpha)^n$ $\Rightarrow$ se forman n fracciones $\dfrac{A_1}{x-\alpha} + \dfrac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \dfrac{A_n}{(x-\alpha)^n}$

c) las raíces son complejas y simples $\Rightarrow$ por cada factor de segundo grado irreducible se escribe $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$

d) las raíces son complejas y múltiples $\Rightarrow$ aplicar el método de Hermite $\Downarrow$

Método de Hermite

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{A_1(x)}{B_1(x)} + \int \frac{A_2(x)}{B_2(x)} dx \quad \text{donde} \quad B_1(x) = m.c.d.\{Q(x), Q'(x)\} \quad \text{y} \quad B_2(x) = \frac{Q(x)}{B_1(x)}$$

$A_1(x)$ y $A_2(x)$ son polinomios con coeficientes indeterminados con grados inferiores en una unidad a $B_1(x)$ y $B_2(x)$

Para calcular los coeficientes de los polinomios $A_1(x)$ y $A_2(x)$ se deriva la primera igualdad.

INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Funciones racionales de a^x. Cambio: $a^x = t \Rightarrow a^x \cdot \ln a \cdot dx = dt \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{a^x \cdot \ln a} = \dfrac{dt}{t \cdot \ln a}$

Integración de funciones trigonométricas

Caso general: $tg\,\dfrac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2arctg\ t \Rightarrow dx = \dfrac{2\,dt}{1+tg^2\,\frac{x}{2}} = \dfrac{2\cdot dt}{1+t^2}$ $\quad \operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad \operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Impar en coseno: $\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x \cdot dx = dt \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{\cos x} = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ $\quad \cos x = \sqrt{1-t^2}$

Impar en seno: $\cos x = t \Rightarrow -\operatorname{sen} x \cdot dx = dt \Rightarrow dx = \dfrac{-dt}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$ $\quad \operatorname{sen} x = \sqrt{1-t^2}$

Par en seno y coseno: $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ $\quad \operatorname{sen} x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ $\quad \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ $\quad \operatorname{tg} x = t$

Integrales de la forma: $\int \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} nx\, dx$ $\int \operatorname{sen} mx \cdot \cos nx\, dx$ $\int \cos mx \cdot \cos nx\, dx$	Se reducen a integrales inmediatas con las fórmulas: $\operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$ $\operatorname{sen} mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(m-n)x + \operatorname{sen}(m+n)x\right]$ $\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]$
Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ y $\int \cos^n x\, dx$	Si n es impar se puede hacer como impar en seno o coseno, pero también se pueden convertir en inmediatas separando $\operatorname{sen} x$ o $\cos x$ y sustituyendo $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ o $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ Si n es par se aplican las veces que sea necesario las fórmulas: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ y $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^n x \cdot \cos^m x\, dx$	Si m y n son positivos y uno de ellos es impar $\Rightarrow$ impar en seno o coseno Si m y n son positivos y pares, se reducen al caso anterior con las fórmulas: $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$ $\quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ Si m y n son pares pero uno o ambos son negativos, se hace alguno de los cambios $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt \Rightarrow dx = \cos^2 x \cdot dt$, $\operatorname{cotg} x = t \Rightarrow \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = dt \Rightarrow dx = -\operatorname{sen}^2 x \cdot dt$

Integración de funciones irracionales

Funciones racionales de $\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a \cdot \operatorname{sen} t \Rightarrow \sqrt{a^2-x^2} = a \cdot \cos t \Rightarrow dx = a \cdot \cos t \cdot dt$ o $x = a \cdot \cos t \Rightarrow \sqrt{a^2-x^2} = a \cdot \operatorname{sen} t \Rightarrow dx = -a \cdot \operatorname{sen} t \cdot dt$
Funciones racionales de $\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a \cdot \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{a}{\cos^2 t}\, dt$
Funciones racionales de $\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a \cdot \sec t = \frac{a}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{a \cdot \operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\, dt$
Funciones racionales de $\sqrt[s_1]{x^{r_1}}$, $\sqrt[s_2]{x^{r_2}}$, . . . , $\sqrt[s_n]{x^{r_n}}$	$x = t^n \Rightarrow dx = n \cdot t^{n-1} \cdot dt$ $\quad n = m.c.m.\{s_1, s_2, ..., s_n\}$
Funciones racionales de $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n \Rightarrow ...$
Funciones racionales de $\sqrt{ax^2+bx+c}$	$a > 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$ $c > 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}$ $a,c < 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)\ /\ a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

Luis Barrios Calmaestra